GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO IV **N.º 13** JANEIRO - 1943

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO ESC. 5$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / LARGO DO PÔÇO NOVO / LISBOA

ACÊRCA DO ENSINO DOS LOGARITMOS

por J. SEBASTIÃO E SILVA

A Matemática constitue o instrumento que convém especialmente para tratar as noções abstractas de tôda a natureza e, neste domínio, o seu poder não tem limites. É por isso que um livro sôbre Física moderna, se não é puramente a descrição de trabalhos de experiência, deve ser essencialmente matemático.

(P. Dirac, *Quantum Mechanics*, 1930).

Todo o novo corpo de descoberta se apresenta com aspecto matemático, porque não existe outro guia que pudéssemos utilizar.

(C. G. Darwin, 1920).

I. A intervenção crescente da Matemática na vida moderna e a sua influência decisiva no progresso dos povos constituem realidades a que não podem manter-se estranhos os regimes de ensino. «*Se o Mundo não precisa dum número muito grande de professores de Matemática, precisa no entanto de muitíssimas pessoas que possam fazer uso inteligentemente da Matemática*». [1] Sim, é cada vez maior o número de profissões que, em países civilizados, requerem uma sólida cultura matemática, e a capacidade de aplicar *inteligentemente* a Matemática. Mas tal cultura e tal capacidade não se adquirem fàcilmente — é esta a verdade — sem uma preparação liceal, em que seja banida tôda a estreiteza de vistas tendente a formar *indivíduos automatizados na aplicação de receitas.*

A Matemática representa uma forma de linguagem que, dia a dia, se torna mais necessário aprender, no mundo em que vivemos. Essa linguagem não se limita já a modalidades particulares do pensamento abstracto: a sua universalidade tornou-se patente, desde a criação da Álgebra da Lógica. Vemos hoje a antiga ciência da «quantidade» invadir os mais distantes domínios da Ciência: a Biologia, as Ciências sociais, a Psicologia, etc. reclamam os serviços da Matemática — e novos ramos desta ciência têm de ser criados [2], outros

(1) Do artigo «Como estudar Matemática», publicado na revista *The American Mathematical Monthly*, e traduzido no n.º 12 da «G. M.».

(2) Um exemplo: a Álgebra da Genética. Como observa Ernst Mach, «o poder das matemáticas consiste em se absterem de todo o pensamento inútil, economizando admiràvelmente as operações mentais».

têm de ser desenvolvidos, para atender a múltiplas solicitações que partem do exterior.

Saber pensar e saber exprimir-se, matemàticamente, é uma necessidade que se vai alargando a um número crescente de pessoas, desde que a Ciência e Técnica passaram a condicionar a Vida e o curso dos acontecimentos, sôbre a face da Terra [3].

Todavia, estes factos não me cegam a ponto de não me deixarem ver que, entre os rapazes e as raparigas que freqüentam os liceus, há, relativamente, um grande número, que não virá a fazer uso efectivo de Matemática, exceptuadas aquelas rudimentares noções aritméticas de aplicação quotidiana. É verdade que, mesmo para êsses, o ensino da Matemática oferece vantagens indiscutíveis, não pelos conhecimentos que faculta, mas pelos serviços que presta na formação da inteligência. Mas também é manifesto que, para êsses alunos, a preparação matemática não exige tantos cuidados como para os outros — os que se destinam a determinados cursos científicos. Como proceder então, desde que o ensino tenha de ser feito em comum? A questão é delicada, sem dúvida. Mas o que desde logo se apresenta como um êrro e uma injustiça é que, para atender *exclusivamente* à primeira categoria de alunos fôssem privados os outros e, em especial, os bem dotados para a Matemática, de receber uma *sensata* preparação nessa disciplina, em anos preciosos da vida, quando geralmente se decide do seu futuro. Não estimular, *na medida do possível*, as aptidões particulares do aluno, parece-me longe de corresponder ao objectivo da Educação. Que vitalidade se deve esperar dum ensino, cujo nível seja regulado pelo que possa existir de comum às aptidões de *todos* os alunos? Não será êsse o modo mais eficaz e directo de contribuir para o triunfo da mediocridade? Sim, as escolas não têm por missão fabricar génios: mas também não se fizeram para matar vocações! [4] Que não seja igual o aproveitamento de todos os alunos em relação a uma dada disciplina, isso é apenas um facto minuciosamente previsto: na escala das classificações há lugar para vinte hipóteses... O que será então preciso, é estabelecer, com nitidez e justiça, o *mínimo* a exigir de cada aluno para a sua aprovação.

