
GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIV

N.º 55

AGOSTO 1953

S U M Á R I O

O Verdadeiro sentido do princípio da invariância da física
moderna
por *Ruy Luís Gomes*

Álgebras de Boole e análise de circuitos
por *M. S. Leavitt*

Exemplo de conjunto não mensurável à Lebesgue
Eslarecimento sobre o artigo publicado na G. M. n.º 51

Sobre o ensino da Matemática na Alemanha
por *J. Sebastião e Silva*

A Teoria das Distribuições

Movimento Científico

Contribuição Latino-Americana ao Progresso Científico — Segundo
Colóquio de Geometria Algébrica — A Matemática na Associação dos
Estudantes da Faculdade de Ciências — Congresso Internacional de
Matemáticos de 1954 — Noticiário — Congresso Internacional de Filo-
sofia das Ciências — Instituto dos Actuários Portugueses — Prémio
«Artur Malheiros» — Obras Completas de Élie Cartan.

Matemáticas Superiores

Pontos de Exames de frequência e finais — Matemáticas Gerais —
Soluções de Problemas propostos no número anterior

Problemas

Problemas propostos

Boletim Bibliográfico

Sobre o ensino da Matemática na Alemanha

por J. Sebastião e Silva

O alto nível atingido pelos estudos matemáticos na Alemanha, desde longa data, e maiormente no período em que sobressaem os nomes de GAUSS, RIEMANN, WEIERSTRASS, CANTOR e HILBERT, suscita facilmente a curiosidade de saber como é estruturado e conduzido o ensino da Matemática naquele país.

Não é que a forma, ou mesmo o espírito do ensino, cheguem para explicar um fenómeno que tem as suas raízes profundas na tradição e na maneira de ser do povo em que se manifesta. Não se trata aqui propriamente duma relação de causa e efeito, mas antes duma *correlação*; a fórmula será esta: ensino e actividade científica influenciam-se mutuamente, dentro de certos limites e geralmente a longo prazo.

Também não deve, por detrás daquela curiosidade, abrigar-se uma tendência no sentido de considerar tudo o que se faz *lá fora*, como perfeito e digno de ser reproduzido *cá dentro*, fielmente, sem prévia crítica ou reelaboração. Não há sistemas ideais de ensino, que convenham indiferentemente a todas as épocas e a todos os povos. No presente caso então, é preciso contar com profundas diferenças de psicologia, que obrigam a usar de prudência, quando se pense em transplantar dum campo para o outro uma dada norma pedagógica.

Mas também se não deve ir para o extremo oposto — que é o de fechar os olhos e o entendimento a tudo o que se passa no exterior, numa atitude de auto-suficiência própria das pessoas que têm medo excessivo das correntes de ar. É certo que vivemos aqui num extremo da Europa, «onde a terra se acaba e o mar começa», e onde, por isso mesmo, chegam enfraquecidos os ecos de algumas vozes; mas tal posição, se por um lado nos é vantajosa, e muito, também por outro lado oferece os seus inconvenientes, que importa corrigir.

Há ainda uma terceira tendência, que consiste em aceitar a tese da nossa incapacidade para a criação científica, com este corolário imediato: não precisamos de assimilar os métodos de trabalho, mas apenas a ciência criada pelos outros. Simplesmente, a tese ainda não foi demonstrada e, só deixando de pôr em prática o seu corolário, estaremos em condições de saber se é verdadeira ou falsa⁽¹⁾. O contrário é permanecer num círculo vicioso.

A mim parece-me que o estudo da organização do ensino em diversos países do mundo civilizado será sempre um trabalho útil e meritório, especialmente quando se trata — e é este o caso — dum povo que tenha dado um forte contributo para o avanço da ciência. Quanto à interpretação dos factos e às sugestões que eles possam oferecer, tudo isso pertence a uma outra ordem de considerações, a que, pelo menos de momento, não quero abalar-me. Procurarei, no que se segue, manter-me numa linha de objectividade, apenas cortada, aqui e além, por algum breve comentário.

