

---

# GAZETA DE MATEMÁTICA

---

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS  
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VIII

N.º 31

FEVEREIRO-1947

## S U M Á R I O

Sôbre o cálculo simbólico por *José Sebastião e Silva*

II — Nombres hypercomplexes por *Paul Belgodère*

Topologia e Álgebra por *B. Eckmann*

### Pedagogia

Sôbre a correlação entre a Matemática e a Física no Ensino Liceal  
por *Rômulo de Carvalho*

### Antologia

Science et Technique por *Paul Langevin*

### Movimento Científico

Bicentenário da Universidade de Princeton  
— Sociedade Portuguesa de Matemática — Congressos

### Matemáticas Elementares

Métodos geométricos — Sôbre a inversão por *Raul Rato*  
Pontos do exame de aptidão às Escolas Superiores

### Matemáticas Superiores

Pontos de exames de frequência

Problemas propostos e soluções recebidas

Boletim Bibliográfico

Publicações recebidas

NÚMERO AVULSO: ESC. 10\$00

---

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre de vous même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette science.

René Descartes — La Géométrie

# SOBRE O CÁLCULO SIMBÓLICO

por José Sebastião e Silva

Já desde LEIBNIZ foram observadas curiosas analogias entre as propriedades formais de certos símbolos não numéricos e as regras de cálculo elementar. Mas, por muito tempo, estes factos pouco interesse despertaram, considerados como simples coincidências a que nada correspondesse de essencial.

Não foi senão em fins do século passado, com os importantes trabalhos de HEAVISIDE relativos à integração de vários tipos de equações diferenciais lineares, ligadas a questões de electrotecnia, que as possibilidades do chamado «cálculo simbólico», como elegante e fecundo instrumento de descoberta, foram postas plenamente em evidência. Ele revelou-se particularmente útil na telefonia e na telegrafia a longa distância, e foi, juntamente com o Cálculo das Variações, uma das origens da Análise Funcional.

Consideremos, a título de exemplo, a equação linear ordinária <sup>(1)</sup> com coeficientes constantes

$$(1) \quad a_0 D^n \varphi + a_1 D^{n-1} \varphi + \dots + a_{n-1} D \varphi + a_n \varphi = \psi,$$

em que  $\psi$  representa uma função conhecida,  $\varphi$  a função incógnita,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  os coeficientes constantes da equação (reais ou complexos) e  $D^i \varphi$  a derivada de ordem  $i$  da função  $\varphi$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Posto isto, proponhamo-nos determinar o integral geral da equação (1), admitindo que o símbolo  $D$  de derivação possa ser tratado com as regras usuais de cálculo, aplicáveis a símbolos numéricos; e vejamos até que ponto nos

pode conduzir este método, pondo de parte, por enquanto, preocupações de rigor. Começemos então por dar à equação (1) a forma seguinte:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n) \varphi = \psi$$

ou ainda

$$(2) \quad \varphi = \frac{1}{a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_{n-1} D + a_n} \cdot \psi.$$

A expressão que, no segundo membro desta última igualdade, figura a *multiplicar* por  $\psi$ , apresenta-se como função racional de  $D$ . Utilizemos então, a propósito, o conhecido processo da decomposição de uma função racional em soma de fracções simples, e, para maior clareza, comecemos por supor que as raízes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  da equação  $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$  (chamada a *equação característica* de (1)) são todas simples. Como se sabe, será possível calcular então  $n$  números  $k_1, k_2, \dots, k_n$  tais que

$$\frac{1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{k_1}{z - \alpha_1} + \frac{k_2}{z - \alpha_2} + \dots + \frac{k_n}{z - \alpha_n},$$

o que imediatamente nos sugere a ideia de dar à expressão (2) a forma

$$(3) \quad \varphi = \frac{k_1}{D - \alpha_1} \psi + \frac{k_2}{D - \alpha_2} \psi + \dots + \frac{k_n}{D - \alpha_n} \psi.$$

Se, por outro lado, fizermos

$$(4) \quad \varphi_i = \frac{k_i}{D - \alpha_i} \psi \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

virá

$$D\varphi_i - \alpha_i \varphi_i = k_i \psi \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ou ainda, em notação mais usual,

$$\varphi'_i(z) - \alpha_i \varphi_i(z) \equiv k_i \psi(z) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

(1) Os sistemas de equações lineares ordinárias a coeficientes constantes apresentam-se no estudo dos circuitos eléctricos a constantes concentradas, enquanto as equações lineares às derivadas parciais (a coeficientes constantes) se apresentam no estudo dos circuitos eléctricos a constantes uniformemente distribuídas (caso da equação dos telegrafistas).

