

DIE GRUNDLEHREN DER MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN IN EINZELDARSTELLUNGEN

BAND XXXIII

B. L. VAN DER WAERDEN
MODERNE ALGEBRA

ERSTER TEIL

ZWEITE AUFLAGE

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

keine reell-konjugierten Körper, so ist demnach jede Zahl von K total-positiv zu nennen. Der Begriff total-positiv kann auf beliebige Körper K ausgedehnt werden, indem man als total-positiv diejenigen Elemente von K bezeichnet, welche bei jeder überhaupt möglichen Anordnung von K positiv ausfallen. (Insbesondere sind wieder alle Zahlen von K total-positiv, wenn es keine Anordnung von K gibt, also wenn K nicht formal-reell ist.) Die Ergebnisse dieses Paragraphen lassen sich dann dahin zusammenfassen, daß in einem abzählbaren Körper der Charakteristik $\neq 2$ jedes total-positive Element sich als Quadratsumme darstellen läßt.

Literatur zum Kap. 10.

Weitere Sätze über die Anzahl der Quadrate, die zur Darstellung der total-positiven Zahlen eines Zahlkörpers hinreichen, findet man bei E. LANDAU: *Über die Zerlegung total positiver Zahlen in Quadrate*. Göttinger Nachr. 1919 S. 392. Für den Fall eines Funktionenkörpers siehe D. HILBERT: *Über die Darstellung definiter Formen als Summen von Formquadraten*, Math. Ann. Bd. 32 (1888) S. 342–350, sowie E. ARTIN: *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität Bd. 5 (1926) S. 100–115.

Zehntes Kapitel.

Bewertete Körper.

§ 73. Bewertungen.

Die in § 67 angegebene Konstruktion des Körpers Ω_K zu einem gegebenen angeordneten Körper K benutzt nicht ganz die Anordnung des Körpers K , sondern nur die Anordnung der absoluten Beträge $|a|$ der Körperelemente a . Es liegt daher nahe zu versuchen, diese Konstruktion auch auf andere als nur angeordnete Körper auszudehnen, für welche eine Funktion $q(a)$ mit den Eigenschaften des absoluten Betrages existiert.

Ein Körper K heißt *bewertet*, wenn für die Elemente a von K eine Funktion $q(a)$ definiert ist mit den folgenden Eigenschaften:

1. $q(a)$ ist ein Element aus einem angeordneten Körper P .
2. $q(a) > 0$ für $a \neq 0$; $q(0) = 0$.
3. $q(ab) = q(a)q(b)$.
4. $q(a+b) \leq q(a) + q(b)$.

Aus 2. und 3. folgt sofort

$$q(1) = 1, \quad q(-1) = 1, \quad q(a) = q(-a).$$

Aus 4. folgt

$$q(c) - q(a) \leq q(c-a)$$

ebenso

$$q(a) - q(c) \leq q(c-a),$$

mithin schließlich

$$|q(c) - q(a)| \leq q(c-a).$$

WAERDEN, Bartel L. Van der – Modern algebra.

Berlin: Julius Springer, 1937. (Die grundlehren der mathematischen wissenschaften in einzeldarstellungen; XXXIII).

Vol. I. IX, [1], 272 p.