GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO III **N.° 12** OUTUBRO - 1942

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / LARGO DO PÔÇO NOVO / LISBOA

A TEORIA DOS LOGARITMOS NO ENSINO LICEAL

por J. Sebastião e Silva (C. E. M. L.)

«Tem-se desenvolvido e espalhado muito o conhecimento dos logaritmos, a tal ponto que já os alunos manejam as tábuas de logaritmos *e delas se utilizam para o cálculo prático; há contudo estabelecimentos de ensino (no meu tempo era isto o normal) em que nada se diz de como se construem essas tábuas. Não podemos deixar de condenar êste facto, inspirado no mais baixo utilitarismo e contrário a todo o princípio de elevada pedagogia».*

(F. Klein, «Matematica Elemental desde un punto de vista superior», tradução espanhola de R. Araújo, p. 194).

«... não deve estranhar-se, nem parecer casual, que um homem como Leibniz, *pensador abstracto de primeira linha, mas dotado dum espírito eminentemente prático,*
pai da Matemática formal *e o* inventor da primeira máquina de calcular».

(F. Klein, obra citada, p. 22).

Para nós e para muitos, é indiscutível que a Matemática deve desempenhar no ensino liceal um papel essencialmente formativo. Pouco interessa que o aluno fique a conhecer muitos teoremas e os processos de resolução de muitas classes de problemas: o que importa, acima de tudo, é que êle tenha exercido as suas faculdades na demonstração dos teoremas e na resolução dos problemas; é que tenha adquirido o hábito de pensar ***matemàticamente***, quer estudando o desenvolvimento lógico das teorias, quer aplicando os factos estabelecidos à resolução de numerosas questões procedentes da realidade tangível. Exige-se, evidentemente, um mínimo de informação matemática, a aquisição duma técnica segura de cálculo elementar (numérico e algébrico); mas isso pouco deverá ser, comparado com o trabalho de criação dos hábitos de raciocínio, de abstracção, de disciplina mental, que distinguem a formação matemática. E é ainda manifesto que êsse mínimo de informação se refere quási exclusivamente aos alunos que vão seguir determinados cursos, enquanto os benefícios da formação matemática interessam à ***totalidade*** dos alunos.

Ora o estudo dos logaritmos constitui, há muitos anos, um dos assuntos capitais dos programas de Matemática dos liceus portugueses, e não nos parece plausível, ***por ora***, que se mude de orientação, suprimindo essa parte do programa. É possível, sim, que venha a reconhecer-se a necessidade de nêle introduzir o ensino de outros métodos expeditos de cálculo numérico, nomeadamente métodos mecânicos; mas isso mesmo não implicará a vantagem de excluir o ensino dos logaritmos. E não se deverá então deixar de ensinar, na medida do possível, o princípio teórico dêsses métodos — a não ser que o objectivo da Educação consista em formar autómatos, em vez de ***homens***. (Ver nota final).

Do ponto de vista informativo, parece-nos inatacável a inclusão dos logaritmos no ensino liceal — mas é do ponto de vista formativo que mais útil se deve considerar êsse estudo, pela oportunidade que oferece de pôr em evidência aspectos importantes do método matemático, dando uma idéia das suas admiráveis possibilidades. Não é portanto razoável que se faça predominar a feição prática, estreitamente utilitária, no modo de ensinar essa matéria, sem preocupações a respeito do seu enquadramento lógico no conjunto harmonioso das aquisições matemáticas.

E como se tem procedido, nêste assunto, entre nós? Costuma dar-se, é verdade, a demonstração de vários teoremas, relativos ao logaritmo dum produto, dum cociente, etc. etc. — mas todos nós sabemos quanto é precária a base em que vão assentar semelhantes demonstrações. É preciso ter a coragem de o afirmar: essa maneira de proceder não passa de pura mistificação, desde que se não tenha dado ao aluno uma noção conveniente de logaritmo. E o que temos visto fazer, neste ponto, é apresentar uma definição nominal, com a mais insensata despreocupação a respeito da existência das entidades definidas; isto é, sem ter o cuidado de mostrar que a equação $a^x=b$ admite solução, quaisquer que sejam a e b positivos. Por exemplo, segundo a definição, o logaritmo de 8 no sistema de base 2 é o expoente da potência a que se deve elevar 2 para obter 8: muito bem, êsse logaritmo é igual a 3. Mas qual é então o logaritmo de 2 no sistema de base 10? Aqui enveda-se pela via condenável do silêncio e do mistério: o aluno pode vir a saber, socorrendo-se duma tábua de logaritmos, que o logaritmo procurado é aproximadamente 0,30103; mas nunca lhe é dado penetrar nas altas razões que decidem ser êsse e não outro, o logaritmo decimal de 2, com cinco casas decimais. E é na mais santa ignorância do que sejam afinal os logaritmos, que o aluno se dará ao luxo de demonstrar belos teoremas sôbre essas entidades, de que êle sabe

tanto, quanto nós sabemos dos habitantes do planeta Marte!...