Mas estas não são mais do que equações diferenciais lineares de 1.ª ordem, cujos integrais gerais são dados, como se sabe, pelas fórmulas

$$(5) \quad \varphi_i(z) \equiv k_i e^{x_i z} \int_a^z e^{-x_i t} \psi(t) dt + c_i e^{x_i z} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

em que  $c_i$  representa uma constante arbitrária e  $a$  um ponto do domínio da função  $\psi$ , escolhido como origem das integrações.

Ter-se-á portanto, atendendo a (3), (4), (5):

$$\varphi(z) \equiv \sum_{i=1}^n (k_i e^{x_i z} \int_a^z e^{-x_i t} \psi(t) dt + c_i e^{x_i z}).$$

Para passar agora ao caso geral, observemos que, se representarmos por  $\alpha$  um número complexo qualquer, e se pusermos

$$\chi_v = \frac{1}{(\alpha - D)^v} \quad (v=1, 2, 3, \dots),$$

virá

$$\chi_1 = \frac{1}{\alpha - D} \psi, \chi_2 = \frac{1}{\alpha - D} \chi_1, \dots, \chi_v = \frac{1}{\alpha - D} \chi_{v-1}$$

donde, por indução, e atendendo aos resultados precedentes,

$$\begin{aligned} \chi_v(z) \equiv & e^{x z} \int_a^z dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{v-1}} e^{-x t_v} \psi(t_v) dt_v + \\ & + c_1 z^{v-1} e^{x z} + \dots + c_{v-1} z e^{x z} + c_v e^{x z}, \end{aligned}$$

ou ainda, aplicando repetidamente o método da integração por partes,

$$\begin{aligned} \chi_v(z) \equiv & \frac{1}{(v-1)!} \int_a^z (z-t)^{v-1} e^{x(z-t)} \psi(t) dt + \\ & + (c_1 z^{v-1} + \dots + c_{v-1} z + c_v) e^{x z}. \end{aligned}$$

Este resultado permitir-nos-á construir, como anteriormente, o integral geral de (1), no caso em que a equação característica admita raízes múltiplas, visto que, em tal caso, a função racional de  $D$  que figura no segundo membro de (2) admitirá uma decomposição do tipo

$$\sum \frac{k}{(\alpha - D)^v}.$$

Ora o que é verdadeiramente belo é que, por verificação directa em (1), a expressão assim obtida, resulta ser efectivamente o integral geral da equação proposta. Em particular, para  $\psi=0$ , reencontra-se a fórmula que nos cursos clássicos costuma ser indicada para a integração da equação homogênea a coeficientes constantes. É claro que, para  $\psi \neq 0$ , se poderia usar ainda o método de LAGRANGE; mas o processo agora indicado é mais simples e elegante.

Os factos a que acabamos de nos referir fazem recordar, por uma natural associação de ideias, o que se passou, por exemplo, a respeito da introdução dos

números imaginários em Matemática. Com o auxílio de tais números (que chegaram a ser tidos na conta de *diabólicos*), tornou-se fácil dominar várias questões relativas aos números reais, como a resolução algébrica das equações de 3.º e 4.º grau, as quais de outro modo não fôra possível resolver. O símbolo  $i$ , introduzido para designar uma *inexistente, imaginária* raiz da equação  $x^2+1=0$ , só muito mais tarde veio a receber uma interpretação geométrica adequada (que não era de nenhum modo indispensável como garantia de rigor lógico); e, todavia, *tratando aquele símbolo como se fosse realmente um número*, obtinham-se resultados positivos, com uma elegância por vezes prodigiosa.

No exemplo anterior fomos levados a considerar uma *função racional* do símbolo  $D$  <sup>(1)</sup>. Passando porém a equações às derivadas parciais (lineares, a coeficientes constantes), como por ex. a equação da *propagação do calor*, no caso simples

$$D_t T - a^2 D_x^2 T = 0 \quad (-\infty < x < +\infty),$$

a técnica do cálculo simbólico tornou-se ainda mais audaz, e chegou a utilizar *funções irracionais e transcendent*es do símbolo  $D$ , tais como  $e^{tD}$ ,  $\sqrt{D}$ , etc., etc., servindo-se de desenvolvimentos em séries de potências de  $D$  ou  $D^{-1}$ , sem a mínima preocupação de rigor.

A verificação directa vinha, com frequência, confirmar a justeza da solução, obtida de modo tão aventureiro; mas não raramente se acabava por esbarrar em insucessos ou paradoxos que refeedavam o entusiasmo inicial e faziam desejar uma delimitação rigorosa das condições de aplicabilidade do método em questão.

