

---

# GAZETA DE MATEMÁTICA

---

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS  
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VI

**N.º 26**

NOVEMBRO-1945

## S U M Á R I O

Sobre la permutación de los operadores  $d/dx$  y  $E_x$ ,  
por *J. Gallego Díaz*

Sobre o método axiomático, por *José Sebastião e Silva*  
Da importância da topologia na matemática moderna,  
por *Achille Bassi*

### Antologia

El Profesor George D. Birkhoff y su influjo en la Argentina  
por *J. Rey Pastor*

A teoria matemática dos Seguros nas Universidades Alemãs,  
por *Luciano Pereira da Silva*

Palestras sobre a Investigação Científica promovidas pela «Junta  
de Investigação Matemática»:

A. investigação científica e o ensino, por *António Júdice*  
O Presidente Truman e a Investigação Científica

### Movimento Matemático

Sobre a índole do ensino da Matemática em Zürich  
por *Hugo B. Ribeiro*

Prémio Dr. F. Gomes Teixeira — Instituto dos Actuários  
Portugueses, etc.

### Matemáticas Elementares

Soluções inteiras não negativas da equação de Diofanto,  
por *José da Silva Paulo*

Pontos de exames de aptidão às Escolas Superiores (1945)

### Matemáticas Superiores

Pontos de exames de frequência e finais

Problemas — Boletim Bibliográfico — Publicações recebidas

NÚMERO AVULSO: ESC. 10\$00

---

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

# Sôbre o método axiomático

por José Sebastião e Silva (bolseiro do I. A. C. em Roma)

Representemos por  $U$  a classe dos seres humanos, e convençionemos escrever  $x \prec y$ , com o significado de  $x$  é descendente de  $y$ .

As letras  $x, y$  representam, naturalmente, elementos indeterminados da classe  $U$  (variáveis sôbre  $U$ ), e desempenham portanto uma função equivalente a dos termos *Fulano, Beltrano, Cícrono*.

Podemos dizer então que « $x \prec y$ » é uma proposição, condicional em  $x, y$ , definida em  $U$ . (Em particular, tal proposição será verificada, se  $x$  fôr filho de  $y$ , ou se  $x$  fôr neto de  $y$ , etc.).

Por outro lado, diremos que o símbolo  $\prec$  representa uma relação binária, definida em  $U$ .

Posto isto, notemos que as proposições:

$\alpha)$  Se  $x \prec y$ , então  $x \neq y$ ; <sup>(1)</sup>

$\beta)$  Se  $x \prec y$  e  $y \prec z$ , então  $x \prec z$ ;

serão incondicionalmente verdadeiras, de acôrdo com as convenções anteriores. (Chamaremos à primeira «propriedade antireflexiva», e à segunda «propriedade transitiva», da relação  $\prec$ ).

Mas é claro que, se as proposições  $\alpha, \beta$  são verdadeiras, também a proposição

$\gamma)$  Se  $x \prec y$ , não pode ter-se  $y \prec x$ ;

não poderá deixar de ser verdadeira, pois que, se fôsse falsa, isto é, se, a respeito de dois indivíduos  $x, y$ , se tivesse ao mesmo tempo  $x \prec y$ ,  $y \prec x$ , ter-se-ia (em virtude de  $\beta$ )  $x \prec x$ , o que, segundo  $\alpha$ , é impossível. (Chamaremos a  $\gamma$  «propriedade antisimétrica» da relação  $\prec$ ).

Vê-se pois que, uma vez admitida a veracidade das proposições  $\alpha, \beta$ , a proposição  $\gamma$  não poderá deixar de ser admitida como verdadeira, qualquer que seja o significado atribuído aos símbolos  $U, \prec$ . Assim, onde dissémos «classe dos seres humanos», podíamos ter dito «classe das aves» atribuindo ao símbolo  $\prec$  o significado «ascendente de»; podíamos ter dito «classe dos números naturais» interpretando « $x \prec y$ » como a proposição « $x$  é um divisor próprio de  $y$ »; podíamos ter dito «classe das funções reais de variável real», considerando a expressão  $\varphi \prec \psi$  como uma abreviatura desta outra « $\varphi(x) < \psi(x)$ , qualquer que seja  $x$ »; podíamos ter dito «classe dos números complexos», escrevendo  $x \prec y$ , se a parte real de  $x$  é menor do que a

parte real de  $y$ , ou se, sendo iguais as partes reais, o coeficiente de  $i$  é maior em  $x$ , do que em  $y$ ; etc, etc. Em qualquer destes casos, as proposições  $\alpha, \beta$  são verdadeiras, e o mesmo sucederá, necessariamente, a respeito da proposição  $\gamma$ .

