
GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XV

N.º 57

MAIO 1954

SUMÁRIO

Von der Zerlegung der Kugel in kleinere Teile
(Sobre a divisão da esfera em partes mais pequenas)
por *H. Hadwiger*

Sobre a noção de distância em relatividade restrita
por *Ruy Luís Gomes*

Sobre o ensino da Matemática em Itália
por *J. Sebastião e Silva*

Movimento Científico

Professor Gottfried K the — Escola de Estatística da Universidade de
Madrid — Instituto Elie Cartan — Organização e actividades do Instituto
Elie Cartan

Matemáticas Elementares

Pontos de Exames de Aptidão às Escolas Superiores

Matemáticas Superiores

Pontos de exames de frequência e finais de Matemáticas Gerais —
Análise Infinitesimal — Física Matemática

Problemas

Problemas propostos e soluções recebidas

Boletim Bibliográfico

Sobre o ensino da Matemática em Itália

por J. Sebastião e Silva

A Itália ocupa um lugar de relevo entre as nações que têm contribuído para o avanço das ciências matemáticas. Evoquemos, num rápido esboço, os fundamentos históricos deste facto.

No século XII, através dos mouros estabelecidos na Península Ibérica e dos mercadores italianos que comerciavam com o Levante, começou a difundir-se na Europa o conhecimento das matemáticas árabes, que reatavam a tradição dos clássicos gregos vitalizada pelo empirismo aritmético dos indianos. Com esta origem se vai formando e adquirindo vulto, numa lenta sedimentação, a escola de algebristas italianos que, 400 anos depois, no limiar do século XVI, consegue ultrapassar os limites da ciência helénica, inaugurando o período das matemáticas modernas, com as célebres descobertas relativas às equações do 3.º e do 4.º grau, às quais se ligam os nomes de SCIPIONE DEL FERRO, TARTAGLIA, CARDAN, FERRARI, BOMBELLI. Está-se em pleno Renascimento—das artes, das letras e das ciências. Por toda a parte, nessa Europa quinhentista, tomam incremento os estudos matemáticos (1). Após um longo período de ensimesmamento, o homem reabre os olhos para de novo contemplar as harmonias do mundo. Aplicando o método matemático ao estudo dos fenómenos naturais, KEPLER e GALILEU criam as ciências exactas, abrindo a era do racionalismo científico. Como instrumento adequado e mesmo indispensável para as novas pesquisas, irá constituir-se o cálculo infinitesimal, que, vislumbrado 2.000 anos atrás pelo grego genial de Siracusa, encontra ainda, em Itália, insignes precursores imediatos: CAVALIERI (discípulo de GALILEU) e TORRICELLI, continuador da obra do primeiro.

Não esqueçamos finalmente que, já antes disso, os grandes pintores do Renascimento, meticulosos naturalistas para os quais o belo é inseparável do verdadeiro (ou melhor do *objectivo*, daquilo que todos vêem), tinham lançado os germes da moderna geometria, de inspiração post-euclidea, abordando com espírito científico os problemas da perspectiva (BRUNNELLESCHI, PAOLO UCCELLO, LEONARDO DA VINCI e outros mais).

Estavam pois criadas, no país de DANTE, as bases duma tradição robusta, densa, riquíssima de seiva, capaz de resistir aos vendavais da História e às crises de cepticismo.

Será necessário lembrar o que tem sido até hoje a contribuição da Itália no campo das matemáticas? Muito haveria que dizer sobre o assunto e não é esse agora o fim em vista.

O que me proponho fazer aqui é apenas um breve inquérito à forma por que, na actualidade, se encontra instituído e é orientado o ensino da Matemática em Itália, procurando situá-lo no complexo das manifestações culturais deste país e seguindo uma orientação já anteriormente adoptada (1).

O «caso italiano» interessa particularmente aos pedagogistas portugueses. Primeiro que tudo, trata-se dum povo que apresenta, em relação a nós, profundas afinidades étnicas, psíquicas e linguísticas. Depois há que reconhecer este facto: a Itália de hoje é um país de alto nível cultural, de intenso e fecundo labor de espírito que se patenteia em numerosos sectores da arte, das letras, da filosofia, da ciência e da técnica — começando no domínio da pura actividade desinteressada e chegando, por insensíveis gradações, num lógico encadeamento, ao plano das realizações práticas.

Um índice expressivo da vida mental do povo italiano é-nos oferecido precisamente pela sua organização universitária. Existem actualmente em Itália 24 universidades do Estado, 4 universidades livres equiparadas às do Estado, 6 institutos universitários, 2 politécnicos e 4 institutos superiores de magistério equiparados aos do Estado (2).

Há ainda que ter em conta as Faculdades Universitárias e os Institutos Superiores dependentes do Vaticano, além da Universidade Gregoriana.

Não se faz em Itália distinção entre Universidade Clássica e Universidade Técnica. Por exemplo, a Universidade de Bolonha compreende as Faculdades de: 1) Direito, 2) Economia e Comércio, 3) Letras e Filosofia, 4) Medicina e Cirurgia, 5) Ciências Ma-

(1) Portugal também participou, com Pedro Nunes, no grande movimento. O nosso matemático e cosmógrafo, interessado em problemas reais de navegação, concorreu para a superação dos métodos da análise finita, com o seu belo estudo sobre a *loxodromia esférica* (ou *linha de rumo*), a curva serpentina que, esboçada por uma nave em viagem de rumo constante, acaba por enlaçar a Terra em infinitas espiras acumuladas em torno dos polos.