Tornava-se pois necessário dar uma base de racionalidade ao que não passava de método empírico, conquanto fecundo. <sup>(2)</sup> E eram primeiro que tudo razões de ordem prática que o exigiam: principalmente a necessidade de evitar perdas de energia em tentativas inúteis ou em verificações por vezes laboriosíssimas. Vários esforços foram empregados neste sentido de racionalização: por um lado, foi-se levado a condensar todo o método simbólico no uso da transformação de LAPLACE <sup>(3)</sup>; por outro lado, procurou-se uma justificação mais directa do cálculo operatório, respeitando na medida do possível o seu espírito original.

(1) Este porém, ao contrário do que sucedia com o símbolo  $i$ , é já inicialmente provido dum significado preciso.

(2) Aos matemáticos impacientes que lhe pediam uma teoria do seu método, HEAVISIDE respondia: «Para comer eu não preciso de conhecer a teoria da digestão». Todavia ele morreu desiludido e semi-louco, em grande parte por causa das críticas recebidas.

(3) No próximo número darei indicações bibliográficas sobre o cálculo simbólico em geral.

À segunda categoria pertence a tentativa de justificação do cálculo simbólico do Prof. L. FANTAPPIÉ, como aplicação da sua teoria dos funcionais analíticos. Esta, por sua vez, nasceu como aplicação, ao campo das funções analíticas, dos métodos da Análise funcional instituídos por V. VOLTERRA e por S. PINCHERLE em fins do século passado.

**Noção russelliana de tipo. Análise funcional e Análise geral.** Observemos que, no caso simples do exemplo anterior, o cálculo simbólico pode justificar-se por meio de considerações muito elementares. Convirá entretanto aproveitar esta oportunidade para recordar e pôr em foco vários conceitos fundamentais que deverão ser utilizados mais adiante.

Sejam  $A, B$  dois conjuntos, finitos ou infinitos, constituídos por entidades cuja natureza deixaremos por enquanto indeterminada. Diremos definida uma correspondência unívoca,  $\Phi$ , entre os elementos de  $A$  e os elementos de  $B$ , ou, mais simplesmente, uma transformação unívoca  $\Phi$  de  $A$  em  $B$ , quando se tenha estabelecido um critério, pelo qual fique associado a cada elemento  $x$  de  $A$  um determinado elemento  $y$  de  $B$ , chamado *imagem* ou *transformado* de  $x$  por meio de  $\Phi$  e representável por  $\Phi(x)$  ou  $\Phi x$ . Duas transformações unívocas  $\Phi, \Psi$  de  $A$  em  $B$  serão consideradas *idênticas*, se, e só se, fôr verificada a condição:

$$\Phi(x) = \Psi(x),$$

qualquer que seja o elemento  $x$  de  $A$ .

Para exprimir este facto poderá escrever-se indistintamente

$$\Phi = \Psi, \quad \Phi(x) = \Psi(x), \quad \Phi(x) \equiv \Psi(x),$$

As transformações unívocas  $\Phi$  de  $A$  em  $B$  são ainda chamadas *operadores unívocos*, *operações unitárias unívocas* ou *funções unívocas* duma variável, de domínio  $A$  e de contradomínio  $B$ . Os elementos  $x$  de  $A$  serão chamados *objectos* ou *dados* da operação  $\Phi$ , e os elementos  $\Phi(x)$  de  $B$ , *resultados* da operação  $\Phi$ .

Em particular,  $A$  pode coincidir com  $B$ : neste caso tratar-se-á de transformações unívocas do conjunto  $A$  em si mesmo.

Particularizemos agora, em sucessivos exemplos, a natureza dos elementos de  $A$  e de  $B$ :

1) — Suponhamos que  $A$  é o conjunto dos números reais e que  $B=A$ . Transformações unívocas do conjunto  $A$  em si mesmo são, p. ex. o operador *sen*, o operador  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$ , a função  $\varphi$  dada pela fórmula  $\varphi(x) \equiv \equiv 3(x-1)^2$ , etc., etc.; mas não já o operador *log* ou o operador  $\psi$  dado por  $\psi(x) \equiv \sqrt{x^2-1}$ , os quais são definidos somente numa parte de  $A$ .

2) — Suponhamos agora que o conjunto  $A$  é constituído por todas as funções deriváveis até qualquer ordem, num mesmo domínio; e seja ainda  $B=A$ . Exemplo duma transformação unívoca do conjunto  $A$  em si mesmo é, neste caso, o operador de derivação,  $D$ , o qual faz corresponder a cada função  $\varphi$  pertencente a  $A$  uma determinada função  $\varphi'$  pertencente ainda a  $A$ . Mas tal operador já não é definido, p. ex., no conjunto das funções contínuas.

3) — Seja agora  $A$  o conjunto das funções integráveis num mesmo intervalo  $(a, b)$  e  $B$  o conjunto dos números reais. Exemplo duma transformação unívoca de  $A$  em  $B$  será, neste caso, o operador de integração, que faz corresponder a cada função  $\varphi$  do conjunto  $A$  o número real  $y = \int_a^b \varphi(t) dt$ .

