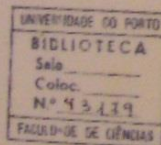


COURS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES APPLICATIONS

PAR
GEORGES VALIRON

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.



MASSON ET C^{ie}, ÉDITEURS

120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 120, PARIS-VII

1945

ÉQUATIONS LINÉAIRES DU TYPE HYPERBOLIQUE

565

Lorsque $-\delta/x$ est un entier positif m , on pourra donner une solution sans signes de quadrature en remplaçant la fonction arbitraire $p(y)$ par la dérivée d'ordre $m + 2$ d'une fonction arbitraire, et intégrant par parties.

REMARQUES. — I. — Si l'on reprend l'équation de l'exemple III du n° 288, $xy^2 - ty^4 = 0$, et si on la rapporte aux caractéristiques en posant $xy = \xi$, $y/x = \eta$, on obtient l'équation

$$2\xi \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0,$$

qui rentre dans le cas des équations de Laplace et s'écrit d'ailleurs

$$(31) \quad 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0.$$

Cette équation s'intègre tout de suite et donne

$$z = \sqrt{\xi} \lambda(\eta) + p(\eta).$$

$\lambda(\eta)$ étant une fonction dérivable arbitraire et $p(\eta)$ une fonction quelconque. On retrouve le résultat du n° 288, mais sans avoir à supposer λ et p analytiques. En revenant aux variables x, y , on a

$$z = \sqrt{xy} \lambda\left(\frac{y}{x}\right) + p\left(\frac{y}{x}\right)$$

et cette fonction vérifie l'équation $xy^2 - ty^4 = 0$ et y ont des dérivées secondes.

II. — D'une façon analogue, l'équation des cordes vibrantes (I, 92) est de la forme $r - a^2 = 0$. Rapportée aux caractéristiques par le changement de variables $y - ax = \xi$, $y + ax = \eta$, elle devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

dont l'intégrale générale est $\lambda(\xi) + p(\eta)$, λ et p étant seulement dérivables une fois. Mais, pour obtenir des solutions de $r - a^2 = 0$, on devra prendre $\lambda(y - ax) + p(y + ax)$, λ et p admettant des dérivées secondes.

Ces faits sont évidemment généraux et se rattachent au fait que l'existence d'une ou de deux dérivées partielles secondes d'une fonction $f(x, y)$ n'entraîne pas l'existence des trois dérivées.

290. — Équation adjointe et méthode de Riemann. — Étant donnée une équation hyperbolique de Laplace, homogène,

$$E(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions de x et y , admettant des dérivées partielles premières, et u étant une fonction de x et y , admettant des dérivées partielles premières et secondes, on peut écrire :

$$u \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial z}{\partial y} \right) + x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

$$ax \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (axz) - z \frac{\partial ax}{\partial x}, \quad bx \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (bxz) - z \frac{\partial bx}{\partial y}.$$

Si l'on considère l'expression :

$$F(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial au}{\partial x} - \frac{\partial au}{\partial y} + cu,$$

VALIRON, Georges – Théorie des fonctions. 2e éd.
Paris: Masson, 1948. 522 p. (Cours d'analyse mathématique)