Não se pode negar que o problema é delicado. Parece que chegámos a êste dilema: ou renunciar de todo a uma teoria matemática dos logaritmos, contentando-nos com o ensino de regras mecânicas, de receitas a aplicar cegamente; ou sujeitar o inditoso jóvem a um estudo sério dos irracionais e das funções contínuas, para, sôbre essa base inabalável, erigir o soberbo edifício dos logaritmos. Ora é forçoso encontrar aqui uma saída, uma terceira hipótese menos cruel... [1]

Pois bem: nós cremos na possibilidade de resolver a questão, sem recorrer ao luxo duma exploração analítica do corpo real, e sem cair em mistificações escandalosas. Basta lembrar que os logaritmos foram inventados muito antes de Dedikind, Cantor e Weierstrass terem vindo ao mundo — e que não devemos acusar Neper de ter feito uma descoberta prematura...

Aqui a norma a adoptar parece-nos que deve ser esta: dar ao ensino uma orientação de tal modo natural, que o aluno seja levado a aceitar os factos *intuïtivamente,* [2] e com uma fôrça de convicção semelhante à que nos vem da demonstração rigorosa dêsses factos. A solução que vamos propôr não constitui pròpriamente novidade. Não. Achámos, contudo, nosso dever chamar a atenção das pessoas distraídas para uma solução aceitável, que, apesar da sua singeleza, tem andado imerecidamente oculta e desprezada.

Suponhamos que foi dada a definição usual de logaritmo dum número, relativamente a uma determinada base, e procuremos, armados com essa definição, calcular, por exemplo, o logaritmo decimal de 3. Trata-se portanto de achar um número k tal que $10^k=3$. Diga-se ao aluno: *se um número tal existe,* é natural que esteja compreendido entre 0 e 1, pois que $10^0=1$, $10^k=3$, $10^1=10$ e $1<3<10$ [3].

Dividamos então em 10 partes iguais o intervalo de extremos 0 e 1: os intervalos obtidos terão por extremos 0; 0,1; 0,2; $\cdots$; 0,9; 1. Em qual dêstes novos intervalos se deve encontrar k? Para o saber, basta comparar o número $10^k=3$ com cada uma das potências $10^{0,1}, 10^{0,2}, \cdots, 10^{0,9}$; mas isso equivale a comparar, entre si, as décimas potências dêsses números. Ora

$$3^{10}=[(3^2)^2]^2\cdot 3^2=6561\times 9=59049$$

e por outro lado

$$(10^{0,1})^{10}=10\,,(10^{0,2})^{10}=10^2\,,\cdots,(10^{0,9})^{10}=10^9\,.$$

Como $10^4<59049<10^5$, segue-se que $10^{0,4}<<10^k<10^{0,5}$ e portanto $0,4<k<0,5$. Assim, o logaritmo decimal de 3, *se existe,* deve encontrar-se entre 0,4 e 0,5. Tomando 0,4 para valor aproximado dêsse logaritmo, comete-se portanto (na hipótese de êle existir) um êrro por defeito inferior a 0,1: podemos então *convencionar* dizer que 0,4 é *o logaritmo decimal de 3 a menos de uma décima.*

Pretendendo calcular log 3 a menos de uma centésima, procederemos anàlogamente, dividindo o intervalo de extremos 0,4 e 0,5 em 10 partes iguais, e comparando $10^k=3$ com os números $10^{0,41}, 10^{0,42}, \cdots, 10^{0,49}$. Mas tem-se $3^{100}=(3^{10})^{10}\approx\approx(5,90\times 10^4)^{10}\approx 5,1\times 10^{47}$ [4] e, por outro lado, $(10^{0,41})^{100}=10^{41}, (10^{0,42})^{100}=10^{42}, \cdots, (10^{0,49})^{100}=10^{49}$; como $10^{47}<5,1\times 10^{47}<10^{48}$, será $10^{0,47}<10^k(=3)<<10^{0,48}$, donde $0,47<k<0,48$. Tem-se portanto, a menos de uma centésima, $\log 3=0,47$.