4) — Seja finalmente  $A$  o conjunto dos números reais e  $B$  o conjunto das funções reais definidas no intervalo  $(-\infty, +\infty)$ . Uma transformação unívoca de  $A$  em  $B$  é, neste caso, p. ex. aquela que faz corresponder a cada elemento  $x$  de  $A$  a função  $\varphi_x$  definida por  $\varphi_x(y) \equiv \sin y/x$  (costuma dizer-se, neste caso, que  $\varphi_x$  é uma função dependente do parâmetro  $x$ ; substancialmente trata-se duma função de duas variáveis).

Ora é de notar que, enquanto no primeiro caso se apresentam operadores que transformam números em números (isto é, operações cujos dados são números e cujos resultados são ainda números), nos casos restantes trata-se de transformações de natureza mais complexa: operadores que transformam funções em funções, operadores que transformam funções em números e operadores que transformam números em funções. No caso considerado em 1), os operadores dir-se-ão de tipo 1 a respeito do conjunto dos números reais; nos casos restantes, dir-se-ão de tipo 2 a respeito do mesmo conjunto. Poder-se-à, naturalmente, prosseguir na elevação de tipo, considerando p. ex. operadores que transformem operadores de tipo 2 em números ou em operadores de tipo 1, etc., etc.<sup>(1)</sup>. Lógicamente nenhuma limitação se apresenta, e poderá mesmo prosseguir-se no transfinito.

O que importa é não confundir funções de tipo 2, com funções compostas. Quando, p. ex., se põe

$y = \int_0^1 \varphi(t) dt$ , supondo  $\varphi$  variável, pode dizer-se que  $y$  é função da função  $\varphi$ ; pois que, p. ex., à função  $\varphi(x) \equiv x^2+1$ , corresponderá o número  $y=4/3$ ; à função  $\varphi(x) \equiv \equiv \sqrt{1+3x}$ , corresponderá o número  $y=14/9$ ,

<sup>(1)</sup> Dum modo geral, o tipo duma operação será imediatamente superior aos tipos dos seus dados e dos seus resultados.

etc., etc. Mas não se poderá de nenhum modo dizer que  $y$  é função da variável  $t$ , a qual, por isso mesmo, recebe neste caso o nome de *variável aparente*. Não convirá portanto usar aqui a notação  $y = \Phi [\varphi (t)]$ . Para evitar confusões com as funções compostas, costuma escrever-se então a variável  $t$  como índice de  $\Phi$ , isto é:

$$y = \Phi_t [\varphi (t)];$$

ou mais simplesmente ainda

$$y = \Phi (\varphi).$$

Infelizmente, a palavra «função» costuma ser usada em duas acepções diversas: no sentido de «variável dependente» e no sentido de «operador»; daí, em grande parte, as dificuldades conceituais que a Análise funcional apresenta ao principiante.

O conceito de tipo lógico foi introduzido por BERTRAND RUSSELL, com o objectivo de resolver os paradoxos da teoria dos conjuntos. A intervenção dêste conceito em Análise funcional é de tal modo essencial, que não se pode deixar de pô-lo em evidência. Pode bem dizer-se que a distinção fundamental entre a

Análise clássica e a Análise funcional está em que, enquanto a primeira se ocupa predominantemente de números ou de operações sobre números, a segunda se dedica sistematicamente ao estudo de operações de tipo superior.

Mas começa, por outro lado, a fazer-se sentir a necessidade duma *síntese*, que resolva o *antagonismo* entre a Análise clássica e a Análise funcional, e restitua à Matemática aquela unidade que tem sido sempre o seu ideal. E é assim que surge, por obra de M. FRÉCHET e de M. H. MOORE, a Análise geral, cujo método consiste precisamente em deixar indeterminada a natureza dos elementos sobre os quais incidem as operações, fixando apenas, por meio de condições mais ou menos largas (axiomas, no sentido moderno da palavra) propriedades lógicas, formais, das relações definidas entre tais elementos. Estes podem, ser números, funções, etc. A orientação da Análise geral é portanto aquela orientação *axiomática, formal ou abstracta* que caracteriza todo o movimento da Matemática moderna, desde a Álgebra à Topologia e à Lógica matemática.