(1) Ver os artigos da Dr.^a MARIA DO PILAR RIBEIRO sobre o ensino da Matemática na Suíça, nos n.ºs 12, 13, 14 e 24 da *Gazeta de Matemática*, bem como o do Prof. HUGO RIBEIRO no n.º 26 da mesma revista. Ver ainda «Sobre o ensino da Matemática na Alemanha» no n.º 55 desta revista.

(2) Devem também citar-se os Colégios Universitários, como a Escola Normal Superior de Pisa, de que falaremos mais adiante, a propósito do ensino post-universitário.

temáticas, Físicas e Naturais, 6) Química Industrial, 7) Farmácia, 8) Engenharia, 9) Agronomia, 10) Medicina Veterinária. Em relação à anterior, a Universidade de Roma tem a menos as Faculdades de Agronomia, de Medicina Veterinária e de Química Industrial e a mais a de Ciências Políticas, a de Ciências Estatísticas, Demográficas e Actuarias, a de Magistério, a de Arquitectura e a de Engenharia Aero-náutica.

Com as actividades universitárias propriamente ditas está relacionado o «Consiglio Nazionale delle Ricerche» (Conselho Nacional de Investigações), de de que falaremos oportunamente.

Fora do âmbito escolar são ainda dignas de registo cerca de 270 instituições culturais, incluindo academias e associações várias, com actividade científica, técnica, artística, literária ou jurídica, muitas das quais servidas por uma ou mais revistas próprias. A mais alta destas instituições é a «Accademia Nazionale dei Lincei» (Academia Nacional dos Linceos), de gloriosas tradições. Dela foi sócio GALILEU (1).

Neste quadro imponente de manifestações culturais, os estudos matemáticos mantêm, ainda hoje, uma situação privilegiada.

Ser-nos-á seguramente proveitoso lançar uma vista de olhos sobre aspectos vários do ensino da Matemática na mais velha e mais nova das nações latinas. Mas antes disso há que tomar uma precaução de ordem psicológica: não se pretenda encontrar em tudo a perfeição e, menos ainda, um modelo a copiar fielmente. Acresce a circunstância de se anunciar para breve uma reforma geral do ensino em Itália, o que quere dizer que o estado de coisas actual se não considera ali o mais adequado às exigências e aos pontos de vista modernos.

Ensino secundário

Sobre esta fase de ensino limitar-me-ei a breves referências, não porque seja matéria de pouco interesse, mas porque tenho agora em vista, sobretudo, desenvolver a parte referente ao ensino universitário e às actividades de investigação.

Os estudos secundários em Itália duram normalmente oito anos.

Os três primeiros anos têm lugar na chamada *Scuola Media Inferiore*, pela qual não obrigados a passar todos aqueles que pretendam seguir qualquer curso de estudos, incluindo os do ensino técnico-profissional.

(1) Para mais detalhes sobre as instituições culturais italianas, ver «Os estudos superiores e a vida intelectual da Itália de hoje», por Hyacinthus (pseudónimo do Prof. JACINTO MANUPPELLA).

Após o curso da Escola Média Inferior, o ensino médio pode prosseguir numa escola pertencente a um qualquer dos seguintes tipos:

1) *Liceo-Ginnasio Classico*, que consta de um primeiro ciclo de 2 anos (*Ginnasio Superiore*) e dum segundo ciclo de 3 anos (*Liceo Classico*). O «Diploma di Maturità Classica» dá acesso a qualquer Faculdade Universitária ou Instituto Superior.

2) *Liceo Scientifico*, também quinquenal. O «Diploma di Maturità Scientifica» abre acesso a qualquer Faculdade Universitária ou Instituto Superior, excepto às Faculdades de Letras e Direito.

3) *Istituto Magistrale* (Instituto de Magistério Primário). Nestas escolas, destinadas à formação de professores do Ensino Primário, o curso é igualmente de 5 anos. No fim é passado um diploma de habilitação profissional.

4) *Istituto Tecnico*, diferenciado em 5 modalidades diferentes (industrial, comercial, náutico, agrário e de agrimensura). Trata-se ainda de cursos quinquenais (eventualmente seguidos de cursos de aperfeiçoamento), que habilitam directamente para determinadas profissões.

Interessam-nos em particular a Escola Média Inferior e os Liceus (Científico e Clássico). Ao longo dos oito anos de estudos efectuados nestas escolas, os programas de Matemática, no seu conjunto, não diferem grandemente dos que são seguidos nos nossos cursos liceais. A diferença mais sensível verifica-se talvez no estudo da Análise infinitesimal, que é ali conduzido bastante mais a fundo nos dois últimos anos do Liceu Científico, fornecendo uma preparação apreciável, tanto em cálculo diferencial como em cálculo integral.

Naturalmente, o estudo das ciências é feito com maior desenvolvimento no Liceu Científico que no Liceu Clássico em que predomina a orientação humanística (1).