Os dados que vão ser expostos não dizem respeito a toda a Alemanha, mas apenas aos dois estados que tive a oportunidade de visitar, num período de pouco mais de um mês⁽¹⁾ — o da Renânia (Rheinland-Pfalz) e o de Baden. Os elementos que me foi possível recolher não permitem pois, de nenhum modo, uma visão completa e nítida do assunto; subsistem muitas lacunas, vários pontos obscuros a esclarecer; além disso, tais elementos referem-se mais à forma do que ao espírito do ensino. Mas nem por isso me pareceu desprovido de interesse transmitir aos leitores da Gazeta de Matemática os resultados destas primeiras observações.

Ensino liceal⁽²⁾

Limitar-me-ei a uma rápida digressão neste campo, apenas para se ter uma ideia de como está alicerçado o ensino superior.

O ensino liceal no estado de Renânia (como, segundo creio, nos restantes estados da Alemanha ocidental) é distribuído por nove anos e ministrado em três tipos de escolas: o *liceu de línguas antigas* (Altsprachliches Gymnasium), o *liceu de línguas modernas* (Neusprachliches Gymnasium) e o *liceu científico* (Naturwissenschaftliches Gymnasium).

Consultando os «Lehrpläne für die höheren Schulen in Rheinland-Pfalz» (Programas para os liceus da Renânia) de 1951, observa-se desde logo que o quadro das disciplinas não varia grandemente dum para outro tipo de liceu: a diferença reside principalmente no número de tempos lectivos atribuídos a cada dis-

⁽¹⁾ Com bolsa do Instituto de Alta Cultura.

⁽²⁾ Traduzo aqui «Gymnasium» por «liceu», donde o adjetivo «liceal» aplicado ao ensino ministrado naquela categoria de escolas.

⁽¹⁾ Há sem dúvida casos isolados que contradizem a tese; o que não temos tido é uma verdadeira escola de investigação.

ciplina. Assim mesmo, a Matemática, que no liceu científico dispõe de 4 horas por semana em cada um dos nove anos, sofre apenas a redução duma hora a partir do 4.º ano, em qualquer dos liceus literários.

No liceu científico, uma só disciplina supera a Matemática no total dos tempos lectivos: é o Alemão, que nos dois primeiros anos absorve 6 horas lectivas por semana, passando ao regime das 4 horas nos anos seguintes.

Quanto às restantes disciplinas de carácter científico, a distribuição de tempos lectivos por semana é a seguinte (no liceu científico):

Física: 2 no quarto ano e 3 em cada um dos seguintes.

Química: 2 desde o quinto ao nono ano.

Biologia: 2 em cada um dos nove anos.

Todas as disciplinas pertencentes ao grupo das letras (Alemão, Latim, Francês, História, etc.) acompanham as disciplinas de ciências até ao último ano, sem qualquer espécie de ramificação. (Neste particular, parece-me preferível, *para nós*, o sistema actualmente em vigor nos nossos liceus; em todo o caso, creio que nos seria vantajosa a continuação do estudo das línguas vivas, pelo menos o de inglês ou alemão, ⁽¹⁾ nas secções de ciências).

O objectivo fundamental do ensino da Matemática nos liceus alemães é *desenvolver no aluno aptidão para o pensamento matemático autónomo* (aqui «autónomo» está a traduzir «selbständig», no sentido de «não-mecanizado»). Para tanto, considera-se fundamental, não só dirigir o ensino no sentido da clara formação dos conceitos, da expressão exacta e da dedução lógica, mas ainda habituar o aluno a fazer uso inteligente do método matemático na interpretação do mundo físico.

O programa de Matemática atribuído a cada ano (refiro-me sempre ao estado da Renânia) é relativamente moderado, o que permite fazer em ensino cuidadoso e torna possível uma boa assimilação dos conceitos. Em todo o caso, como é natural, consegue-se ir mais longe do que entre nós. Os dois últimos anos são dedicados ao Cálculo infinitesimal e à Geometria analítica (plana).