Anàlogamente se calculava log 3 a menos de uma milésima, etc. E agora que já o *descobrimos,* podemos reduzir o método às suas linhas estruturais, dando-lhe até maior generalidade: Seja a o número dado. Calculemos a sua potência de expoente p, sendo p um inteiro qualquer. Se fôr $10^n<a^p<10^{n+1}$, ter-se-á $10^{\frac{n}{p}}<a<10^{\frac{n+1}{p}}$ e, por-

[1] Como solução, já ouvimos propor que se voltasse ao ensino dos logaritmos a partir de duas progressões, uma aritmética e a outra geométrica, com os termos em correspondência biunívoca; mas nós achamos que dêste modo as dificuldades apontadas subsistem completamente, com acréscimo de inconvenientes.

Há dez anos fazia-se na 7.ª classe um estudo pretencioso das funções exponencial e logarítmica.

[2] Que nos perdôem aquêles para quem a palavra *intuïção* deixou de ter sentido e ainda aquêles para quem a intuïção matemática termina, onde os números irracionais começam.

[3] Supomos, evidentemente, que já foi demonstrada a proposição: «*Se* $a>1$ *e* $p>q$, *tem-se* $a^p>a^q$, *para* p *e* q *racionais*». Aqui, procura-se determinar log 3, como se êle fôsse racional. Veja-se que não se trata por enquanto de *demonstrar,* mas apenas de *investigar.* Só depois se colocará o aluno perante a hipótese da irracionalidade, sem que o resultado fique lògicamente comprometido. *Supomos aqui já definida potência irracional de expoente racional, mas não potência de expoente irracional.* É o estudo dos logaritmos que faz sentir ao aluno a necessidade de introduzir esta última noção.

[4] O sinal $\approx$ deve ler-se «*aproximadamente igual a*». Nestes cálculos, basta operar com valores aproximados; mas é necessário, evidentemente, fixar o número de algarismos significativos a conservar de cada vez, para que o resultado não seja comprometido. Patenteia-se aqui, uma vez mais, a necessidade premente de ministrar, nos nossos liceus, algumas noções sôbre cálculo aproximado — necessidade que, desgraçadamente, ainda não foi tomada em devida consideração.

tanto (se existe $\log a$), $\frac{n}{p} < \log a < \frac{n+1}{p}$. Para atingir depressa um expoente p bastante elevado, pode adoptar-se o processo de repetidas elevações ao quadrado, utilizando uma tábua de quadrados [5], que nada tem já de misterioso para o aluno. Com 10 consultas da tábua e uma divisão por 1024 — calcula-se um logaritmo com 3 decimais.

E... o problema da existência? Mas é evidente que êsse problema perdeu agora grande parte do seu interêsse prático, e mesmo lógico! O aluno encontra-se apto a determinar números k' que satisfazem *aproximadamente* à condição $10^{k'}=3$, com um êrro tão pequeno, *quanto êle quiser;* isto é, números k', tais que a potência $10^{k'}$ seja tão *próxima* de 3, *quanto êle quiser.* E não é isto suficiente nas aplicações ao mundo físico? Não sabe o aluno já que, nessas aplicações, os números exprimem medidas, irremediàvelmente sujeitas a êrro? Que significado pode ter, por exemplo, num resultado, um êrro inferior a uma décima de milímetro, quando o processo de medição utilizado é insuficiente para distinguir grandezas inferiores a êsse limite? E tôda a teoria dos logaritmos pode ser adaptada a êste novo modo de encarar o assunto, sem cometer a mínima falta em relação à lógica. Bastará, então, estabelecer os teoremas, só no caso em que logaritmos são racionais, e mostrar ao aluno como, aplicando êsses teoremas, se pode fazer o cálculo logarítmico dum produto, dum cociente, etc., com um êrro inferior a um limite prèviamente fixado.