A pedagogia e a didáctica da Matemática (como dum modo geral todos os problemas pedagógicos, incluindo os da Escola Primária) têm sido em Itália desde sempre objecto de vivo e carinhoso interesse. Grandes cientistas, grandes pensadores, não têm desdenhado olhar com desvelo, no intervalo das suas investigações, para os problemas do ensino, até para aqueles aparentemente mais humildes. Um homem que neste sentido, desempenhou ali uma acção particularmente eficaz e profunda, pelos seus escritos,

(1) Este predomínio manifesta-se no maior número de horas semanais concedidas aos estudos clássicos e, em particular, na presença do Grego (o Latim é ensinado em todos os anos de qualquer dos tipos de escolas). Entretanto, importa salientar que o estudo das línguas modernas é muito mais desenvolvido no Liceu Científico que no Liceu Clássico.

pela sua capacidade organizadora, pela sua forte personalidade, foi o célebre geómetra FEDERIGO ENRIQUES. Entre outras suas iniciativas, as «*Questioni riguardanti le matematiche elementari*», colectânea de artigos de autores vários por ele dirigida, tiveram amplas e distantes repercussões, não só no ensino (dentro e fora da Itália) como até no desenvolvimento da própria ciência. Foi ainda por iniciativa sua e dos seus colaboradores, que o «*Periodico di Matematica*», jornal dedicado ao ensino secundário e publicado desde 1886 até 1918, reapareceu em 1921 como «*Periodico di Matematiche (storia, didattica, filosofia)*», desenvolvendo um programa de aproximação entre as matemáticas elementares e as matemáticas superiores, com vista ao esclarecimento e difusão de ideias e doutrinas.

As conferências e os colóquios em que participam simultaneamente professores do ensino secundário e professores do ensino superior tornam-se frequentes a partir de então.

Assim ENRIQUES está de certo modo para a Itália como FELIX KLEIN para a Alemanha. Seria mesmo interessante fazer um estudo comparativo destes dois casos, correspondentes a duas latitudes diferentes.

De resto as ideias de KLEIN já antes tinham penetrado em Itália. Eis como o próprio ENRIQUES se refere a esse facto no seu belo livrinho «*Le matematiche nella storia e nella cultura*»:

«Entretanto delineava-se noutros países um movimento (que na Alemanha encontrou um propulsor em F. KLEIN) para a introdução de métodos mais intuitivos e empíricos, facilitando o ensino da parte elementar clássica da geometria e dando impulso, por outro lado, ao estudo mais geral das propriedades que estão na base da Análise infinitesimal. Em Itália adoptou-se o ensino intuitivo nos primeiros anos da escola média como fase preparatória do estudo racional, e — no que se refere aos graus de ensino mais elevados — a ordem de ideias kleinianas teve um começo de execução no programa do «liceu moderno» e nos livros que para ele foram escritos. Mas em geral os professores italianos — talvez pela educação lógica que receberam nas faculdades universitárias — encontram dificuldade em acolher este espírito a que é inerente um certo inacabamento e um modo de raciocinar significativo, mas deliberadamente imperfeito. Assim, o programa do novo liceu científico, instaurado com a reforma GENTILE (1), retoma do «liceu moderno» alguns assuntos (derivada, integral) no sentido de um maior rigor lógico».

E com efeito hoje ainda, confrontando os textos de

Análise adoptados em Itália para o ensino secundário, com os correspondentes seguidos na Alemanha, observa-se que nos primeiros o aspecto lógico é bastante mais pronunciado que nos segundos. Seríamos tentados a explicar este facto como uma distinção entre mentalidade latina e mentalidade germânica; mas a verdade é que nos textos universitários as coisas não se passam exactamente do mesmo modo (1).

Entretanto, ENRIQUES não se esquece de salientar:

«Mais do que as diferenças dos métodos ou as indicações dos programas influi sobre a eficácia do ensino o valor dos que ensinam: a sua mentalidade, o calor comunicativo, a paixão que dedicam às coisas ensinadas, a largueza de interesses que os torna capazes de se colocarem no lugar dos alunos e de sentirem como estes. Na medida em que tais dotes possam ser adquiridos, é necessário para tanto cuidar sobretudo da preparação universitária e, depois disso, criar aos professores condições de vida que deixem suficiente liberdade para manter e desenvolver a sua própria cultura».

As ideias pedagógicas de F. ENRIQUES, tanto como as de F. KLEIN, merecem ser amplamente conhecidas e meditadas por todos aqueles que se dedicam à carreira do ensino.

Ensino universitário

Quando não haja indicações em contrário as informações seguintes referem-se concretamente à Universidade de Roma.

O ensino universitário da Matemática tem lugar sobretudo (mas não exclusivamente) na Faculdade de Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais, que confere o grau de «doutor» (isto é de «licenciado») em qualquer dos seguintes ramos:

1) Química; 2) Física; 3) Matemática; 4) Matemática e Física; 5) Ciências Naturais; 6) Ciências Biológicas; 7) Ciências Geológicas.

Também nesta Faculdade são cursados preparatórios de Engenharia (dois anos).

A duração normal dos estudos em cada uma das licenciaturas é de 4 anos, com excepção da licenciatura em Química que requiere 5 anos.

Em qualquer das licenciaturas os cursos estão repartidos em duas categorias: *cursos fundamentais* e *cursos complementares*.