(Continua)

---

# GAZETA DE MATEMÁTICA

---

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDAO E DOS  
ESTUDANTES DE MATEMATICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VIII

N.º 32

MAIO-1947

## SUMÁRIO

A máquina calculadora electrónica, por *T. R. Kennedy Jr.*

Nota, por *J. Sebastião e Silva*

III — Variétés quadratiques spécialisées, por  
*Paul Belgodère*

II — Sobre o cálculo simbólico, por *José Sebastião e Silva*

### Pedagogia

Algumas deficiências em matemática de alunos dos Liceus,  
por *Maria Teodora Alves*

### Movimento Científico

Movimento matemático em Barcelona

### Matemáticas Elementares

Pontos de exames do Curso Complementar de Ciências

Exames de admissão ao estágio — 8.º grupo

### Matemáticas Superiores

Pontos de exames de frequência

Problemas propostos e soluções recebidas

Boletim Bibliográfico

NÚMERO AVULSO: ESC. 10\$00

---

DEPOSITÁRIO:

## II. Sobre o Cálculo Simbólico

(continuação do n.º 31)

por José Sebastião e Silva

**Produto de operadores.** Consideremos três conjuntos  $A, B, C$  quaisquer, e sejam:  $\Phi$ , uma transformação unívoca de  $A$  em  $B$ ;  $\Psi$ , uma transformação unívoca de  $B$  em  $C$ . Chama-se *produto* de  $\Phi$  por  $\Psi$ , e representa-se por  $\Phi \cdot \Psi$  (ou simplesmente por  $\Phi\Psi$ ), aquela transformação unívoca de  $A$  em  $C$  que equivale a aplicar sucessivamente  $\Psi, \Phi$  (*primeiro  $\Psi$  e depois  $\Phi$* ); isto é, em símbolos:

$$(\Phi \cdot \Psi)(x) = \Phi(\Psi(x)), \text{ para cada } x \in A. \quad (1)$$

É claro que, em particular, os conjuntos  $A, B, C$  podem coincidir entre si.

*Exemplo:* Se representarmos por  $H$  a classe dos seres humanos e escrevermos « $y = pad\ x$ » como abreviatura de « $y$  é pai de  $x$ » e « $y = mad\ x$ » como abreviatura de « $y$  é mãe de  $x$ » (designando por  $x, y$  elementos indeterminados de  $H$ , sem distinção de sexo), é claro que os símbolos *pad*, *mad* representarão operadores definidos pelo menos numa parte  $H^*$  de  $H$ —operadores que fazem corresponder a cada elemento  $x$  de  $H^*$  um e um só elemento (*pad*  $x$  ou *mad*  $x$ ) de  $H$ . Ora é fácil ver que o produto *pad* . *mad* não é mais do

(1) A expressão  $x \in A$  deve ler-se aqui « $x$  pertencente a  $A$ ».

que o operador correspondente à expressão «avô materno de», pois que, por definição:

(*pad*).

enquanto o produto *mad.pa*

dente à expressão «avô paterna de». E vê-se imediatamente que

*mad*

o que basta para pôr em evidência este facto de notável interesse em Matemática: *que a multiplicação entre operadores não é, no caso geral, uma operação comuta*

Dir-se-á que dois operadores  $\Phi, \Psi$  são *permutáveis*, quando se tiver, excepcionalmente,  $\Phi\Psi = \Psi\Phi$ .

*Exemplos:* 1) As funções numéricas  $\varphi(x) \equiv x-1$ ,  $\psi(x) \equiv \sqrt[3]{x}$ , que constituem, manifestamente, transformações unívocas do conjunto dos números reais em si mesmo, não são permutáveis<sup>(1)</sup>, pois que se tem  $\varphi(\psi(x)) \equiv \sqrt[3]{x}-1$ ,  $\psi(\varphi(x)) \equiv \sqrt[3]{x-1}$ , e portanto  $\varphi \cdot \psi \neq \psi \cdot \varphi$  (isto é, as operações de «subtrair uma unidade» e de «extrair a raiz cúbica» não são permutáveis). Mas se pusermos  $\varphi(x) \equiv \sqrt[3]{x}$ ,  $\psi(x) \equiv x^2$ , será  $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$ , pois que se tem  $\sqrt[3]{x^2} \equiv (\sqrt[3]{x})^2$  (isto é, as operações de «extrair a raiz cúbica» e de «elevar ao quadrado» são permutáveis).

2) Seja  $A$  um conjunto formado por 4 elementos, que designaremos por  $a, b, c, d$ . Uma transformação unívoca do conjunto  $A$  em si mesmo<sup>(2)</sup> será, por exemplo, o operador  $\sigma$  assim definido:  $\sigma(a) = c, \sigma(b) = a, \sigma(c) = b, \sigma(d) = d$ ; ou, mais condensadamente, conforme a notação usual da teoria de GALOIS:

$$\sigma = \begin{pmatrix} b & c & a & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ (por cima de cada letra a sua trans-}$$

formada por meio de  $\sigma$ ). Uma outra transformação unívoca do conjunto  $A$  em si mesmo será, por exem-

plo, o operador  $\theta = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ . er-se-á então

$$\sigma\theta = \begin{pmatrix} a & c & b & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \theta\sigma = \begin{pmatrix} b & a & b & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ e, portanto,}$$