Mas também a atitude filosófica não deve ser desprezada, mesmo nesta fase de iniciação! É que, além do mais, há nessa orientação ainda um sentido prático, embora de outra ordem — uma utilidade que não se refere já às relações da Matemática com a Técnica, mas às necessidades intrínsecas da própria Matemática. Uma noção matemática impõe-se na medida em que é cómoda e fecunda — e êste princípio é verificado com o conceito de número irracional [6]. Tôda a Análise Matemática podia ser feita sem recorrer a tal conceito: simplesmente, os enunciados das proposições perderiam muito da sua luminosa simplicidade, quebrando-se aquela harmonia que não só lisonjeia o sentido estético, como também é condição de fecundidade. *Pràticamente,* não chegam a ser criados novos números — apenas é adoptada uma nova linguagem, que faz conceber como equivalentes a números, certas sucessões infinitas de números. E já isso representa alguma economia...

Tornemos agora ao cálculo dos logaritmos. Depois das considerações que foram feitas, é muito natural que o aluno sinta espontânea curiosidade em saber se as operações indicadas têm ou não um têrmo. Mesmo que esta sua curiosidade não seja então satisfeita (pode satisfazê-la mais tarde, em Aritmética Racional) ficará êle a conhecer os dois casos que se podem verificar, no cálculo do logaritmo dum número a, pelo método apresentado: a possibilidade ou a impossibilidade de encontrar, ao fim dum certo tempo, um número decimal k, tal que $10^k=a$; e terá aprendido a distinguir duas hipóteses, no segundo caso: a da periodicidade e a da não periodicidade da dízima obtida. Finalmente, virá a saber que, só na última hipótese, é impossível determinar um número racional k, tal que $10^k=a$; mas que, nesse caso, a sucessão dos números decimais (ou a dízima infinita) a que conduziria a aplicação indefinida do método indicado, define, *por convenção,* um número irracional λ, e que se tem, *ainda por convenção,* $10^\lambda=a$.

Mas não será preciso continuar a desenvolver êste ponto de vista. Resta-nos lembrar que, já antes do estudo dos logaritmos — a propósito dos radicais — o aluno tomou um primeiro contacto com o fenómeno da irracionalidade. E observações em tudo análogas às precedentes devem ser feitas acêrca da noção de raiz aritmética dum número.

Agora, outro aspecto da questão. Com as anteriores indicações e pouco mais, *fica o aluno habilitado a construir uma tábua de logaritmos:* — é tudo

cionada com o número de casas dècimais adoptado. Como exercício, não será preciso ir além de 3 ou 4

(5) Estas tábuas, muito úteis para abreviar os cálculos, no método dos mínimos quadrados e no método de Gräffe (equações algébricas), têm ainda interêsse pedagógico e prático por oferecerem uma possibilidade de calcular produtos, efectuando apenas adições, subtracções e divisões por 2 — com o emprêgo da fórmula $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$. No livro de J. Hoüel «Recueil de Formules et Tables Numériques», encontra-se a p. 62-65 (duas páginas apenas!) uma tábua de quadrados a quatro decimais — que permite ainda, sem grande trabalho, calcular quadrados de números com 8 algarismos significativos.

(6) Somos levados a aplicar aqui o critério de comodidade, de que H. Poincaré usou, mas também abusou, nas suas explicações.

Só no século XIX se reconheceu que os conceitos de número negativo, número irracional, etc., não obedecem a uma *necessidade lógica.*

dècimais: uma tábua para 4 decimais não ocupa mais de duas páginas duma tábua vulgar. Mesmo que o aluno não chegue a construir uma dessas tábuas, ficará (e é isto o fundamental) a ter a legítima convicção de que *seria capaz de a construir, se tanto quisesse,* — e dêste modo se evita o seu complexo de inferioridade perante um instrumento que não se deve, positivamente a artes mágicas — que não foi criado por entes sobrenaturais, mas *por homens!* A construção efectiva duma tábua é na verdade uma tarefa maçadora, monótona, mas isso também não constitui razão para a condenar. Perigosa educação a que leve ao convencimento de que tudo se consegue na vida sem grande maçada! De-resto, êste trabalho é dos que se podem repartir por uma *équipe* de alunos, aplicando o salutar preceito do trabalho colectivo.

