

11. Come ulteriore applicazione della similitudine dei triangoli, estenderemo qui anzitutto come, in base alle proprietà dei triangoli simili, si possano stabilire, per via diretta e pressoché immediata, i teoremi di EUCLIDE sul triangolo rettangolo, nella forma già rilevata al n. 13. Cap. prec.; poi, nel n. seguente, dimostreremo, in modo analogo, il classico teor. di equivalenza relativo ai quadrangoli iscritti in una circonferenza.

Teor. (di EUCLIDE). — In ogni triangolo rettangolo:

a) ciascun cateto è medio proporzionale fra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'intera ipotenusa;

b) l'altezza relativa al vertice dell'angolo retto è media proporzionale fra i segmenti, in cui l'ipotenusa è divisa dal suo piede.

Se in un qualsiasi triangolo ABC , rettangolo in A , si abbassa l'altezza AH , ciascuno dei due triangoli HBA , HAC , entrambi rettangoli in H , ha comune con ABC un angolo acuto; quindi, ordinatamente eguali ad esso i tre angoli A , B , C di ABC e HBA , HAC e A , B , C di ABC . Per la similitudine di ABC e HBA e da quella di HBA e HAC discendiamo, rispettivamente, le due proporzioni

$$a) \quad HB:AB = AB:BC,$$

$$b) \quad BH:AH = AH:HC.$$

12. **Teor. (di TOLEMMIO).** — In un quadrangolo iscritto in una circonferenza, la somma dei rettangoli delle due coppie di lati opposti è eguale al rettangolo delle diagonali.

Dato un quadrangolo $ABCD$, iscritto in una circonferenza, e si dottono le diagonali AC , BD , diciamo che la somma dei rettangoli $AB \cdot CD$ e di $BC \cdot DA$ è equivalente al rettangolo delle diagonali AC , BD .

Entro l'angolo ADC , certamente maggiore di BDC , si condurrà, partendo da D , la semiretta che con la DA forma l'angolo eguale a BDC , e sia E la sua intersezione con la diagonale AC .

I triangoli AED , BCD , avendo eguali gli angoli ADC , BDC per costruzione e gli angoli CAE , CBF come iscritti nel medesimo arco circolare CAD (VIII, n. 3), hanno ordinatamente eguali tutti gli angoli e sono, quindi, simili (n. 3), sicché sussiste la proporzione

$$AD:BD = AE:BC.$$

In secondo luogo, se agli angoli eguali ADE , BDF togliamo la disposizione della figura, sommiamo l'angolo BDE , tre-

$ADB = EDC$; e, poichè sono eguali anche gli angoli DBA , DCA , come iscritti nello stesso arco DCA , i triangoli ABD , ECD , avendo ordinatamente eguali tutti gli angoli, risultano pur essi simili, onde si ha quest'altra proporzione

$$AB:EC = BD:CD.$$

Dalle due proporzioni così stabilite discende che il rettangolo dei due lati opposti AD , BC del quadrangolo è equivalente al rettangolo della diagonale BD e del segmento AE , mentre il rettangolo degli altri due lati opposti AB , CD è equivalente al rettangolo della stessa diagonale BD e del segmento EC , sicchè la somma dei rettangoli delle due coppie di lati opposti è equivalente alla somma dei due rettangoli, che hanno la stessa base BD e, rispettivamente, le altezze AE ed EC . Ma questa seconda somma è equivalente al rettangolo di base BD , che ha l'altezza $AE + EC = AC$, e si conclude che veramente la somma dei rettangoli delle due coppie di lati opposti è equivalente al rettangolo delle due diagonali AC , BD .

Poligoni simili.

13. La relazione di similitudine, definita al n. 2 per i triangoli, si estende ai poligoni di quanti lati si vogliano, ponendo la seguente:

Def. — Due poligoni di uno stesso numero di lati si dicono simili, se (ove in ciascuno si prendano i vertici in un ordine conveniente) hanno ordinatamente eguali gli angoli e proporzionali i lati.

Ad es., due pentagoni $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ sono simili se si ha simultaneamente

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{A'}, & \widehat{B} &= \widehat{B'}, \\ \widehat{C} &= \widehat{C'}, & \widehat{D} &= \widehat{D'}, \\ \widehat{E} &= \widehat{E'}, \end{aligned}$$

$$AB:A'B' = BC:B'C' = CD:C'D' = DE:D'E' = EA:E'A'.$$

E sono simili due quali si vogliano poligoni regolari di uno stesso numero di lati.

Come per i triangoli, si dicono corrispondenti od omologhi i vertici di angoli eguali e i lati aventi per estremi vertici corri-

FEDERIGO ENRIQUES - UGO AMALDI

ELEMENTI DI GEOMETRIA

AD USO DELLE

SCUOLE SECONDARIE SUPERIORI

PARTE PRIMA



NICOLA ZANICHELLI EDITORE
BOLOGNA 1945

ENRIQUES, Federigo; AMALDI, Ugo – Elementi di geometria: ad uso delle scuole secondarie superiori.
Bologna: Nicola Zanichelli, 1945. 2 vol.