$\sigma\theta \neq \theta\sigma$ . Mas já, por exemplo, os operadores

$$\begin{pmatrix} c & a & d & c \\ a & a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ são permutáveis, como é fácil verificar.}$$

(1) Convém notar que, no caso das funções numéricas, se apresentam dois conceitos não equivalentes de *produto de duas funções*  $\varphi, \psi$ : 1) o produto de  $\varphi$  por  $\psi$  é a função  $\chi$  tal que  $\chi(x) \equiv \varphi(x) \cdot \psi(x)$  [conceito usual]; 2) o produto de  $\varphi$  por  $\psi$  é a função  $\theta$  tal que  $\theta(x) \equiv \varphi(\psi(x))$  [conceito aqui considerado]. Para os distinguir, chamaremos ao primeiro *produto elementar* e ao segundo *produto operatorio*.

(2) É fácil ver que entre o conjunto  $A$  e ele mesmo se podem definir ao todo  $4! = 24$  transformações unívocas.

Todavia, a *multiplicação entre operadores* *uma opera*

$= (\Phi\Psi)\Theta$ , quaisquer que sejam os operadores  $\Phi, \Psi, \Theta$  e os conjuntos entre os quais eles operam; podendo escrever-se então mais simplesmente  $\Phi\Psi\Theta$  em vez de  $\Phi(\Psi\Theta)$  ou de  $(\Phi\Psi)\Theta$ .

*Observa*

usa a notação  $\Phi x$ , é cómodo dizer que  $\Phi x$  representa o *produto do operador  $\Phi$  pelo elemento  $x$* . Não resultará daí qualquer inconveniente, mas apenas vantagem, desde que se evite confusão entre o símbolo de *operador*

**Potências de operadores.** Do anterior conceito de *produto de operadores* resulta imediatamente uma natural definição de *potência  $\Phi^n$  dum operador  $\Phi$*  (com  $n$  inteiro  $> 1$ ). Será, por definição:

$$\Phi^n = \Phi \cdot \Phi \dots \Phi \text{ (n vezes).}$$

Assim, por exemplo, se representarmos por  $D$  o operador de derivação, será  $D^n$  a operação que consiste em derivar  $n$  vezes sucessivas (*derivação de ordem  $n$* ). Análogamente, o símbolo *pad<sup>n</sup>* designará, segundo as convenções precedentes, o operador correspondente à expressão «o  $n$ -ésimo antepassado em linha masculina de». Outro exemplo: se fôr  $\varphi(x) \equiv \sqrt{1-x}$ , será

$$\varphi^2(x) \equiv \sqrt{1-\sqrt{1-x}}, \quad \varphi^3(x) \equiv \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}, \text{ etc.}^{(1)}.$$

Por outro lado, é natural pôr ainda, por definição:  $\Phi^1 = \Phi$ , qualquer que seja o operador  $\Phi$ .

Finalmente, é natural convencionar que a *potência de expoente 0 dum operador  $\Phi$*  qualquer seja o *operador idêntico* (ou *identidade*), isto é, aquele operador que faz corresponder a cada elemento  $x$  o mesmo elemento  $x$ ; operador que representaremos por  $I$ . De acôrdo com tal convenção está o facto de se dizer que a *derivada de ordem 0* de qualquer função  $\varphi$  é a própria função  $\varphi$ , o que, simbolicamente, se exprime dêste modo:  $D^0\varphi = \varphi$  (isto é  $D^0 = I$ ).

Todas as anteriores definições de potência podem manifestamente resumir-se no seguinte esquema de recorrência:  $\Phi^0 = I$ ;  $\Phi^{n+1} = \Phi^n \cdot \Phi$ . E é fácil ainda demonstrar as propriedades:  $\Phi^m \Phi^n = \Phi^n \Phi^m = \Phi^{m+n}$ ,  $(\Phi^m)^n = \Phi^{mn}$ , as quais resultam de associatividade da multiplicação.

**Soma de operadores.** O conceito de *soma  $\Phi + \Psi$  de dois operadores  $\Phi, \Psi$*  (com um mesmo domínio  $A$  e

(1) É preciso não perder de vista que, no caso das funções numéricas, teremos dois conceitos diferentes aos dois conceitos de *produto* atrás citados. Assim, por exemplo, a expressão  $\sin^2 x$  é susceptível de dois significados diversos: 1)  $\sin^2 x \equiv \sin x \cdot \sin x$  [significado usual]; 2)  $\sin^2 x \equiv \sin(\sin x)$  [conceito aqui considerado].