«Trabalho vão! Tempo perdido!» ouvimos clamar. «A trôco de alguns escudos, o aluno pode adquirir uma tábua de logaritmos na livraria mais próxima!» Mas — insistiremos — não se trata aqui de atingir uma finalidade prática imediata! Também, segundo êsse critério, cem por cento utilitário, será *inútil* que o aluno aprenda a improvisar, por exemplo, certos aparelhos de física (supondo que tem um bom laboratório à sua diposição, e que não tenciona especializar-se nêsse género de construções) — e, não obstante, o prazer que fruïrá, trabalhando com os *seus* aparelhos, é um dos mais poderosos agentes de que pode socorrer-se a bôa pedagogia.(7) Êsse prazer tem algo de semelhante à emoção que se apodera do investigador (pensamos em Pasteur, neste momento ...), ao pressentir o êxito das suas pesquisas — mesmo que daí não venha a resultar nada que possa exprimir-se em unidades do sistema monetário Ai da Ciência, ai da Humanidade — se deixasse de haver gente *sonhadora,* capaz de sentir essa emoção!

Também se pode objectar que as tábuas logarítmicas de que nos servimos hoje não foram construídas pelo processo aqui apresentado, mas por outro mais expedito, que não se pode ensinar devidamente a alunos do liceu. Os anteriores argumentos servem ainda para nos defender desta objecção.

Resta-nos responder àquelas pessoas que se consomem em eternos cuidados, a respeito da extensão dos programas, incompatível com a saúde preciosa da juventude que se bate... por um diploma. — É evidente que, ao preconizar a introdução de uma nova matéria, não se exclui a hipótese de compensar êsse acréscimo, sacrificando outra parte, menos importante, do programa — e no nosso caso não será difícil descobrir, onde cortar... Não deixaremos, contudo, de lembrar humildemente êste humilde preceito: ***nunca se deve lamentar o tempo gasto em estabelecer sòlidamente uma noção fundamental.*** Mais até: ***há acréscimos que têm o valor de simplificações*** — princípio que só repugna a quem sofra de miopia intelectual. Tudo que sirva para elucidar — longe de constituir um pêso, uma sobrecarga — só contribui para suavizar a marcha... E — como diria êsse inimitável observador que é ainda M. de la Palisse — ***nunca se perde tempo num trabalho que oferece a garantia de chegar mais depressa ao fim.***

Nota: As considerações precedentes são, em grande parte, o produto da nossa legítima reacção, a várias críticas que nos foram dirigidas a propósito da nossa 3.ª interrogação, formulada na secção pedagógica do n.º 11 da «G. M.». Em especial, referir-nos-emos às observações feitas, no mesmo número, pelo Sr. Prof. Bento Caraça, com quem estamos em desacôrdo neste ponto — mas a quem apoiamos na enérgica atitude que tem mantido a favor duma reforma do ensino das matemáticas em Portugal. Algumas das suas observações acêrca do nosso ponto de vista referem-se à necessidade de ensinar, a alunos do liceu, o manejo da régua de cálculo, e à gradual substituïção dos logaritmos pela máquina de calcular. É interessante notar que F. Klein, na sua tão celebrada obra, a que temos aludido, depois de afirmar categòricamente que *nenhum aluno devia sair da escola sem ter manejado uma máquina de calcular* (cujo segrêdo nos revela, num exemplo típico), dedica um extenso e substancial capítulo ao ensino dos logaritmos... E que vem a ser, afinal, uma régua de cálculo? É ainda F. Klein quem no-lo diz: «... como se sabe, não é outra coisa senão uma *tábua de logaritmos com 3 decimais...*» (Aqui se vê ainda um belo exemplo de união da Matemática e da Técnica, da teoria e da prática!)

Finalmente, transcrevemos do artigo «Os logaritmos», publicado na secção «Antologia» do n.º 11 da «G. M.», a seguinte passagem: «*É uma vez os logaritmos inventados, êles conduziram a uma teoria dos limites, das exponenciais, dos indivisíveis, que vieram a ser os preliminares essenciais da criação da análise*».

Somos levado a crer que o Sr. Prof. Bento Caraça não reflectiu maduramente, ao escrever a sua nota, em que afirma o propósito, na verdade simpático, de iniciar a discussão à volta das nossas interrogações. Mas o que é um facto — e muito grave — é que os seus argumentos (?) se insinuaram fàcilmente no espírito duma extensa camada de leitores, alimentando erros e confusões, que é preciso a todo o transe desenraïzar.

---

(7) É absolutamente necessário que o aluno adquira a suficiente confiança em si, para que não se sinta mais como um estranho, um tímido visitante, um espectador inerte e mudo, no imenso domínio da Ciência.