Os cursos fundamentais acumulam-se essencialmente no primeiro biénio e têm por finalidade fornecer uma

(1) Esta reforma recebe o nome do filósofo italiano que a introduziu.

(1) É interessante observar que, entre os mais convictos e originais apologistas do ensino intuitivo-experimental na Escola Média Inferior (segundo um método natural de redescoberta), se conta hoje em Itália uma sobrinha de F. ENRIQUES, a Prof.^a EMMA CASTELNUOVO, distinta colaboradora da *Gazeta de Matemática*.

base de cultura geral bastante sólida e vasta no ramo de que trate — procurando beneficiar ao máximo dos progressos da ciência e da metodologia, mas renunciando desde logo a um desenvolvimento exaustivo dos assuntos que, além de supérfluo, seria inviável. Trata-se, acima de tudo, de ensinar o melhor possível *ciência feita e assente* (o que não quer dizer de modo nenhum *ciência antiga e desactualizada*), segundo um critério de selecção e dosagem, tendente a precisar o que, nas disciplinas em questão, é efectivamente básico e de real interesse para a formação geral do matemático, do físico, do engenheiro — sem deixar de ter em conta o estado actual da ciência. Daqui resulta que os programas dos cursos fundamentais não podem variar muito de ano para ano. E todos esses cursos são obrigatórios.

Quanto aos cursos complementares, o ponto de vista adoptado é radicalmente diverso. A cultura geral não basta, evidentemente, para a formação de um cientista. A cultura geral é um meio, não um fim. O primeiro biénio de estudos estabelece a transição entre o Liceu e a Universidade — e é óbvio que não haverá ensino verdadeiramente universitário se não houver contacto com a frente de investigação actual, o que por sua vez seria impossível sem especialização. Ora, precisamente, para estabelecer esse contacto, para conduzir o aluno até à fronteira do conhecimento, para o familiarizar com as vicissitudes da investigação e com os problemas que continuam abertos — para isso mesmo é que existem os cursos complementares. E como não é possível especializar o aluno simultaneamente em todas as especialidades (até M. DE LA PALISSE seria capaz de o dizer), segue-se, como corolário imediato, que os cursos complementares não devem ser obrigatórios em bloco. Um outro corolário do ponto de vista explanado é que os programas de tais cursos devem ter uma ampla margem de variabilidade⁽¹⁾.

Deve ainda observar-se que, no plano da licenciatura em Ciências Matemáticas, figuram certos cursos complementares — tais como Astronomia, Cálculo actuarial, etc. — cujo carácter é mais propriamente o de *especialização técnica*, servindo para aqueles alunos que pretendam seguir determinadas profissões.

Os cursos são todos anuais, excepto alguns cursos fundamentais que são bienais. No início de cada ano lectivo a Faculdade publica um «Ordine degli Studi» com a indicação dos cursos professados durante esse ano, bem como a dos respectivos programas, horários, professores que os regem, etc.

Consultando por exemplo o «Ordine degli Studi»

da Faculdade de Ciências de Roma para o ano de 1950-51, encontram-se ali, entre outras, as seguintes informações relativas à Licenciatura em Ciências Matemáticas:

Cursos fundamentais: 1. Análise matemática (algébrica e infinitesimal) (bienal) — 2. Geometria analítica com elementos de projectiva e geometria descritiva com desenho (bienal) — 3. Análise superior — 4. Geometria superior — 5. Mecânica racional com elementos de estática e desenho — 6. Física experimental com trabalhos práticos (bienal) — 7. Física matemática — 8. Química geral e inorgânica com elementos de orgânica⁽¹⁾.

Além destes cursos que, segundo o que se disse atrás, são todos obrigatórios, o aluno terá de escolher pelo menos três entre os seguintes 17 cursos complementares: 1. Teoria das funções — 2. Teoria dos números — 3. Geometria diferencial — 4. Geometria algébrica — 5. Topologia — 6. Matemáticas superiores — 7. Matemáticas complementares — 8. Matemáticas elementares do ponto de vista superior — 9. História das matemáticas — 10. Cálculo das probabilidades — 11. Matemática actuarial e técnica dos seguros livres sobre a vida humana — 12. Astronomia — 13. Geodesia — 14. Cálculos numéricos e gráficos — 15. Física Teórica — 16. Física superior — 17. Mecânica superior.

O ensino da Análise matemática é feito sempre por dois professores que ensinam alternadamente, num ano Análise algébrica e no ano seguinte Análise infinitesimal. O aluno é submetido a um exame no fim de cada um destes anos.

Análogas disposições são estabelecidas para o ensino da Geometria (analítica, projectiva e descritiva).

O ensino bienal de Física implica um exame único no fim do biénio, enquanto os respectivos trabalhos de laboratório comportam um exame no fim de cada ano.

Os restantes cursos comportam um único exame no fim do ano. Há duas épocas de exame: uma durante o mês de Junho e outra durante o mês de Outubro. As aulas começam em princípios de Novembro e terminam em fins de Maio.

Não há exames de frequência. Quando muito o professor pode submeter os alunos a um exame *ad hoc* a título de sondagem.

A licenciatura é concluída com um exame, ao qual só pode ser admitido o aluno que tenha obtido apro-

⁽¹⁾ Alguns desses cursos têm designação muito vaga precisamente para permitir maior versatilidade do programa.