Ensino idêntico para todos, é um princípio talvez muito cómodo para o professor; mas, *para bem de todos*, há que substituí-lo por êste outro: *ensino que favoreça, tanto quanto possível, as aptidões de cada um.*

De resto, a especialização devia começar, a meu ver, já nos dois últimos anos do liceu, como se fazia antes de 1936; conviria mesmo ir mais longe do que então, estabelecendo maior número de ramificações. Êsses dois últimos anos teriam portanto um carácter pre-universitário.

Não quere isto dizer que se deva desprezar a cultura geral. Convém estimular, em certa medida, o interêsse por questões de ordem geral, e, sobretudo, favorecer hábitos de leitura. Mas não exageremos! Subsiste entre nós um culto perigoso do enciclopedismo, e da multiplicidade de aptidões — como se fôssemos felizes contemporâneos de Descartes ou de Leonardo de Vinci. Será preciso lembrar que não é êsse culto a maneira mais adequada de evitar o acréscimo de incompetência?

Eis como penso a respeito do problema do ensino liceal, e da posição que nêle deve atribuir-se à Matemática. E é pensando assim que julgo ser *homem do meu tempo, virado para os problemas do meu tempo e do meio em que vivo.*

II. Já muitas pessoas devem ter notado que, no programa dos nossos liceus, a Análise Matemática [5] ocupa um lugar modestíssimo, comparado com o que se concede à Álgebra e à Geometria. Tenha-se em vista, por exemplo, a extensão do programa de geometria do 4.º ano, e a imensa variedade de questões subtis a que dá origem, no 7º. ano, o trinómio do 2.º grau. E, contudo, é precisamente a Análise o ramo da Matemática que mais útil e fecundo se tem revelado; o que mais brilhante êxito alcançou até hoje na inter-

---

(3) Não é sòmente em nossos dias que se atribue à Matemática um papel central no ensino das ciências. Vejamos como, sôbre êste assunto, se pronuncia Michel Chasles: «*Mostra a História que os imperadores que encorajaram a cultura das matemáticas — fonte comum de tôdas as ciências exactas — são também aquêles cujos reinos foram os mais brilhantes e cuja glória foi a mais duradoura*».

(4) Tenha-se em vista o caso de Evaristo Galois. Trata-se, evidentemente, dum caso único na História. Mas a verdade é que êste exemplo veio lançar uma luz intensa e trágica sôbre os vícios dum sistema de ensino.

(5) Chamamos aqui Análise ao ramo de Matemática em que intervêm o conceito geral de função e o conceito de limite. Assiste-se, a cada momento, a rectificações de fronteira entre os diversos domínios da Matemática; assim, até há pouco, foi considerado como teorema fundamental da Álgebra uma proposição que pertence pròpriamente à Análise. Na Álgebra moderna, êsse teorema passou a um plano secundário.

pretação do universo físico.[6] Verifica-se, por outro lado, que, no sentido duma introdução à Análise, os radicais, os logaritmos e as funções circulares constituem uma rica provisão de material exemplificativo, direi mesmo, laboratorial, em que o aluno pode adquirir uma experiência preciosa no manejo da ferramenta matemática, e familiarizar-se com o ponto de vista da teoria das funções, muito diferente do ponto de vista algébrico. Històricamente, foi êsse estudo que levou os investigadores a «uma teoria dos limites, dos exponenciais, dos indivisíveis, que vieram a ser os preliminares essenciais da criação da Análise». Parece-me portanto um êrro lamentável que não se procure obter o máximo rendimento na utilização dêsses recursos; que não se passe a adoptar um critério mais *racional, mais desempoeirado,* no ensino dessas matérias.

