

---

# GAZETA DE MATEMÁTICA

---

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS  
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXIII

N.º 88-89

JULHO-DEZ. 1962

## S U M Á R I O

Nuevos operadores relacionados con el operador  
«elasticidad»

por *Alberto Sáez Fernández de Toro e José Gallego-Díaz*

Constituição do Centro de Tratamento da Informação

Problemas de Matemática na Teoria dos Reactores  
Nucleares

por *José Gaspar Teixeira*

Resolução de sistemas de equações lineares determinados

por *F. Teixeira de Queiroz*

Entropia e distribuições contínuas

por *João Tiago Praça Nunes Mexia*

Sur l'introduction des mathématiques modernes  
dans l'enseignement secondaire

por *J. Sebastião e Silva*

Movimento Matemático

Centro de Tratamento da Informação — CENTI

Matemáticas Elementares

Exames de Admissão às Escolas Superiores

Matemáticas Superiores

Pontos de Exames de Frequência e Finais  
Matemáticas Gerais

## Sur l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire (1)

par J. Sebastião e Silva

### Considérations générales.

Nous sommes d'accord qu'il faut introduire, dans l'enseignement secondaire, certains sujets des mathématiques modernes et, surtout, l'esprit de ces mathématiques, non seulement pour assurer une meilleure formation intellectuelle des élèves, mais aussi pour éviter une désarticulation, qui devient de plus en plus sensible, entre les études secondaires et celles universitaires. Mais nous faisons à cela des réserves.

---

(1) Este relatório foi publicado pela revista italiana «Archimede». Convém salientar que o ponto de vista aqui expresso figura entre os meios moderados que têm sido ultimamente defendidos.

Nous pensons que ces innovations doivent être exécutées avec une extrême prudence et le plus fin tact pédagogique, si l'on ne veut pas créer chez les élèves une répulsion invincible pour les mathématiques ou les conduire à l'acquisition d'un formalisme vide, tout à fait stérilisant. En effet, la moderne orientation abstraite des mathématiques est une épée à deux tranchants, d'après l'usage que l'on en fait: elle peut rendre l'enseignement beaucoup plus attirant et beaucoup plus efficace; mais, mal appliquée, elle peut aussi conduire à des résultats à peu près opposés.

En conséquence, nous proposons un enseignement qui, au moins dans les cinq premières années, reste classique dans ses lignes générales, mais qui soit fortement influencé

par l'esprit moderne, depuis la première année. Les idées, les méthodes et le langage des mathématiques modernes seraient introduits graduellement, à propos des matières classiques, avant ou après (suivant les cas) et autant que possible dans la *forme* d'exposition de ces matières. Pour cette introduction, il serait essentiel de partir de nombreux exemples bien concrets, bien familiers et assez suggestifs, voire amusants, et on ferait attention à ne pas introduire les formalismes avant d'être sur que l'élève eût saisi effectivement les idées qui s'y cachent. Une exception serait peut-être le cas des symboles de la logique mathématique qui s'introduisent tout naturellement à propos des équations et des inéquations, comme une sorte de sténographie, généralement agréée par les élèves, qui l'adoptent aussi volontiers en géométrie.

Au contraire, dans les deux dernières années, on devrait aller jusqu'à une étude concentrée, systématique, bien qu'à un niveau encore élémentaire, de plusieurs sujets de mathématiques modernes, soit pures (logique mathématique, théorie des ensembles, algèbre abstraite) soit appliquées (calcul des probabilités et statistique mathématique). Cette étude pourrait remplacer, avec avantage, celle de la logique d'après le modèle classique, tout à fait dépassé, des cours de philosophie.

Par la suite, nous indiquerons *grosso modo* la façon d'exécuter ce programme. Nous manquons encore d'expérience, pour pouvoir nous prononcer plus concrètement.

REMARQUE. Au Portugal, les études secondaires ont une durée de 7 ans, divisée en trois cycles: le premier cycle est de 2 ans, le second de 3 ans et le troisième de 2 ans. Chaque cycle est sanctionnée par un examen. Le 3<sup>ème</sup> cycle est séparé en deux sections — *lettres* et *sciences*; celle des sciences a encore de petites variantes, d'après le cours universitaire que l'élève veuille suivre.

## 1. Notions de la théorie des ensembles et des relations.

À notre avis, ces notions devraient être introduites très tôt, à partir de 10-11 ans, et progressivement, dans l'enseignement de l'arithmétique, de l'algèbre et de la géométrie, *sous une forme aussi intuitive et aussi peu académique que possible*.