⁽¹⁾ A presença de um curso anual de Química e dum curso bienal de Física na Licenciatura de Matemática pode causar estranheza, sobretudo atendendo a que existe já uma Licenciatura em Matemática e Física. Essa presença corresponde a um ponto de vista muito generalizado em Itália, segundo o qual o matemático precisa de tomar contacto com as ciências da natureza. De resto, é preciso notar que os programas destes cursos são em regra moderados.

vão em todos os cursos fundamentais e em pelo menos três dos cursos complementares por ele escolhidos. A parte mais importante do exame de licenciatura é a discussão oral de uma tese escrita que, na medida do possível, deve revelar uma certa originalidade. (Não há em Itália nenhum tipo de exame que corresponda propriamente ao nosso doutoramento; o licenciado é automaticamente *doutor*). Além da discussão do trabalho escrito, o exame de licenciatura compreende ainda a discussão oral de dois ou três temas propostos pelo júri.

A partir do terceiro ano o aluno dirige o melhor dos seus esforços para a preparação da tese. Os cursos complementares que tiver escolhido fornecer-lhe-ão matéria e sugestões para esse fim. O papel do professor em tais cursos deve pois ser em grande parte o de orientar o aluno para o trabalho de investigação, ou pelo menos para o de reelaboração pessoal. De resto, no segundo biénio o número de horas lectivas é bastante reduzida (não há trabalhos práticos na maior parte dos cursos), o que deixa ao aluno muito tempo livre para *se concentrar e trabalhar por si*. Há ainda actividade de seminários, mas não com o carácter e a intensidade que se observa por exemplo na Alemanha (4).

Analisando os dados precedentes sobre a organização geral da licenciatura em Matemática, descobrem-se ali, sem dúvida, vários pontos discutíveis; mas isso agora pouco interessa, mesmo porque, como dissémos, se está em véspera duma reforma em Itália.

Foquemos antes alguns aspectos interessantes dessa organização. O primeiro, o que salta logo à vista, é o da separação entre cursos fundamentais e cursos complementares à opção; mas esse não é exclusivo da Itália e tende a associar-se de tal modo a concepção moderna de ensino universitário, que já não carece de atitudes encomásticas.

O que julgo ser típico no ensino italiano é aquela existência de cursos bienais de Análise e de Geometria, cada um deles regidos por dois professores que se alternam de maneira que todo o aluno em condições normais possa ter o mesmo professor nos dois anos sucessivos. As vantagens que daí resultam para o ensino parecem-me apreciáveis. As matérias geralmente tratadas nos dois primeiros anos de Análise como parte de uma cultura geral que se estende aos preparatórios de Engenharia, constituem um todo indivisível, uma unidade científica à qual convém que corresponda unidade de orientação pedagógica. Neste ponto o regime italiano distancia-se bastante do de outros países, nomeadamente a Alemanha, em

que se dá logo de início uma fragmentação dos cursos em semestres, sem necessária continuidade pessoal de regência; ora, se este último sistema é aceitável — e até o mais indicado — na fase de especialização, o mesmo já não se pode dizer quando se trata de construir uma cultura básica, a que convém essencialmente o carácter unitário.

A mesma unidade se impõe ainda no estudo da Geometria (analítica, projectiva e descritiva). Em particular, o facto de a Geometria analítica não estar incluída no curso de Análise (ao contrário do que aconteceu entre nós) permite fazer um ensino mais cuidado e eficiente de qualquer dessas matérias. De resto, Análise e Geometria são ramos distintos da Matemática, que correspondem mesmo a mentalidades bem diversas.

Têm sido publicados em Itália, em diferentes épocas, excelentes textos de Matemática para o ensino superior. Vários desses livros, geralmente notáveis pela clareza, pelo rigor lógico e pela seriedade científica, têm-se tornado de tal modo conhecidos na grande massa dos nossos estudantes universitários que nem vale a pena citá-los aqui. O êxito que têm alcançado no nosso meio deve também atribuir-se, em grande parte, àquela afinidade étnica a que já no começo fiz referência, apontando-a como uma das razões pelas quais oferece particular interesse, para nós, o conhecimento das condições em que é feito o ensino em Itália.

Neste sentido são ainda dignos de nota os seguintes comentários de F. ENRIQUES, embora estes não se refiram ao panorama actual:

«As Universidades italianas, em que as matemáticas se encontram num alto nível, oferecem aos jovens candidatos ao ensino favoráveis condições de estudo, sob a orientação de mestres que são, em geral, valiosos cultores da ciência. Além disso, a disposição dos estudos do primeiro biénio tem vindo a organizar-se de tal modo que os cursos fundamentais adquiriram no nosso país uma forma particularmente cuidada, dando assim lugar a tratados que são muitas vezes modelos de acabado rigor. Se um defeito se lhes pode apontar, por vezes, do ponto de vista didáctico, é só este: que a exposição perfeita deixa menos ao esforço do aluno, ou que o rigor lógico esconde em parte a génese das ideias. Mesmo a exacta formulação das restrições exigidas no enunciado dos teoremas pode perturbar a visão da génese das ideias, e até a inteligência do seu valor.»

