GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO III **N.° 11** JULHO - 1942

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / LARGO DO PÔÇO NOVO / LISBOA

SÔBRE A MANEIRA DE ESTABELECER A FÓRMULA DE TAYLOR

por J. SEBASTIÃO E SILVA (C. E. M. L.)

No ensino das matemáticas, deve sempre ter-se a preocupação de fazer surgir as noções dum modo perfeitamente natural. Consegue-se, por esta via, não só estimular as faculdades de investigação do aluno, como ainda reduzir consideràvelmente o papel da memória. Não é infelizmente assim que se procede muitas vezes: por exemplo, a maneira artificiosa e deselegante como é deduzida, na maioria dos tratados, a fórmula de Taylor, para funções duma só variável, contrasta singularmente com a simplicidade estética e sugestiva do resultado. Ora, no caso simples em que o resto assume a forma de Lagrange, é possível estabelecer a referida fórmula dum modo natural, como se pode ver em alguns livros. A dedução aqui apresentada não difere essencialmente da que vem exposta na excelente obra de Commissaire et Cagnac, «Cours de Mathématiques Spéciales», T. II; simplesmente, o modo como aqui é conduzida parece-nos mais aconselhável do ponto de vista didáctico.

Seja h um número real qualquer, diferente de 0, e $f(x)$ uma função real, de variável real, que, no segmento $(0,h)$, admite derivadas até à ordem n, inclusive. Proponhamo-nos resolver o seguinte probema: determinar um polinómio

1) $\quad p(x) \equiv a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdots+a_n x^n,$

de modo que sejam verificadas as condições

2) $\quad p(0)=f(0), \quad p'(0)=f'(0),$
$\quad p''(0)=f''(0), \quad \cdots \quad , p^{(n-1)}(0)=f^{(n-1)}(0)$

e ainda a condição

3) $\quad p(h)=f(h).$

De 1) deduz-se, fàcilmente, [1]

4) $\quad p(0)=a_0, \quad p'(0)=a_1, \quad p''(0)=2!\,a_2, \cdots,$
$\quad p^{(n-1)}(0)=(n-1)!\,a_{n-1}, \quad p^{(n)}(x)\equiv n!\,a_n;$

donde, atendendo a 2),

5) $\quad a_0=f(0), \quad a_1=f'(0), \quad a_2=\dfrac{1}{2!}f''(0), \cdots,$

$$a_{n-1}=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0).$$

Consideremos agora a função $\varphi(x)\equiv f(x)-p(x)$. Notemos que, em virtude da condição 3) e da primeira das condições 2), $\varphi(x)$ se anula para $x=0$ e para $x=h$; então, pelo teorema de Rolle, existirá, entre 0 e h, pelo menos, um número h_1 tal que $\varphi'(h_1)=0$. Do mesmo modo, a função $\varphi'(x)\equiv f'(x)-p'(x)$ anula-se, como acabámos de ver, para $x=h_1$ e, em virtude da segunda das condições 2), anula-se também para $x=0$; logo, pelo teorema de Rolle, ter-se-á $\varphi''(h_2)=0$, sendo h_2 um certo número compreendido entre 0 e h_1, portanto entre 0 e h. Continuando a raciocinar dêste modo, chega-se à conclusão de que existe, entre 0 e h, um número h_n, tal que

6) $\quad \varphi^{(n)}(h_n)=f^{(n)}(h_n)-p^{(n)}(h_n)=0.$

Mas, pela última das condições 2), tem-se $p^{(n)}(h_n)=n!\,a_n$; será portanto, em virtude de 6), $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(h_n)$ ou ainda $a_n=\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(\theta h)$, onde $\theta=\dfrac{h_n}{h}$ (tem-se $0<\theta<1$, visto h_n estar compreendido entre 0 e h). Daqui e de 5) resulta, finalmente, por substituïção em 1), e atendendo a 3),

$$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2!}f''(0)+\cdots+$$
$$+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\theta h).\ ^{(2)}$$

Obtivemos assim a fórmula de Mac-Laurin. Desta passa-se imediatamente para a fórmula de Taylor, fazendo $f(a+h)\equiv g(h)$, aplicando a $g(h)$ a fórmula de Mac-Laurin e notando que $g(0)=f(a)$, $g'(0)=f'(a), \cdots, g^{(n-1)}(0)=f^{(n-1)}(a)$, $g^{(n)}(\theta h)=f^{(n)}(a+\theta h)$.

Achamos razoável que se faça preceder a fórmula de Taylor, da fórmula dos acréscimos finitos, embora tal não seja necessário do ponto de vista lógico. Eis a ordem que se nos afigura mais conveniente: 1) estabelecer intuïtivamente a fórmula dos acréscimos finitos, por considerações quer de ordem geométrica (corda e tangente) quer de ordem física (velocidade média e velocidade verdadeira); 2) transformar a justificação anterior em demonstração analítica rigorosa, traduzindo em símbolos a imagem geométrica; 3) generalizar o resultado, passando à fórmula de Taylor; 4) tratar da aplicação desta fórmula ao cálculo de limites, à teoria dos máximos e mínimos e aos desenvolvimentos em série.

Recordaremos por último que a expressão encontrada por Cauchy para o têrmo do resto (incluída na expressão geral de Schlömilch) é utilizada nos cursos de análise, ùnicamente para legitimar o desenvolvimento em série inteira das funções $L(1+x)$ e $(1+x)^{\mu}$. Ora não há necessidade nenhuma de proceder dêste modo: é muito mais elegante e exige bem menor esfôrço de memória o processo adoptado, para êsse fim, na obra já citada, de Commissaire et Cagnac.

Devemos então insistir em velhos métodos?

---

(1) Não vemos necessidade de pormenorizar esta passagem.

(2) É claro que θ ficará a ser uma função de h.