D'abord, on habituerait les enfants au langage des intersections et réunions d'ensembles, des complémentaires et des ensembles vides, d'une façon toute naturelle, à propos de situations quotidiennes, et en rapport direct avec les notions de nombre naturel et les opérations sur des nombres. Un point à discuter est celui du moment où il serait opportun d'introduire les symboles des opérations sur des ensembles.

Ensuite, on s'occuperait d'exemples de relations, en général, et de relations d'ordre et d'équivalence en particulier. Nous considérons comme essentiel, pour un enseignement moderne, que les élèves prennent un intérêt réel aux propriétés des différentes relations, *et qu'ils s'y amusent*. Cela ne nous semble pas difficile comme problème didactique; en particulier, les relations de parenté offrent toujours un grand choix d'exemples efficaces et amusants.

Après avoir discuté les propriétés de plusieurs relations — et d'opérations de la vie quotidienne — les élèves auront sûrement plus d'intérêt pour les propriétés des opérations numériques. Inutile d'insister sur l'importance vitale de l'étude de ces propriétés dans tout l'enseignement des mathématiques. Malheureusement, cette étude a été éloignée, dans l'enseignement classique, de sa vraie finalité, la seule qui puisse la justifier aux yeux des élèves et lui donner de la vie: le fondement théorique des transformations d'expressions algébriques et d'équations en des expressions ou équations équivalentes. Isolée dans un cadre strictement arithmétique.

que, elle est condamnée à languir, comme une plante privée d'air et de lumière. Il faudra donc que ces deux moments décisifs de l'enseignement — l'étude des propriétés formelles des opérations et l'initiation algébrique — soient rapprochés le plus possible.

D'un autre côté, tout cet apprentissage de notions logiques sur les relations et les opérations — y-compris d'autres opérations que celles de l'arithmétique des nombres — devrait aboutir, vers la fin de la seconde année, à une description axiomatique, plus ou moins déguisée, de la notion de grandeur, sans l'axiome de complétude. Cet axiome serait introduit plus tard, dans la géométrie rationnelle et lors d'une première étude des nombres irrationnels.

## 2. Notions de logique mathématique.

Nous pensons que plusieurs symboles de la logique mathématique — ceux d'implication et d'équivalence formelles, et peut-être ceux de conjonction, de disjonction et de négation — pourraient être introduits avec avantage, à propos de l'étude des équations et des inéquations, d'une façon progressive, naturelle, plutôt familière. Il va sans dire que, pour éclaircir les notions exprimées par ces notions, il serait toujours utile d'avoir recours à des exemples variés et à des modèles suggestifs, tels que ceux, bien connus, basés sur les propriétés des circuits électriques.

Il nous semble d'ailleurs important que les élèves s'habituent à considérer les équations et les inéquations comme des cas particuliers de «conditions» (ou «fonctions propositionnelles»), et à employer les attributs «possible», «impossible», «universel», «déterminé», à propos de conditions de nature quelconque. Quant aux symboles par lesquels on exprime ces attributs — les quantificateurs — il serait peut-être prudent de ne pas

les introduire tout de suite et d'attendre encore quelque temps.

D'ailleurs, tout cet outillage logique trouverait un grand emploi, fort avantageux, dans l'étude de la géométrie rationnelle.

## 3. Notions générales d'application (ou fonction) et de groupe de transformations.

Comme tant de mathématiciens, nous pensons que l'étude de la géométrie rationnelle doit être orientée, d'une façon plus ou moins explicite, par les idées de transformation et de group de transformations. Mais ici encore nous sommes d'avis qu'il ne faut pas aller trop vite.

Comme introduction à l'étude de la géométrie rationnelle, il serait sans doute fort utile de faire une mise au point des notions déjà apprises sur l'algèbre des ensembles, et de donner ensuite la notion générale d'application (correspondance univoque), au moyen de plusieurs exemples, choisis surtout dans le domaine des connaissances communes. Un point fondamental serait celui de situer bien clairement les fonctions numériques, représentées par les expressions algébriques, comme cas particulier d'applications.

Mais il y a le problème de la terminologie: parmi les termes «application», «fonction», «transformation», «opération», «opérateur», etc., qui ont été employés souvent avec des significations à peu près équivalentes, il faudra en choisir un, comme désignation générique. Le terme «application», en français, et ses correspondants directs, dans les autres langues néo-latines, nous semblent désormais consacrés, dans ce groupe d'idiomes, par l'influence de l'école Bourbaki. Toutefois, le terme «transformation» a de fortes traditions en géométrie et il est, sans doute, très suggestif. Une solution serait d'employer ce terme comme synonyme de «application biuni-

voque d'un ensemble sur lui-même», suivant l'exemple de plusieurs auteurs (1). Mais nous nous demandons: Est-ce que cela ne limite pas trop la signification d'un terme dont le sens usuel est beaucoup plus large?