Já em números anteriores da «Gazeta de Matemática», me referi à necessidade de introduzir, no programa dos liceus, o ensino de processos de cálculo aproximado. A técnica das aproximações, aliada ao uso de tabelas, gráficos e máquinas, representa o aspecto prático da Análise. É essa técnica que torna possíveis os serviços prestados pela Matemática às ciências de observação e de experimentação. Vem a propósito recordar um espectáculo que se repete com freqüência confrangedora nos nossos liceus (e até nas nossas universidades!): um aluno, chegado ao têrmo duma embrulhada de cálculos que para êle pouco significam, vem comunicar, cheio de mágua e confusão, que não obteve «resultado certo». Êste exemplo dá uma idéia de como, no nosso ensino, andam desligadas a teoria e a prática; não sòmente se dá um predomínio, que julgo excessivo, à parte especulativa, como ainda se estabelece uma classificação lamentável das matérias em «*conhecimentos teóricos* (coisas bonitas que não servem para nada)» e «*noçõezinhas práticas, úteis para a vida*».

III. ¿Será ou não possível dar a alunos do liceu, em condições de ser ùtilmente apreendida, uma noção intuïtiva de número irracional? Eu estou plenamente convencido de que tal é possível. Já no 1.º ano os alunos (normalmente crianças de 10 ou 11 anos) aprendem a desenvolver quebrados em dízima e observam que, em certos casos, a dízima gerada é infinita periódica; já no 2.º ano aprendem a calcular raízes quadradas a menos duma décima, duma centésima, etc., e podem saber que, no caso de o radicando não ser quadrado perfeito, a dízima gerada é ainda infinita, mas não periódica.[7] — ¿E, não será possível, depois disto, dar a alunos do 4.º ou 5.º ano uma idéia satisfatória de número irracional, mediante a consideração das dízimas infinitas aperiódicas?

Não esqueçamos, por outro lado, o partido que se pode tirar do apêlo à intuïção geométrica. Já se não trata, manifestamente, da *intuïção sensível.* Exige-se agora um pequeno esfôrço de idealização. Mas todo o indivíduo *normal* de 14 anos será capaz de realizar êsse esfôrço, na mesma medida em que é capaz de conceber a sucessão natural dos números inteiros. É preciso não perder de vista que, durante séculos, e ainda no tempo de Cauchy, os matemáticos se conformaram com uma teoria «sintética» dos números reais, inspirada na medição das grandezas contínuas, de que è protótipo o segmento de recta. Recordemos, por último, que foi o teorema de Pitágoras que proporcionou o primeiro contacto com a questão da irracionalidade.

De resto, tão difícil será fazer compreender, intuïtivamente, a um aluno do liceu, o que seja número irracional, como fazer-lhe compreender, pelo mesmo processo, o que seja limite duma sucessão convergente, no caso simples em que a sucessão é crescente ou decrescente (no sentido lato)[8] — e, contudo, ainda se não deixou de

[6] Deve registar-se que, sendo a mais útil, esta é também a parte da Matemática que maior interêsse filosófico apresenta. Nos seus alicerces, levantam-se curiosas dificuldades, que já divertiram os eleatas, e que reaparecem hoje, com um carácter mais agudo, nas rijas discussões provocadas pelo cantorismo.

[7] A demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ (o caso mais simples, entre os radicais) parece-me acessível a alunos do 4.º ou 5.º ano. Essa demonstração, apresentada a título de exemplo, constituirá um factor decisivo na preparação psicológica do aluno para o estudo da irracionalidade.

Por outro lado, também não será difícil imaginar uma demonstração, acessível a alunos dêsses anos, do teorema segundo o qual são aperiódicas as dízimas representativas dos números irracionais. Basta para isso recorrer à série geométrica (que era apresentada no 5.º ano, antes de 1936) e mostrar que tôda a dízima periódica se pode escrever sob a forma duma série geométrica. Não é portanto necessário transferir o assunto para a aritmética do 7.º ano. Um bom exemplo de aplicação da série geométrica é ainda fornecido pelo problema de Aquiles e a tartaruga.

[8] Neste caso será mesmo acessível uma definição rigorosa: «Consideremos uma sucessão de números (reais) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tais que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$. Então, se existir um número λ que verifique as condições: 1) λ é superior a todos os termos da sucessão; 2) nenhum número menor que λ é superior a todos os termos da sucessão — diremos que λ é o «limite da sucessão» e escreveremos $\lambda = \lim a_n$. Análoga definição para o caso em que

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots .$$

apresentar, com êxito, nos liceus, uma noção intuïtiva de limite, nem se desistiu de aplicar intuïtivamente essa noção ao estabelecimento de fórmulas de áreas e volumes, e até, por vezes, ao cálculo do número *irracional* π (definido por uma sucessão convergente, de que é deduzida a expressão do têrmo geral).