um mesmo contradomínio  $B$ ) só costuma apresentar-se de modo natural, quando o conceito de *adição* se encontre já definido a respeito dos elementos de  $B$ . Em tal hipótese, chama-se *soma de  $\Phi$  com  $\Psi$* , e representa-se por  $\Phi + \Psi$ , aquele operador que faz corresponder a cada elemento  $x$  de  $A$  o elemento  $\Phi x + \Psi x$  de  $B$ ; isto é, em símbolos

$$(\Phi + \Psi)x = \Phi x + \Psi x, \text{ para cada } x \in A.$$

No caso das funções numéricas tal conceito coincide manifestamente com aquele usual. Assim, por exemplo, a soma das funções  $\varphi, \psi$  dadas pelas expressões  $\varphi x \equiv \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $\psi x \equiv e^x \sin x$  é a função  $\varphi + \psi$  dada pela expressão  $(\varphi + \psi)x \equiv \sqrt{x^2 - 1} + e^x \sin x$ .

Por outro lado, visto que entre as funções numéricas se encontra assim definida uma *adição*, é claro que também, pelo mesmo processo, ficará definida uma *adição* entre os operadores que operam sobre funções numéricas (operadores de tipo 2); e assim sucessivamente. Ter-se-á, por exemplo, segundo a definição geral (representando por  $\varphi$  uma qualquer função derivável):

$$(D^3 + D + I)\varphi \equiv D^3\varphi + D\varphi + \varphi.$$

Não fará porém sentido falar, por exemplo, da soma dos operadores *pad*, *mad* atrás considerados, por isso mesmo que não está definida nenhuma *adição* entre seres humanos (isto é, nenhuma operação que faça corresponder a cada par de pessoas  $x, y$  uma determinada pessoa  $x + y$  chamada *soma* das duas primeiras).

Mas já faz sentido falar da soma das funções *número de irmãos de  $x$* , *número de irmãs de  $x$* , definidas em  $H$ , mas de contradomínio numérico (dados: *seres humanos*; resultados: *números*).

É fácil agora verificar o seguinte facto importante: *Se a adição definida em  $B$  é associativa, comutativa e invertível* <sup>(1)</sup>, *o mesmo acontecerá a respeito da adição por ela induzida entre os operadores de contradomínio  $B$ .*

Ocorre ainda perguntar se a multiplicação atrás definida entre operadores é *distributiva* respeito da *adição* agora introduzida entre os mesmos; isto é, se as igualdades  $\Phi(\Psi + \Theta) = \Phi\Psi + \Phi\Theta$ ,  $(\Phi + \Psi)\Theta = \Phi\Theta + \Psi\Theta$  têm lugar quaisquer que sejam as transformações unívocas  $\Phi, \Psi, \Theta$  de  $A$  em si mesmo (supondo definida em  $A$  uma *adição*). Ora, como o leitor pode facilmente constatar, *tal propriedade não se verifica no caso geral* <sup>(2)</sup>, *mas ela verifica-se, com certeza, se nos limitarmos à*

*família daqueles operadores  $\Phi$  que satisfazem à condição*

$$\Phi(x + y) = \Phi x + \Phi y,$$

quaisquer que sejam os elementos  $x, y$  de  $A$ ; operadores que diremos *distributivos* a respeito da *adição*.

Exemplo notável dum operador (de tipo 2) distributivo a respeito da *adição* é, precisamente, o operador de derivação, pois que se tem:  $D(\varphi + \psi) = D\varphi + D\psi$  quaisquer que sejam as funções deriváveis  $\varphi, \psi$ . Mas já não é distributivo a respeito da *adição*, por exemplo, o operador  $\Theta$  assim definido:  $\Theta_x \varphi(x) \equiv [D_x \varphi(x)]^2$ . Distributivos a respeito da *adição* são ainda os operadores  $M$  da forma  $M_x \varphi(x) \equiv \gamma(x) \cdot \varphi(x)$ , em que  $\gamma(x)$  representa uma função fixada arbitrariamente. É interessante observar que os operadores desta forma não são permutáveis com  $D$ .

**Operadores numéricos.** Entre os operadores definidos em campos numéricos ou funcionais figuram, em primeiro lugar, os *multiplicadores numéricos*. Seja, por exemplo,  $\mathcal{F}$  o conjunto das funções reais definidas num mesmo intervalo: todo o número real  $a$  fará corresponder a cada função  $f$  pertencente a  $\mathcal{F}$  a função  $a \cdot f$  pertencente ainda a  $\mathcal{F}$  <sup>(1)</sup>. Dêste modo, cada número real  $a$  definirá uma transformação unívoca de  $\mathcal{F}$  em si mesmo, de tal maneira que:

1) A soma dos operadores definidos por dois números  $a, b$  coincide com o operador definido pelo número  $a + b$ ; pois que se tem  $af + bf = (a + b)f$ , qualquer que seja  $f \in \mathcal{F}$ .