ENRIQUES aponta em seguida que, como correctivo ou complemento a este ensino purista, surgiu a necessidade de apresentar por outro lado aos alunos uma vista geral dos desenvolvimentos que precederam

(4) O trabalho de seminário é mais desenvolvido nos Colégios Universitários de que falaremos adiante.

o último grau de perfeição da teoria. E acrescenta:

«A formação de professores de matemática que estejam à altura das suas funções didácticas requer em geral que a ciência seja por eles apreciada não sómente no aspecto estático, mas também no seu evoluir. E portanto que o estudioso aprenda pela história a reflectir sobre a génese das ideias e que, por outro lado, participe no interesse pela investigação».

«Despertar o interesse dos futuros professores (do ensino secundário) pela investigação científica e mantê-lo depois vivo neles, é tarefa delicada, porquanto os problemas de altas matemáticas parecem, à primeira vista, inteiramente desligados do campo elementar em que virá a desenvolver-se a actividade do professor da escola média. Importa por isso mostrar a contribuição significativa que as matemáticas superiores prestam em vários sentidos à inteligência dos conceitos e à resolução dos problemas elementares».

E, neste sentido, ENRIQUES salienta o papel desempenhado em Itália pelas «Questioni riguardanti le matematiche elementari» e pelo «Periodico di Matematiche», a que já me referi.

Ensino post-universitário

São já tradicionais em Itália os cursos de aperfeiçoamento ou de extensão universitária, anuais ou bienais. Muitos destes cursos têm carácter de especialização técnica, e por isso quem os segue pretende sobretudo obter um título para fins profissionais. Mas outras vezes trata-se antes de cursos com finalidade especulativa, dedicados ao estudo dos jovens licenciados. Os professores que os regem são em regra cientistas, cuja obra de investigação, consagrada dentro e fora do próprio país, atrai estudiosos de vários pontos do mundo civilizado. Quem assiste a esses cursos já não é movido pelo simples propósito de superar os exames e alcançar um diploma, mas sim pelo *amor da ciência*, no sentido platónico desta expressão; já não há verdadeiramente prelecções dum professor dirigidas a alunos, mas antes uma conversa amena entre um homem experiente e um núcleo de gente idealista, que o procura para ser encaminhada na exploração dos novos trilhos do conhecimento — tal como acontecia nos círculos filosóficos da antiga Grécia.

Deste modo se criam, se desenvolvem e se propagam as grandes escolas de investigação. Uma das que nos últimos 70 anos mais têm florescido no solo italiano é a escola de Geometria algébrica, de que foi arauto LUIGI CREMONA e de que foram principais construtores FEDERIGO ENRIQUES, GUIDO CASTELNUOVO e FRANCESCO SEVERI (falecidos os três primeiros). Sucessivas gerações de géometras de vários países têm bebido daquela fonte: uma parte da juventude passaram-na em Itália, junto dos grandes mestres.

Mas também a escola italiana de Análise, embora menos genuinamente italiana, tem tido representantes da mais alta categoria: VITO VOLTERRA, o criador da Análise funcional; GREGORIO RICCI e TULLIO LEVI-CIVITA, os fundadores do Cálculo absoluto; e ainda BETTI, PINCHERLE, DINI, ARZELÀ, GIULIO ASCOLI, CESARO, BIANCHI, TONELLI, e tantos outros, e tantos mais ⁽¹⁾.

Desde longa data se concedeu aos estudiosos largo apoio concretizado em bolsas de estudo e facilidades de vária ordem; mas não havia inicialmente uma organização efectiva de trabalho de investigação segundo as concepções modernas. Falando com ENRIQUES sobre o assunto, dizia-me este: «Os rapazes vinham para aqui, assistiam aos nossos cursos e visitavam-nos para trocarem connosco impressões em longas conversas».

Há contudo particularidades da orgânica de ensino que, a par da tradição científica e do exemplo vivo dos mestres, explicam em grande parte o alto nível atingido pelas investigações matemáticas naquele país.

Citarei em primeiro lugar uma circunstância que reputo importantíssima: os assistentes têm ali pouco tempo de trabalho lectivo, no máximo 4 horas por semana; sómente o serviço de exames (os do fim do ano que outros não há normalmente) é para eles um tanto absorvente. Todo o tempo restante podem-no em regra dedicar ao trabalho de aperfeiçoamento e de investigação.

O período que vai dos 18 aos 25 anos é geralmente decisivo para a vida dum cientista. Lendo as biografias dos grandes matemáticos, observa-se que as premissas das suas obras são lançadas quase sempre durante aqueles anos. É pois necessário não extinguir ou enfraquecer com um regime de trabalho impróprio essa chama sagrada que rompe e se ateia no período áureo da existência! ⁽²⁾

Já vimos que não existe em Itália um acto correspondente ao nosso de doutoramento: o doutor é o licenciado. Ali, o acto fundamental na carreira do ensino universitário (após a licenciatura) é o da aquisição do título de «libero docente» (professor livre), que de certo modo poderíamos assimilar, quanto a efeitos legais, ao título de «professor agregado», mas que não requiere provas públicas como as que se prestam entre nós: a atribuição da «libera docenza» é feita essencialmente com base no «curriculum vitae» do candidato, cujos trabalhos são submetidos à apreciação dum júri especializado; à parte isso, o candidato terá de fazer uma conferência sobre assunto do seu campo de investigação e pode, eventualmente,

(1) A ordem por que são aqui citados estes nomes não pretende de nenhum modo ser uma ordem de valores.