Não venho aqui defender a idéia de apresentar nos liceus uma teoria geral dos números irracionais, à Dedekind — porque, felizmente, ainda não perdi o sentido das realidades. Trata-se apenas (e já não é pouco) de levar o aluno a aperfeiçoar a sua intuição e a enriquecer a sua experiência, na resolução de *problemas escolhidos*, relativos a classes *particulares* de irracionais. Êsses problemas (que devem com freqüência referir-se a questões concretas) podem agrupar-se em duas categorias:

1) *Problemas de comparação.* Exemplos: Indicar que relação de grandeza se verifica entre $\frac{5}{3}$ e $\sqrt[3]{10}$; entre $1+\sqrt{3}$ e $\frac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; entre 1,2 e $\log_5 7$, etc.

2) *Problemas de aproximação.* Exemplos: Calcular, com n decimais exactas, o valor numérico das expressões: $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, 2\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}, 5-\log_2 3$, $2^{\sqrt{3}}$, etc.

A resolução dos problemas de qualquer destas classes depende, muitas vezes, da resolução de problemas da outra classe. Por exemplo, a comparação dos valores de $\sqrt[3]{5}$ e $1+\log_7 3$ depende do cálculo aproximado dêsses valores; e, por sua vez, êste cálculo exige a comparação de $\sqrt[3]{5}$ e de $\log_7 3$ com números racionais, nomeadamente com fracções decimais. É contudo evidente que, no caso da igualdade, o cálculo aproximado não mais nos levaria a uma conclusão. Assim, por exemplo, não é por cálculo aproximado que podemos saber se a igualdade $\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}=1+\sqrt{2}$ é ou não verdadeira.

Em casos simples, o critério de comparação reveste-se de carácter algébrico, e é fixado pelo *princípio da conservação das leis formais* (9). Por exemplo, a introdução das irracionalidades do tipo $\log_k a$ (a e k racionais; $k \neq 1$) deve fazer-se, tendo em vista a conservação duma das conhecidas propriedades de monotonia das potências, e, dêste modo, a relação de grandeza entre $\log_k a$ e um número racional r deverá ser idêntica ou contrária à que se verifica entre k^r e $k^{\log_k a} = a$, conforme se tiver $k > 1$ ou $k < 1$.

De resto, já os processos de cálculo da soma e do produto de dois números reais são determinados pelas respectivas propriedades de monotonia. O mesmo, exactamente, cabe dizer a respeito da potência de expoente irracional, cuja noção *intuïtiva* pode sem dificuldade ser apresentada no liceu, mediante problemas adequados de aproximação — *e, do ponto de vista lógico, será igualmente possível apresentar essa noção antes ou depois dos logaritmos, por muito que êste facto perturbe o senso-comum.*

Quanto aos problemas de aproximação, desde logo se descobre neles o inconveniente de conduzirem, geralmente, a cálculos muito laboriosos, sobretudo nesta fase em que, relativamente a operações irracionais, o aluno só conhece um processo particular de cálculo: o da extracção da raiz quadrada (10). Está então indicado o uso de tábuas numéricas (11), entre as quais não deveria figurar a de logaritmos, enquanto não tivesse sido exposta a respectiva teoria — para não inverter a ordem didàcticamente admissível (12).

Resumindo: deve conduzir-se gradualmente o aluno do campo algébrico para o campo topológico, procurando sempre colocá-lo numa situação análoga à do investigador. «*Os matemáticos não começaram por definir os números: trabalharam com êles*». (F. Osgood, *Functions of a complex variable*).

---

(9) Convém recordar que a aplicação dêste princípio compreende duas fases: 1) verificar que só *um* critério é possível, desde que se pretenda conservar uma dada propriedade; 2) averiguar quais das propriedades do anterior domínio subsistem no domínio ampliado e, portanto, quais as condições em que é legítimo operar sôbre os novos números. É manifesto que a segunda parte não pode ser executada no ensino liceal, porque tal exigiria uma análise lógica delicada e muito abstracta dos fundamentos da Àlgebra. Temos portanto de nos conformar com algumas verificações e, em tudo o mais, seguir os ensinamentos da evolução histórica.