(¹) A expansão do idioma inglês no mundo de hoje torna cada vez mais desejável que (sem descurar o ensino do francês) o estudante saia do liceu com a possibilidade de, pelo menos, redigir em inglês um trabalho científico. Por outro lado, a completa ignorância do alemão continua a ser um «handicap» para quem, nos ramos científicos, procure manter-se «au point». Quem escreve estas linhas beneficiou de dois anos de alemão no curso complementar de ciências (anos lectivos de 1931-32 e 1932-33) e só hoje sabe avaliar quanto lhe foi útil esse breve estudo — bem mais útil do que a absorção forçada duma considerável massa livreira de conhecimentos científicos. As enciclopédias são sempre de fácil consulta, principalmente quando se conhecem várias línguas...

No 8.º ano faz-se uma introdução ao Cálculo diferencial, que se prolonga até à teoria dos máximos e mínimos e ao estudo geral do gráfico duma função (casos simples), com aplicações à Geometria e à Física; segue-se um estudo pormenorizado da função inteira do 3.º grau.

No 9.º ano, após um breve complemento de cálculo diferencial, relativo às funções e^x e $\log x$, faz-se uma introdução ao Cálculo integral, que se concretiza nos seguintes tópicos: o integral definido como limite de somas de RIEMANN; áreas positivas e áreas negativas; a área dum trapezóide como função do limite superior de integração; teorema fundamental do cálculo integral; a integração como operação inversa da derivação; integrações simples com aplicação ao cálculo de áreas de superfícies planas e de volumes de sólidos; a integração segundo o método geral de substituição (pequeno grau de dificuldade); aplicações do integral a questões simples da Física.

Quanto à geometria analítica, o programa inclui, além do que entre nós costuma ser ensinado, uma teoria elementar das cónicas (polo e polar, diâmetros conjugados, representação paramétrica, propriedades ópticas, a elipse como imagem afim da circunferência etc.); no final, é prescrito o estudo de lugares geométricos e o emprego do método analítico-algébrico em demonstrações geométricas de dificuldade média.

A trigonometria (plana) é ensinada integralmente no 7.º ano. Mas nota-se em todo o programa a ausência da Aritmética racional ⁽¹⁾ e daquele estudo da equação de DIOFANTO que é tanto do agrado dos autores dos nossos programas.

A cúpula dos estudos é pois formada pelo Cálculo infinitesimal e pela Geometria analítica, atendendo a que são esses os instrumentos que, desde o Renascimento, justificam o tão celebrado êxito da Matemática, nas aplicações às ciências físicas e à técnica.

Resta-nos finalmente assinalar, no programa do 9.º ano, alguns assuntos de *carácter optativo*: trigonometria esférica, séries, método de aproximação de NEWTON, análise combinatória e fórmula do binómio, rectificação, etc.

Porém, as anteriores considerações referem-se apenas a programas. É sem dúvida de todo o interesse conhecer o quadro formal em que vão inserir-se os dados concretos; mas falta depois o mais importante — que são precisamente esses dados.

(¹) Passa-se isto num país em que as investigações aritméticas ocupam de há muito, um lugar privilegiado. Era GAUSS quem dizia: «A Matemática é a rainha das ciências, e a Aritmética a rainha das matemáticas». Ainda hoje, com a escola de HASSE, o estudo da Teoria dos números se encontra em pleno florescimento na Alemanha.

Como é na realidade conduzido o ensino? Quais os métodos seguidos?

Bem desejaria eu estar em condições de responder a tais perguntas. Mas um mês de permanência num país que se visita pela primeira vez—país, ainda por cima, tão diferente do nosso—é muito pouco, quase nada, para poder afoitamente falar sobre este assunto. Todavia, à falta de melhor, as impressões colhidas sobre as páginas de alguns textos de Análise, completadas com referências ouvidas directamente, podem talvez dar uma primeira indicação, que valha a pena registar aqui.