(2) Neste sentido, nunca é demais encarecer a acção benéfica do nosso Instituto de Alta Cultura, principalmente no que se refere à concessão de bolsas de estudo fora do País.

ser obrigado a uma prova didáctica, da qual porém será dispensado desde que tenha revelado competência no desempenho de funções docentes. E, ainda depois disso, nos concursos a lugares de professor catedrático, é sobre a obra científica acumulada pelos candidatos até ao instante do concurso (chegam a apresentar-se provas tipográficas de trabalhos) que se baseia substancialmente a decisão do júri.

Há por outro lado uma instituição que, por si só, tem feito pela Matemática e, em geral, pela cultura italiana, mais do que várias universidades juntas: refiro-me à Escola Normal Superior de Pisa, da qual têm saído muitos dos maiores valores de que a Itália se orgulha no campo das ciências e das letras. A maior parte dos matemáticos atrás citados passaram por aquela Escola ou foram ali professores (BETTI e DINI foram mesmo directores da Escola, exercendo uma influência profundíssima em várias gerações de analistas). A Escola Normal Superior de Pisa é um *Colégio Universitário* que recebe, mediante concurso nacional, estudantes inscritos nas Faculdades de Letras e de Ciências de Pisa, bem como licenciados por escolas congêneres de toda a Itália ou mesmo do estrangeiro. Além de alojamento e alimentação, fornece-lhes gratuitamente ensino, a complemento daquele universitário, sob a forma de cursos, seminários e conferências; para os licenciados há cursos de aperfeiçoamento. Ao entrar para a Escola, os alunos assumem a obrigação formal de se dedicarem mais tarde ao ensino ou à carreira científica. A Escola publica uma importante revista, os *«Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa»*.

Há ainda em Itália vários outros Colégios Universitários e *Case dello Studente*, com funções mais ou menos semelhantes às do anterior—mas nenhum com a tradição, o nível, o esplêndido fulgor da Escola de Pisa.

Mas a investigação científica em Itália está hoje subordinada a um plano geral de organização, montado em grande escala.

Pela sua parte, o *«Consiglio Nazionale delle Ricerche»* — órgão do Estado que promove, coordena e disciplina as investigações tendentes ao progresso científico e técnico da Nação — mantém um número muito elevado de Centros de Estudo (com quadros permanentes de pessoal e ricamente apetrechados com material do mais moderno) e concede anualmente numerosas bolsas de estudo para principiantes (1).

(1) Não disponho neste momento de dados estatísticos actuais e completos sobre a vastíssima organização do C. N. R.

Mas anuncia-se para breve em Portugal uma exposição promovida pelo C. N. R., com a colaboração do Instituto Italiano de Cultura, sobre a actividade técnico-científica da Itália nos últimos trinta anos, e então se poderá ter ideia do que seja aquela organização.

A par das revistas especializadas em que se publicam trabalhos relativos aos diferentes ramos de investigação, o *«Consiglio Nazionale delle Ricerche»* publica uma revista própria, *«La Ricerca Scientifica»*, que, em fascículos mensais de 150 páginas, resume a actividade geral dos Centros de Estudo dependentes daquele organismo; além disso, subsidia a publicação não só de revistas, como ainda de muitas obras científicas.

De resto, nem toda a actividade de investigação — incluindo aquela estipendiada pelo Estado — depende do *«Consiglio Nazionale delle Ricerche»*. E, para dar uma ideia aproximada do que é essa actividade, seria necessário um longo artigo ou antes uma série de artigos escritos expressamente com esse fim. Limitar-me-ei por isso a falar dos dois Institutos que conheço directamente — o *«Istituto di Alta Matematica»* e o *«Istituto per le Applicazioni del Calcolo»*, ambos de Roma.

O *Istituto di Alta Matematica*, fundado em 1940, graças ao grande prestígio e dinamismo de FRANCESCO SEVERI, seu primeiro e actual Presidente, funciona em edifício comum ao da Secção de Matemática da Universidade de Roma. Embora se trate de um centro de estudos post-universitários, que não implica exames nem concessão de qualquer título ou diploma, conserva ainda na sua estrutura carácter universitário no que diz respeito a pessoal docente e a realização de cursos: — tem um quadro constituído por professores catedráticos, assistentes, etc.; no começo de cada ano lectivo publica um programa circunstanciado dos cursos e conferências a realizar durante esse ano (excepto algumas que não estejam previstas) acompanhado dos respectivos horários (em regra, 3 horas semanais para cada curso).

Os alunos do Instituto de Alta Matemática, chamados *«discepoli ricercatori»*, são em geral jovens licenciados, italianos ou estrangeiros, que estão interessados em seguir a carreira do ensino universitário ou da pura investigação e aos quais são concedidas bolsas de estudo.

Os professores do Instituto, que, em princípio, devem ser investigadores conhecidos pela sua obra nos meios científicos de todo o mundo (e são-no realmente), organizam os programas dos seus cursos precisamente sobre assuntos relativos a trabalhos pessoais. As lições são feitas em estilo ameno de conversa e, mais do que a exposição dum corpo de doutrina, perfeitamente organizado e estabilizado, tendem a revelar as dificuldades encontradas no decurso das investigações, indicando pontos a precisar, levantando novos problemas e sugerindo ideias. A lição é geralmente seguida duma troca de impressões entre os circunstantes e, por vezes, de animada discussão.