(10) É preciso destruir entre os alunos a idéia preconcebida de que, sem o auxílio duma tábua de logaritmos, estão impossibilitados de fazer o cálculo de raízes de índice superior a 2; e também a idéia de que certos métodos são inadmissíveis em Matemática, só porque recorrem a tentativas. Convém lembrar-lhes que, até no processo usual da divisão, se empregam tentativas, e que, para efectuar uma simples operação racional, se faz uso de tábuas numéricas — que foram decoradas no ensino primário...

(11) Já no número anterior indiquei como se pode tirar partido das tábuas de quadrados.

(12) O que me parece em particular indispensável é o ensino (que não se faz nos nossos liceus) de processos para a cotação dos erros que se cometem nos cálculos numéricos, quando efectuados com o auxílio da tábua de logaritmos.

Particularmente importante me parece chamar a atenção do aluno para o facto de que a noção de «irracional», a noção de «contínuo», a noção de «infinito» são desprovidas de significado experimental. O que não impede que tais noções tenham proporcionado à Matemática a maneira mais cómoda e mais fecunda de ser útil às ciências experimentais [13].

III. A «resposta» do Sr. Prof. Bento Caraça às minhas considerações, publicadas no precedente número da «Gazeta de Matemática», parece-me insistir demasiado em aspectos puramente secundários do problema discutido. Não obstante, a leitura da referida «resposta» (secção V) levou-me à conclusão de que o autor não está longe de concordar comigo: — o método que preconizo para apresentar nos liceus a noção de logaritmo, parece não lhe repugnar, desde que seja exibido com a indumentária, *mais económica*, das progressões aritmética e geométrica. Sim, porque se trata apenas duma diferença de *forma!* E quer por uma forma quer pela outra, o resultado é o mesmo, inevitávelmente o mesmo: — *desde que tenha compreendido realmente a definição, o aluno fica «ipso facto» habilitado a construir uma tábua de logaritmos!* Não será então o mesmo saber o que é logaritmo, e saber construir uma tábua de logaritmos?! Pois eu tenho de confessar que só muito difìcilmente consigo distinguir as duas coisas. Bem sei que se consegue muitas vezes, em Análise, demonstrar a existência duma função, definida num certo intervalo, sem que tal demonstração forneça qualquer meio de *construir* a função — mas tal não é o caso da função logarítmica. E, ainda que se tenha imaginado, (embora eu não a conheça) uma definição de logaritmo, puramente existencial, idealista, à Zermelo, estou convencido de que *ninguém, com o sentido das realidades, hesitaria* em substituí-la por uma *definição construtiva*, no puro sentido da escola intuïcionista [14].

Pode também acontecer que o processo de construção sugerido por uma demonstração de existência conduza a cálculos tão laboriosos que seja pràticamente impossível utilizá-lo. Mas tal não sucede ainda com o método elementar que sugeri (mas que não pretendo ter descoberto!) para o cálculo directo dos logaritmos, o qual se encontra implícito na própria definição de logaritmo, *qualquer que seja a forma de que esta se revista*. Êsse método não difere essencialmente (o que não admira) do que permitiu a Briggs construir as suas tábuas de 14 decimais [15], e que F. Klein considera mais potente do que o método usado pelo inventor dos logaritmos. Além disso, eu tive o cuidado de lembrar o recurso da tábua de quadrados, que reduz enormemente a dificuldade dos cálculos. E, depois, há um facto que não se pode negar, porque se impõe com tôda a fôrça da evidência: — é a simplicidade quási infantil do método que sugeri. [16] Até, para evitar dúvidas, o reduzi às linhas essenciais: «*Seja* a *o número dado. Calculemos a sua potência de expoente* p, *sendo* p *um inteiro qualquer. Se fôr* $10^n < a^p < 10^{n+1}$, *ter-se-á* $10^{\frac{n}{p}} < a < 10^{\frac{n+1}{p}}$, *e portanto* $\frac{n}{p} < \log a < \frac{n+1}{p}$». Dêste modo se consegue fazer o cálculo directo de $\log a$ com um êrro inferior a $\frac{1}{p}$.