Dos livros que folhee, ficou-me esta idea inicial: a orientação adoptada no ensino da Análise é de índole acentuadamente intuitiva, procurando-se dar a *gênese* psicológica dos conceitos e a sua *finalidade* prática («donde vêm e para onde vão»), através de numerosos exemplos, citações históricas e aplicações concretas, constantemente referidas à existência do homem no mundo físico e no agregado social (todos os textos fecham com um sugestivo capítulo sobre Cálculo das probabilidades e Estatística).

Deste ponto de vista, os livros que examinei são na verdade notáveis, generosamente adubados de intuições e de imagens, com um bom recheio de exercícios—e alguns deles apresentados com óptimo, aliciente aspecto gráfico. Influência especial das ideas pedagógicas de FELIX KLEIN? Reflexo de modernas correntes filosóficas, de raiz mais ou menos hegeliana?

Em qualquer hipótese, seja-me permitido um reparo pessoal. Julgo—sempre baseado no exame dos referidos textos—que se vai demasiado longe nesta reacção intuitivista (direi mesmo *pragmatista*), deixando prejudicado um outro aspecto que, desde os bons tempos helénicos, caracteriza por definição a Ciência: o aspecto racional. Refiro-me especialmente à maneira como se decide tratar a teoria dos limites (1).

É certo que, na Universidade, virá depois a desforra—numa viragem brusca, que leva quase ao extremo oposto—com todos os recursos de que se dispõe num país onde a análise lógica dos fundamentos da Matemática foi conduzida ao último grau de subtilidade. É também certo que NEWTON, LEIBNITZ, EULER, LAGRANGE e outros mais não precisaram de saber consciencie-

mente o que é «limite», para construirem o edifício grandioso da Análise.

Mas muito haveria que dizer sobre este ponto—e já avancei demasiado num campo em que, repito, não disponho de dados suficientes.

Ensino universitário

A passagem do liceu para a universidade caracteriza-se por uma radical mudança de ponto de vista. Um dos objectivos essenciais do ensino universitário é o de conduzir aos modernos problemas e, mais ainda, à *moderna forma do pensamento matemático*; de maneira que o aluno se verá colocado, não só perante matérias novas, mas ainda—e é isso o mais notável—perante novos processos mentais, de natureza bem mais elaborada. Ao mesmo tempo, a sua atitude para com a ciência deixará de ser a de passivo espectador, para tender progressivamente, à de participante.

A organização dos estudos difere profundamente da que se observa nas universidades portuguesas e não obedece a um modelo único para as diversas universidades. Um primeiro ponto a assinalar é este: *todas as cadeiras são semestrais*. No princípio de cada semestre, a universidade publica uma lista dos cursos e seminários a realizar nesse semestre, com os respectivos horários e a indicação dos professores que os regem. A razão deste facto está em que variam de semestre para semestre, de ano para ano, de universidade para universidade, os cursos professados ou, pelo menos, a orientação seguida em certos cursos. Esta ampla variabilidade dos estudos é apenas um sintoma do alto nível do ensino ministrado nas universidades alemãs.

Porém, na massa movediça dos cursos, destaca-se um núcleo rigidamente estável, constituído não só por aquelas disciplinas—tais como o Cálculo infinitesimal, a Geometria analítica, a Teoria das funções analíticas e a Teoria das equações diferenciais—sobre as quais se firma necessariamente todo o ramo da Matemática aplicável às ciências da natureza, mas ainda por aquelas outras disciplinas que se consideram indispensáveis à cultura geral dum matemático, isto é: a Álgebra superior (incluindo a Teoria dos grupos e a Teoria de GALOIS) e a Geometria diferencial (4). Observe-se entretanto como é larga esta base de cultura geral.