Aos discípulos investigadores são propostos temas que podem mesmo surgir espontaneamente no decurso dessas reuniões. Os resultados que porventura forem obtendo são comunicados a professores e colegas, directamente ou em conferências, e, uma vez controlados e sistematizados, serão expostos em notas ou memórias que podem ser publicadas nos «Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni» ou em qualquer outra das muitas revistas existentes no país.

No seu curto período de existência, apesar das profundas perturbações causadas pela Guerra (chegando à completa paralização em 1944), o Instituto de Alta Matemática tem conseguido acumular uma obra de vulto, concretizada em numerosas publicações e num intenso intercâmbio com diversos países.

O Instituto para as Aplicações do Cálculo tem estrutura e finalidade muito diversas das do primeiro.

Fundado em 1927 pelo Prof. MAURO PICONE, seu actual director, tem por objectivo essencial subsidiar as ciências experimentais e a técnica, no que se refere à análise matemática quantitativa dos seus problemas; para tanto compete-lhe, por um lado, prestar colaboração e assistência científica a entes oficiais ou particulares que se lhe dirijam, para resolução de problemas que se põem nos diversos domínios aplicativos, e, por outro lado, desenvolver pesquisas tendentes ao aperfeiçoamento e à criação de métodos da Análise matemática, que lhe permitam estar à altura do desempenho de tão complexa e difícil missão.

À frente deste Instituto encontra-se um conselho directivo composto por um Presidente, pelo Director do Instituto e pelos representantes de numerosos organismos oficiais e particulares, incluindo os Ministérios da Aeronáutica, das Obras Públicas, das Comunicações, das Corporações, da Instrução, da Guerra e da Marinha.

O pessoal de investigação e de execução do Instituto compreende um Director, um Vice-Director, Coadjuutores, Consulentes ordinários, Calculadores, Assistentes Calculadores e Desenhadores.

Para dar uma ideia das investigações desenvolvidas neste Instituto, começarei por indicar alguns dos ramos da Ciência e da Técnica, sobre os quais têm incidido: 1) *ciência das construções e teoria da elasticidade*; 2) *estática e dinâmica das construções aeronáuticas*; 3) *fenómenos vibratórios em vários tipos de construções*; 4) *hidráulica*; 5) *construções de pontes*; 6) *construções de máquinas*; 7) *caminhos de ferro*; 8) *electrotécnica, electromagnetismo e radio-técnica*; 9) *termometria e termologia*; 10) *aerodinâmica*; 11) *geofísica*; 12) *óptica*; 13) *economia industrial*; 14) *estatística*; 15) *cálculo actuarial*;

16) *finanças*; 17) *dinâmica económica*; 18) *balística e técnica do tiro*; 19) *tabulação de funções clássicas*.

Muitas destas pesquisas têm requerido prévias investigações puramente matemáticas, algumas das quais se concluíram só ao fim de vários anos de tentativas e estudos. Deste modo o Instituto para as Aplicações do Cálculo estabelece um contacto vivo, fecundíssimo, entre a Matemática e as Ciências aplicadas. E o resultado pode ver-se na massa imponente de publicações do Instituto, que vão desde as mais abstractas e desinteressadas especulações matemáticas até às mais concretas e utilitárias aplicações.

O escol da moderna geração de matemáticos italianos tem sido em grande parte influenciado pela actividade deste Instituto, o que já em si é uma excelente promessa de fecundidade. Essa influência começa por vezes bastante cedo, porquanto muitas das teses de licenciatura são ali preparadas.

No Instituto para as Aplicações do Cálculo a resolução dos problemas é geralmente conduzida até a fase final — ao resultado numérico expresso em algarismos. Para isso, o Instituto é ricamente dotado de instrumentos gráficos e mecânicos de cálculo numérico. Neste momento está-se ali em via de adquirir uma máquina calculadora electrónica Ferranti, construída em Manchester, Inglaterra. Tem esta máquina uma memória de 16384 células para números de 40 algarismos binários, sobre tambor magnético, e uma memória «rápida», de tubos de raios catódicos Williams, de 384 células, igualmente para números de 40 algarismos binários. Prevê-se que com o emprego desta máquina seja possível inverter matrizes quadradas de ordem 100, num período de 20 horas, o que é verdadeiramente assombroso, se atendermos a que uma tal inversão implica o cálculo de 10.000 coeficientes, cada um dos quais requiere, por si só, um número desmedido de operações. E não se pense que a máquina electrónica substitui o matemático. De nenhum modo! O papel da máquina é *executar determinados planos* e, para elaborar esses planos, exige-se o concurso de matemáticos de vários tipos, inclusivamente *especialistas de Lógica matemática*.

Há poucos anos foi deliberado, após longo estudo, fixar em Roma o Centro Internacional de Cálculo Mecânico da U. N. E. S. C. O., sob a direcção proficiente do Prof. PICONE. Está em curso a organização das instalações, a cargo do Prof. ALDO GHIZZETTI Vice-Director do Instituto para as Aplicações do Cálculo.

Deste modo se deu justa consagração a uma actividade de vários anos, à qual se encontram ligados altos interesses culturais e económicos duma grande Nação.