D'autre part, il ne faut pas oublier que, dans une telle initiation, la sobriété de terminologie et de symbolisme serait toujours à conseiller. Ce ne sera que très lentement que l'élève pourra s'habituer au langage extrêmement précis, mais souvent revêché, des mathématiques modernes.

En particulier, la notion de «produit» (ou «composée») d'applications devrait être introduite d'une façon peu abrupte, la plus spontanée possible, à propos des déplacements. C'est seulement après cela que l'on tâcherait de préciser cette notion, dans le cas général d'applications quelconques, avec force exemples. Quant à la notion de groupe de transformations, on l'introduirait a posteriori aussi, mais plus tard encore, après l'étude des similitudes.

On sait que tout groupe de transformations donne lieu à une relation d'équivalence, deux ensembles de points étant dits équivalents lorsqu'il existe une transformation du groupe appliquant l'un sur l'autre. Réciproquement, plusieurs des relations d'équivalence qui se présentent en géométrie — égalité (ou congruence), similitude, parallélisme, etc. — sont engendrées de cette façon par des groupes de transformations. Rien n'empêche, évidemment, que ces relations soient étudiées avant de considérer les groupes sous-jacents. Mais il serait essentiel d'établir le lien entre ces deux types de notions, après avoir introduit la notion de groupe.

Une autre notion importante, qui se présente dans cet ordre d'idées, est celle de vecteur, comme classe d'équivalence de

segments orientés équipollents. C'est là un excellent prétexte pour faire accepter la notion générale de groupe, dépassant le cas des groupes de transformations, et pour donner, en même temps, la notion d'isomorphisme, en profitant de l'exemple du groupe multiplicatif des translations, isomorphe au groupe additif des vecteurs.

#### 4. Logique mathématique, algèbre abstraite et statistique mathématique.

Dans les deux dernières années, l'enseignement des mathématiques devrait, à notre avis, être séparé en deux branches distinctes:

Dans l'une de ces branches, on donnerait les éléments de trigonométrie, géométrie analytique et analyse infinitésimale, nécessaires dans l'enseignement secondaire, présentés sous une forme à la fois intuitive et rationnelle, avec le souci des applications concrètes, d'une part, et de la rigueur logique, d'autre part, de façon à éviter soit un formalisme stérilisant, soit des vices de pensée qu'il serait difficile de déraciner ensuite.

Dans l'autre branche, à caractère beaucoup plus philosophique, il s'agirait de faire réfléchir sur des idées acquises dans les années précédentes, et de les compléter, en les érigeant en système. D'abord en ferait une étude, plus ou moins développée, de la logique mathématique (y-compris la théorie des classes et des relations), *destinée à remplacer, complètement, la logique formelle des cours classiques de philosophie*. Ensuite, on s'occuperait des fondements de l'arithmétique et de la géométrie, et on donnerait une vue panoramique des mathématiques modernes, en présentant diverses types de structures et quelques éléments d'algèbre abstraite.

Comme application, il serait très intéressant d'expliquer l'intervention des opérations logiques dans le fonctionnement des *modernes machines à calculer*.

(1) Cf. par exemple «Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire», O. E. C. E.

Mais les mathématiques ne sont pas uniquement logique formelle. Pour aboutir à un enseignement équilibré, il est indispensable de soigner l'autre côté des mathématiques — celui qui concerne les rapports avec le réel concret. À cet effet, l'étude de l'analyse infinitésimale et de ses applications est déjà très utile, mais il n'est pas suffisant. Il faut absolument opposer au bloc «logique deductive» un bloc «logique inductive» basé sur le calcul des probabilités et la statistique mathématique. Dans cet ordre d'idées, il serait essentiel de commencer par la notion empirique, statistique, de probabilité, considérée comme faisant partie de la logique inductive. On pourrait ensuite parvenir, de façon naturelle, à l'axiomatique des probabilités, dans le cas fini, et à la résolution de problèmes élémentaires de probabilités;

l'outillage acquis de la logique mathématique rendrait bien facile cette étude. Cela posé, on donnerait des *idées* sur la distribution normale et sur les tests de signification, ainsi que sur leurs applications dans les recherches expérimentales. Enfin, on ferait une étude préliminaire de la régression, *linéaire ou non*; un des buts de cette étude serait de faire ressortir le caractère foncièrement statistique, contingent, de toute loi naturelle.

Cette deuxième branche de l'enseignement des mathématiques pourrait, avec avantage, s'étendre à tous les élèves des deux dernières années, en remplaçant une bonne partie de l'enseignement classique de la logique. Au contraire, la première branche devrait se limiter aux élèves qui veulent suivre les carrières scientifiques.