(1) Admite-se na Alemanha que o conceito de limite é demasiado melindroso para que possa ser desenvolvido com rigor lógico nos liceus. Mas parece-me isto exagerado, sobretudo quando penso que, nos liceus alemães, o Cálculo infinitesimal é ensinado normalmente nos anos que correspondem aos dois primeiros das nossas universidades. Por outro lado, ouvi emitir a opinião de que a teoria dos limites, assim ensinada, cria hábitos mentais que é depois difícil desenraizar na Universidade:

(4) Estes dados, como outros aqui expostos, foram extraídos directamente do artigo do Prof. W. Süss «Das Studium der Mathematik», publicado num «guia do estudante» fornecido pela Faculdade de Ciências da Universidade de Friburgo (na Floresta Negra).

Mas o objectivo dos estudos universitários não se limita, de nenhum modo, à formação duma *cultura geral*. É finalidade última das universidades (sem a qual perderiam o direito a esse nome) conduzir a um *campo de especialização*, através do qual o estudante possa rapidamente atingir as *fronteiras do conhecimento actual*, colocando-se em condições de poder contribuir, ele mesmo, para o progresso da ciência. Ora o campo de especialização é oferecido justamente pelos cursos de carácter mais ou menos variável; o aluno deverá, após os 3 ou 4 primeiros semestres, escolher livremente alguns desses cursos, de acordo com as suas inclinações, mas sem restringir demasiado a amplitude da escolha.

Examinemos agora mais de perto o mecanismo do ensino universitário.

As lições dos já referidos cursos fundamentais são geralmente acompanhados de *exercícios*, cujo objectivo não é tão somente a formação duma técnica de cálculo (o que já em grande parte se fez no ensino secundário), mas ainda, e sobretudo, o esclarecimento dos conceitos teóricos e do seu mútuo encadeamento lógico, mediante a análise de questões adequadas, dispostas em ordem de dificuldade crescente, até quasi atingirem o nível de verdadeiros temas de investigação. Tais *exercícios* são propostos pelo professor durante as lições; ao aluno compete resolvê-los em casa e apresentar as respectivas resoluções ao assistente. Este tem por dever corrigir cuidadosamente, com observações à margem, todas as resoluções apresentadas; além deste trabalho, que lhe absorve cerca de dois dias por semana, as funções didácticas do assistente reduzem-se a duas horas lectivas por semana, durante as quais conversa com os alunos sobre a maneira como foram resolvidos os problemas e sobre a melhor maneira de os resolver. Em todo o tempo restante, o assistente deve, no seu próprio interesse, consagrar-se inteiramente ao trabalho de investigação, já que é esse o único caminho a seguir para ascender a posições mais elevadas na carreira universitária.

Porém, quando se entra na fase de especialização (após os 3 ou 4 primeiros semestres) o regime dos *exercícios* cede inteiramente o lugar a um outro, de categoria mais elevada: o dos *seminários*. O que se faz nestes «seminários» é, por via de regra, o seguinte: a cada aluno é distribuído um trabalho recentemente publicado, para que o leia, e o analise, e o interprete, recorrendo à bibliografia, geralmente extensa, que esse trabalho pressupõe; depois o aluno deverá, numa sessão do seminário, fazer uma exposição sobre o assunto, perante os seus colegas e o professor; no final, é feita uma crítica da exposição por parte dos presentes e pode gerar-se uma discussão tendente a

esclarecer as ideias expostas e porventura a levantar novos problemas.

Um primeiro resultado prático — o mais modesto, mas também o mais frequente — que consegue obter-se por tal processo, é o de ensinar o aluno o expôr correctamente assuntos de matemática; o que já é importante, se atendermos a que, geralmente, ele se destina à carreira do ensino.

Mas um outro objectivo mais alto costuma ser visado com o trabalho de seminário: o de estabelecer um vivo contacto com a frente da investigação actual para que, num ou noutro aluno mais bem dotado (as raras e preciosas excepções), venha revelar-se a vocação para a actividade criadora. Uma ideia, um súbito lampejo, basta muitas vezes para lançar o eleito no trilho aventureiro das investigações. Neste caso, o papel do professor terá de assemelhar-se um pouco àquele que Sócrates se atribui jocosamente no diálogo com Teeteto: o de ajudar a virem à luz as ideias.