E é claro que não só  $\gamma$ , mas infinitas outras proposições poderão ser deduzidas, sucessivamente, das proposições  $\alpha, \beta$ , tomadas como axiomas (isto é, admitidas como verdadeiras, sem atender ao significado de  $\prec$ ). Dêste modo, a partir de tais axiomas será desenvolvida uma teoria dedutiva, que podemos chamar teoria das relações binárias antisimétricas transitivas, ou ainda, como se diz de preferência, teoria dos sistemas parcialmente ordenados <sup>(1)</sup>.

Ora é nisto, afinal, que consiste a moderna orientação axiomática, formal ou abstracta da Matemática: — em reduzir a uma teoria única, condensada numa axiomática, o estudo de uma série de propriedades que, mediante convenientes interpretações de linguagem, se revelam comuns a infinitos sistemas possíveis.

Vantagem imediata dêste método: economia extraordinária de pensamento, resultante da possibilidade de aplicar, a infinitos campos concretos, um mesmo aparelho lógico, constituído por uma rede de raciocínios, efectuados uma vez por tôdas. Os princípios de dualidade e de transporte, tão fecundamente utilizados em Geometria, constituem já um exemplo de aplicação do método axiomático.

Todavia, contra êste método aponta-se, entre outros, o inconveniente de que, esvaziando os conceitos primitivos de todo o conteúdo intuitivo, êle romperia aquêlê contacto entre o investigador e a realidade, sem o qual tôda a actividade matemática se reduz a um jôgo inteiramente estéril de símbolos e de fórmulas. Ora a verdade é que nada impede o investigador, ao desenvolver uma teoria segundo o método axiomático, de apoiar a imaginação sôbre algum, ou melhor, sôbre vários dos modelos que verificam a axiomática.

É claro que se trata de um instrumento, que, como

(1) Interessa notar que, adoptando a escrita simbólica da Lógica matemática, as proposições  $\alpha, \beta, \gamma$  assumem a forma:

$$\alpha) (x \prec y) \xrightarrow{x, y} (x \neq y);$$

$$\beta) [(x \prec y) \wedge (y \prec z)] \xrightarrow{x, y, z} (x \prec z);$$

$$\gamma) (x \prec y) \xrightarrow{x, y} \sim (y \prec x);$$

em que os símbolos  $\xrightarrow{x, y}, \wedge, \sim, \neq$  representam «conceitos lógicos, isto é, conceitos comuns às diferentes teorias dedutivas».

(1) Ao sinal  $\neq$  atribui-se aqui, naturalmente, o significado de «distinto de», «não coincidente com». Trata-se portanto de um conceito puramente lógico.

todos os instrumentos, será útil ou nocivo, conforme o uso que dêle se fizer. Não se justifica portanto o horrôr que a certos espíritos infunde aquilo a que desdenhosamente chamam a «*mecanização do pensamento matemático*». Se alguém se lembrar de dizer que os princípios de dualidade e de transporte constituem máquinas de fabricar teoremas — nem sequer estará longe da verdade. Mas não ousará, por êste facto, converter em desgraça o que é apenas uma felicidade, e propôr assim que tais princípios sejam pura e simplesmente excluídos do domínio da Matemática.

*Nota* — Êste esboço, baseado sôbre um parágrafo dum trabalho meu recentemente escrito, tem por objectivo dar uma primeira idéia do método axiomático, procurando desfazer certas lendas que se criaram à volta dêste assunto.

É certo que o teorema  $\gamma$ , que nos serviu de exemplo, não passa de uma trivialidade; mas não devemos esquecer que a Matemática é feita assim — de excessivas trivialidades, tão hábilmente e tão complexamente encadeadas que o resultado deixa de ser uma trivialidade.

Recordemos, por último, que, [além dos *teoremas* (que se *deduzem* dos *axiomas*, por meio das *regras da Lógica*), há a considerar nas teorias dedutivas os *conceitos derivados*, que se *definem* a partir dos *conceitos primitivos*, por meio das *operações da Lógica*. Assim, por exemplo, a partir do conceito de «*descendente*» atrás considerado, podem definir-se os conceitos de «*filho* ( $a$ )», de «*tio* ( $a$ )» de «*primo* ( $a$ )», de «*geração*», de «*grau de parentesco*», etc. etc. Estas noções de parentesco prestam-se, como se sabe, a curiosos problemas — *que são problemas de Matemática*.