Pois bem: foi o processo tão simples e inocente, condensado nas breves palavras anteriores, que me pôs em risco de ser apedrejado, como algoz das «pobres massas académicas»!...

Há um ponto que particularmente me interessa esclarecer. Não é verdade que eu tenha afirmado categòricamente: «Deve-se *obrigar* o aluno a construir uma tábua de logaritmos». Sôbre êste ponto a minha opinião ficou nìtidamente formulada: «*Mesmo que o aluno não chegue a construir uma*

---

[13] Até no Cálculo das Probabilidades, cujas aplicações se estendem hoje às ciências biológicas, sociais, económicas e psicológicas, se reconheceu a vantagem de substituir, em muitos casos, a variável discreta pela variável contínua.

[14] A função logarítmica pode também ser definida a partir da conhecida equação funcional $f(xy)=f(x)+f(y)$, juntando-lhe a condição de continuïdade. (Em linguagem moderna: «Diz-se logarítmica tôda a função que estabelece um isomorfismo algébrico e topológico, entre o grupo multiplicativo dos números positivos e o grupo aditivo dos números reais»). Mas, ainda neste caso, é construtiva a correspondente demonstração de existência.

[15] Êste método pode apresentar se do seguinte modo: *Seja* a *um número compreendido entre* 1 e 10; *para saber se o seu logaritmo está compreendido entre* 0 *e* $\frac{1}{2}$ *ou entre* $\frac{1}{2}$ *e* 1, *basta comparar* a *com* $10^{\frac{1}{2}}$. *Suponhamos que* $\log a$ *se encontra no intervalo* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$: *para saber agora se está compreendido entre* $\frac{1}{2}$ *e* $\frac{3}{4}$ *ou entre* $\frac{3}{4}$ *e* 1, *procede-se anàlogamente, comparando* a *com* $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt{\sqrt{1000}}$; *e assim sucessivamente*. Não será difícil reconhecer que, no fundo, êste método não difere daquele que defendo.

[16] As minhas considerações não teriam sido tão longas se eu tivesse como propósito exclusivo expor secamente o método em questão.

trar que, se fôr N um número inteiro, que não seja potência de expoente inteiro de 10, não existe nenhum número racional r tal que $10^r = N$ [19]. Depois disto, a questão pode ser apresentada nos seguintes termos: «Se não existe em todos os casos um tal expoente, no campo racional, vamos introduzir números irracionais dum modo adequado para que o problema seja sempre possível, ou, o que é equivalente, vamos ladear a dificuldade de modo que o resultado seja pràticamente atingido». E tudo o que vier em seguida será a execução directa e sistemática dêste plano.

A Matemática não se constrói dum bloco... E é bom que o aluno se habitue a considerar esta ciência como um «evoluir» e não como qualquer coisa de acabado e perfeito; como «obra de homens e para homens», em que êle mesmo poderá vir a colaborar, e não como generosa dádiva de deuses. Só assim o «carácter convencional de tôda a definição» matemática deixará de repugnar ao espírito do principiante, porque foi preparado o terreno psicológico, favorável à aceitação de tais convenções, *adaptadas a um certo fim.* Só dêste modo se conseguirá pôr têrmo à lenda, que se criou, da aridez e do tecnicismo estreito da Matemática. Só então deixaremos de ouvir a pessoas *cultas* esta impertinente pregunta: «¿Pois ainda há que descobrir em Matemática? A Matemática não é então um assunto esgotado?» De semelhante estado de espírito é grandemente responsável a orientação que tem predominado no ensino desta disciplina. Só utilizando, como aconselha Klein, o método *intuïtivo* e *genético,* será possível evitar as tão freqüentes atitudes de incompreensão e, mesmo, de rebelião, a respeito da Matemática, e despertar no aluno o amor desta ciência. Tem-se afirmado que a aplicação *integral* dêsse método tornaria o ensino demasiado lento. Embora seja a experiência que, neste ponto, deva ditar a última palavra, eu creio que só de comêço haveria uma aparente perda de tempo — perda que seria depois amplamente compensada pelo *à vontade,* a consciência e o interêsse com que o aluno passaria a encarar os diferentes assuntos. E em tudo isto, a *intuïção,* que desempenha um papel dominante, como guia poderoso, na fase da redescoberta, cederia depois o lugar a uma *lógica rigorosa,* na consolidação dos resultados. É claro que tal aperfeiçoamento lógico não será sempre possível ou vantajoso, no liceu — mas acontece que muitas vezes é possível, e fácil, e proveitoso. Nos casos restantes, devemos conformar-nos com a base intuïtiva — que, no ensino da Matemática, é seguramente preferível a uma base autoritária e, ainda mais, a uma base de mistificação.