Em tudo o que precede, ainda não foi usada uma palavra que parece obrigatória ao falar de ensino: a palavra «exame». Mas há que salientar desde já o seguinte: logo no primeiro contacto com as escolas alemãs, observa-se que os esforços estão muito mais dirigidos no sentido de *aprender* ou *ensinar* (conforme se trate de alunos ou de professores), do que para o reverso da medalha, que consiste em *prestar contas* ou *julgar*.

Todos nós sabemos que os exames são a parte ingrata (de certo modo negativa) do ensino; praticada em excesso, acaba por massacrar docentes e discentes, fatigando-os inutilmente, tirando-lhes a vontade para o trabalho construtivo, levando-os por vezes a execrar a ciência e os cérebros que a geraram⁽¹⁾. É evidente que se trata dum *mal necessário*, mas, por isso mesmo que é um *mal*, conviria reduzi-lo ao mínimo necessário.

Neste ponto, são para invejar os germanos, cuja psicologia lhes permite fazer um uso moderadíssimo dos exames. Por exemplo, na Secção de Matemática da Universidade de Mogúncia, são obrigatórios apenas os exames de fecho dos estudos (exames de licenciatura, ou *actos grandes*, como entre nós se diria); há também exames a meio dos estudos, mas esses são facultativos, *concedidos* aos alunos que desejem orientar-se acerca das suas possibilidades.

As provas orais têm geralmente lugar no gabinete

(¹) Sem esquecer que, muitas vezes, o exame faz uma selecção errada, colocando em primeiro lugar o aluno mais espectacular, mais expansivo, que não é geralmente o mais concentrado, o mais profundo.

do professor, em estilo de conversa, à volta duma mesa—apenas professor, assistente e aluno. É este último que, quando se sente habilitado, se dirige ao professor a pedir que lhe marque um dia e uma hora para ser ouvido. Medite-se um pouco na soma de energias nervosas que se economiza por tais processos!

Três são os rumos para os quais os estudos matemáticos podem ser orientados: *profissões liberais, magistério secundário e magistério superior*. De acordo com estas orientações, varia a duração dos estudos (entre 6 e 10 semestres) e a natureza dos exames de fecho.

A porta de entrada para a carreira do ensino superior é o exame de doutoramento. Neste caso, é exigido a apresentação duma *tese* que, por definição, *deve conter resultados novos, já que o conceito de ensino universitário engloba necessariamente o de investigação*.

Só as provas orais de doutoramento (pelo menos na Universidade de Mogúncia) costumam ser públicas, mas sem qualquer espécie de solenidade.

A parcimónia de exames, nas universidades alemãs é em grande parte compensada pelo sistema dos *exercícios* e dos *seminários*, por meio do qual o assistente e, mais tarde, o professor vão tomando conhecimento do aluno sob vários aspectos, sem o colocar na posição inferiorizante e desconcertante de «pessoa que se sente examinada».

Contra o sistema dos exercícios pode objectar-se que, sendo resolvidos em *casa*, não oferecem confiança.

Eis os termos em que ouvi responder a uma objecção deste tipo: «*Primo*, o aluno não tem qualquer interesse em se ludibriar a si próprio, permanecendo num curso para o qual não sinta aptidões ou não trabalhe o suficiente; *segundo*, o assistente, ao conversar nas aulas com os alunos, tem sempre maneira de se aperceber do grau de consciência com que foram resolvidos os exercícios». E não se pode dizer que não sejam aceitáveis estas razões.

Mas é sobretudo o trabalho de seminário que permite ao professor fazer um juízo sereno e acertado dos seus alunos, dando-lhe ainda aquela possibilidade preciosa de descobrir as verdadeiras vocações.

Finalmente, algumas palavras sobre a distribuição do trabalho lectivo em períodos de tempo.

As aulas do semestre de inverno começam em princípios de Novembro e terminam em fins de Fevereiro, com a interrupção de 15 dias para as férias do Natal. As aulas para o semestre de verão começam em princípios de Maio e terminam em fins de Julho, com a interrupção de 7 dias para as férias de Pentecostes. Parece pois, que ao todo, há *cerca de seis meses de férias, nada menos do que metade do ano*. Isto à pri-

meira vista torna-se chocante e, se não se tratasse dum país onde, notoriamente, o trabalho é a regra, não faltaria quem visse aí um autêntico escândalo. Porém a verdade é que, desses seis meses, só uma pequena parte, talvez um mês, costuma ser utilizada para efeitos de férias propriamente ditas. Em todo o tempo restante, os alunos dedicam-se ao estudo, com possibilidades de concentração e serenidade mental que não encontram nos períodos lectivos, demasiado sobrecarregados com aulas, exercícios, seminários, etc. (1); por sua vez, os professores meditam os seus cursos, preparam as suas lições e, mais importante do que tudo, *prosseguem as suas investigações pessoais*, condição «sine qua non» para estarem à altura das funções que desempenham.

É interessante verificar como, na Alemanha, se deposita confiança em professores e assistentes, sob vários aspectos, e em particular no tempo livre que lhes é concedido; para isso contribui, certamente, uma longa tradição, cimentada em exuberantes manifestações de fecundidade. Sabe-se ali que o trabalho de fôlego, na Ciência como na Arte, mesmo (e mais ainda) quando se trata dum RIEMANN ou dum BEETHOVEN, exige longas horas, por vezes dias sucessivos de concentração.

Convém todavia salientar que, nos períodos lectivos a densidade de serviço docente é muito maior do que entre nós (2).

Para concretizar em parte o que atrás foi dito, extraio do «Vorlesungsverzeichnis» da Universidade de Mogúncia, para o semestre de verão de 1952-53, as seguintes indicações relativas aos cursos de Matemática, com os respectivos horários e professores que os regem:

- 1) *Geometria analítica I, com Exercícios*, 6 horas, 2.^{as}, 4.^{as} e 6.^{as} das 8 às 10 — KÖTHE.
- 2) *Análise II, com Exercícios*, 6 horas 4.^{as}, 5.^{as} e Sáb.^{as} das 8 às 10 — ROHRBACH.
- 3) *Álgebra elementar, com Exercícios*, 4 horas, 2.^{as} e 6.^{as} das 10 às 12 — SCHÄFKE.
- 4) *Equações diferenciais ordinárias, com Exercícios*, 4 horas, 4.^{as} e 5.^{as} das 8 às 10 — FURCH.
- 5) *Álgebra superior, com Exercícios*, 4 horas, 2.^{as} das 8 às 10 e 6.^{as} das 10 às 12 — WEVER.
- 6) *Teoria aditiva dos números*, 4 horas, 3.^{as} e 5.^{as} das 10 às 12 — ROHRBACH.

(1) É preciso não omitir que, no momento actual, grande parte dos alunos são forçados a procurar em diversas ocupações, até as mais humildes, o sustento diário.

(2) Note-se porém que, em casos especiais, quando o professor está ligado a certos institutos de investigação, é-lhe reduzido o serviço docente, por vezes a uma hora por semana.

7) *Teoria das funções II, com Exercícios*, 5 horas, 3.^{as} das 8 às 10 e das 12 às 13 e 6.^{as} das 8 às 10 — GRUNSKY.

8) *Topologia*, 3 horas, 3.^{as} das 10 às 12 e 6.^{as} das 12 às 13 — FURCH.

9) *Métodos da física matemática II*, 4 horas, 2.^{as} e 5.^{as} das 13 às 15 — SCHÄFKE.

10) *Introdução ao cálculo das variações*, 2 horas, 2.^{as} e 4.^{as} das 12 às 13 — GRUNSKY.

11) *Espaços lineares*, 3 horas, 2.^{as} das 11 às 12 e 4.^{as} das 10 às 12 — KÖTHE.

12) *Aplicações escolhidas do cálculo operacional, mediante a transformação de Laplace, à Física e à Técnica*, 2 horas, 3.^{as} das 15 às 17 — WAGNER.