Eu sei o que muitas pessoas, com prática de ensino secundário (devo dizer que também tenho alguma) costumam responder a observações semelhantes às anteriores: «Fantasias! Tudo isso é muito bonito, mas a verdade é que os alunos são incapazes de acompanhar um ensino com êsse nível. A *pràticazinha* desfaz muitas ilusões!» Tese na verdade muito cómoda, mas tese desanimadora — tese perigosa! É pouco lisonjeira para os estudantes portugueses. (Mas serão incapazes *todos* os alunos? E, vendo bem, onde estará muitas vezes a incapacidade?) Fantasia, sonho, delírio — essas palavras não me assustam: já as conheço bem. São palavras que se fazem ouvir, tôdas as vezes que é preciso incomodar S. Ex.ª, a Rotina.

(19) Êste teorema pode ser demonstrado dum modo extraordinàriamente simples, desde que se admita intuïtivamente um facto elementar.

NOTAS:

1.ª Não foi inconsideradamente que, no precedente número da «G. M.», tomei como escudo a opinião de Klein. Ao leitor menos informado, direi que Felix Klein (1849-1925) é geralmente considerado como um modêlo de matemático ligado à realidade. Foi enérgico defensor do *fusionismo,* isto é, da solidariedade entre os diferentes ramos da Matemática, e mesmo entre os diferentes ramos da Ciência. Neste sentido, as suas idéias revestem-se dum carácter nitidamente revolucionário. A obra de F. Klein (na Matemática e na Pedagogia) distingue-se por um vigoroso cunho de originalidade e juventude.

2.ª Sôbre a construção de tábuas de logaritmos, recomendo vivamente a leitura do livro de L. Hogben, *Les Mathématiques pour tous* (1939), no capítulo: «Comment furent découverts les logarithmes». Êste livro de Matemática para *todos* apresenta ainda um processo de construção de tábuas trigonométricas e três processos para o cálculo de π. Pouco práticos, estes inglêses!... Quantos são os alunos que, na vida *real,* se ocuparão do cálculo de π?

3.ª O método que preconizo para a definição de logaritmo presta-se particularmente para uma demonstração *completa* do teorema relativo ao logaritmo dum produto, do qual se deduzem fàcilmente as restantes proposições da mesma teoria: *Sejam* a *e* b *números positivos dados. Se tivermos* $10^m \leq a^p \leq 10^{m+1}$ *e* $10^n \leq b^p \leq 10^{n+1}$, *sendo* p *um inteiro arbitrário, teremos também* $m/p \leq \log a \leq (m+1) p$, $n/p \leq \log b \leq (n+1)/p$, *donde* $(m+n)/p \leq \log a + \log b \leq (m+n+2)/p$. *Por outro lado, multiplicando ordenadamente as duas primeiras duplas desigualdades, temos* $10^{m+n} \leq (ab)^p \leq 10^{m+n+2}$, *donde* $(m+n)/p \leq \log (ab) \leq (m+n+2)/p$. *Assim, os valores de* $\log (ab)$ *e de* $\log a + \log b$ *pertencem ambos ao segmento* $[(m+n)/p, (m+n)/p + 2/p]$: *a sua diferença não pode exceder, em valor absoluto, o comprimento dêste segmento, ou seja,* $2/p$. *Teremos, pois:* $\log (ab) = \log a + \log b + \varepsilon$, *em que* $|\varepsilon| < 2/p$; *mas, como* p *é arbitràriamente grande, segue-se que* $\varepsilon = 0$ *e portanto* $\log (ab) = \log a + \log b$. Para maior generalidade, pode substituir-se 10 por k, designando por k a base do sistema.