13) *Análise prática I*, 4 horas, 5.^{as} das 10 às 12 e das 15 às 17 — SCHMIEDEN.

14) *Geometria descritiva, com Exercícios*, 6 horas, 3.^{as}, 4.^{as} e 5.^{as} das 13 às 15 — NEUMER.

15) *Os fundamentos filosóficos da Matemática*, 3 horas, 2.^{as}, 4.^{as} e 6.^{as} das 16 às 17 — MARTIN.

16) *A imagem astronômica do mundo no decorrer dos tempos (Studium generale)*, 4 horas, 5.^{as} das 19 às 21 e Sáb.^{os} das 10 às 12 — FLECKENSTEIN.

17) *Prática matemática I*, 3 horas, 3.^{as} das 15 às 18 — ROHRBACH, WEVER.

18) *Prática matemática III*, 3 horas, 2.^{as} das 15 às 18 — SCHÄFKE, WEVER.

19) *Seminário superior*, 2 horas, 6.^{as} das 15 às 17 — KÖTHE, SCHÄFKE.

20) *Seminário superior*, 2 horas, 4.^{as} das 15 às 17 — FURCH.

21) *Seminário superior*, 2 horas, 4.^{as} das 10 às 12 — ROHRBACH.

22) *Seminário superior (funções especiais, teorias espectrais)*, 2 horas, 2.^{as} das 8 às 10 — SCHÄFKE.

23) *Seminário inicial*, 2 horas, 5.^{as} das 15 às 17 — GRUNSKY.

24) *Seminário inicial*, 2 horas, 2.^{as} das 13 às 15 — WEVER.

25) *Colóquio matemático*, 2 horas, 6.^{as} das 17 às 19 FURCH, GRUNSKY, KÖTHE, NEUMER, ROHRBACH, SCHÄFKE, WEVER.

26) *Colóquio de filosofia natural*, 2 horas, 4.^{as} das

17 às 19 — BECHERT, BOLLNOW, FURCH, HOLZAMER, KÖTHE, MARTIN, SCHULZ, STRASSMANN, TROLL, VOIT.

Observações acerca deste quadro: a) A numeração romana é usada para os cursos que se distribuem por mais de um semestre. Assim, «Análise II» (isto é «Análise, 2.^a parte») é precedida de «Análise I», leccionada no semestre anterior a este, e seguida de «Análise III», que figurará na lista do próximo semestre de inverno.

b) Cada hora indicada para as lições costuma incluir um intervalo de 15 minutos. Assim, uma lição que, teoricamente, seja de 2 horas, é na realidade de hora e meia.

c) São indicadas também as horas a que o professor atende os alunos.

d) O «Studium generale» consiste num conjunto de cursos de cultura geral, a serem seguidos indistintamente por estudantes de várias faculdades.

e) Por «seminário superior» traduzimos a palavra «Oberseminar» e por «seminário inicial» a palavra «Proseminar».

f) É claro que, para o aluno que começa, poucos são os cursos que pode escolher, entre aqueles indicados no «Vorlesungsverzeichnis»; poderá seguir as lições de Geometria analítica I, Álgebra elementar e Geometria descritiva, mas não, por exemplo, as de Análise II, Equações diferenciais, etc. Também já se disse que os Seminários são para ser seguidos unicamente por alunos que tenham previamente frequentado cursos fundamentais.

Aos Professores GOTTFRIED KÖTHE, da Universidade de Mogúncia e WILHELM SÜSS, da Universidade de Friburgo (na Brisgóvia), bem como ao «Studien-Rat» Sr. BERNHARD REIMANN, do liceu MATHIAS-CLAUSIUS de Hamburgo, deixo aqui expressa a minha gratidão, pela maneira obsequiosa e eficaz por que corresponderam aos meus desejos no sentido de colher informações sobre o assunto aqui tratado.

Ao Instituto de Alta Cultura cumpre-me agradecer esta oportunidade que me ofereceu de entrar em contacto com as escolas alemãs.