2) O produto dos operadores definidos pelos números  $a, b$  coincide com o operador definido pelo número  $a \cdot b$ ; pois que se tem  $a(bf) = (ab)f$ , qualquer que seja  $f \in \mathcal{F}$ .

3) O operador definido pelo número 1 coincide com a operação idêntica,  $I$ .

Nestas condições, não haverá qualquer inconveniente em confundir os números com os operadores por eles definidos (como multiplicadores). Assim, por exemplo, o símbolo  $2/3$  representará indiferentemente o *número*  $2/3$  ou aquele operador que faz corresponder a cada função  $f$  a função  $2/3 f$ , etc. Análogamente, o *operador idêntico*  $I$  poderá confundir-se com o *número* 1 e o *operador nulo* com o *número* 0. Por outro lado, ficará automaticamente estabelecido o que deva entender-se por *soma*  $a + \Phi$  dum *número*  $a$  com um operador  $\Phi$ , por *produto*  $a \cdot \Phi$

(1) Chamamos naturalmente *invertibilidade da adição* à possibilidade de subtração em qualquer caso.

(2) É todavia fácil ver que a segunda igualdade,  $(\Phi + \Psi)\Theta = \Phi\Theta + \Psi\Theta$  (*distributividade à direita*) se verifica em qualquer caso.

(1) É claro que consideramos aqui como produto dum *número*  $a$  por uma função  $f$  a função  $a \cdot f$  assim definida:  $(a \cdot f)(x) \equiv a \cdot f(x)$ . Também é manifesto que as considerações aqui desenvolvidas se aplicam, *mutatis mutandis*, aos conjuntos de funções complexas de variável complexa definidas num mesmo domínio: então os multiplicadores numéricos serão números complexos.

dum número  $a$  por um operador  $\Phi$  e por produto  $\Phi \cdot a$  dum operador  $\Phi$  por um número  $a$ —uma vez estabelecido que os números se podem conceber como operadores.

[Para concretizar ideas, tomemos para exemplo um circuito eléctrico simples, com uma resistência  $r$ , uma indutância  $l$  e uma força electromotriz  $\mathcal{E}(t)$ , função do tempo. A intensidade  $\mathcal{I}(t)$  da corrente deste circuito deve, como se sabe, verificar a equação diferencial  $r \mathcal{I}(t) + l \frac{d}{dt} \mathcal{I}(t) \equiv \mathcal{E}(t)$ , ou seja, mais condensadamente:  $(r + l D)\mathcal{I} = \mathcal{E}$ . Se então puzermos  $r + l D = \Theta$ , virá  $\Theta \mathcal{I} = \mathcal{E}$ , e podemos dizer, por analogia com a lei de Ohm, que o operador  $\Theta$ —soma do operador numérico  $r$  com o operador diferencial  $lD$ —representa a resistência funcional do circuito considerado. Mas é preciso não esquecer que nem  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{I}$  são números (mas sim funções), nem  $\Theta$  é um coeficiente numérico, tal como  $r$ ].

Posto isto, poderemos já definir *função racional inteira dum operador*  $\Phi$ . Daremos êsse nome a toda a função de  $\Phi$  que se exprima por meio dum número finito de sucessivas adições e multiplicações a partir de  $\Phi$  e de constantes numéricas.

O que desde logo ocorre perguntar é se é lícito tratar as funções racionais inteiras de operadores com as mesmas regras que se usam para as funções racionais inteiras de variáveis numéricas<sup>(1)</sup>, e se, em particular, toda a função racional inteira de  $\Phi$  é redutível à forma dum polinómio inteiro em  $\Phi$ :

$$a_0 \Phi^n + a_1 \Phi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \Phi + a_n$$

(em que  $a_0, a_1, \dots, a_n$  designam constantes numéricas arbitrárias e  $n$  um número natural qualquer).

Ora, como se pode ver facilmente, a resposta é negativa no caso geral, mas afirmativa se nos limitarmos à classe daqueles operadores  $\Phi$  que verificam as condições seguintes: 1)  $\Phi(f+g) = \Phi f + \Phi g$ ; 2)  $\Phi(af) \equiv a(\Phi f)$ , quaisquer que sejam o número  $a$  e as funções  $f, g$  pertencentes ao domínio de  $\Phi$ . A primeira destas propriedades já sabemos que se exprime dizendo que  $\Phi$  é distributivo a respeito da adição; quanto à segunda ela exprime-se, naturalmente, dizendo que  $\Phi$  é permutável com os multiplicadores numéricos [podíamos escrever mais simplesmente  $\Phi a = a\Phi$  em vez de  $\Phi(af) = a(\Phi f)$ ]; finalmente, as propriedades 1), 2), verificadas conjuntamente, exprimem-se dizendo que o operador  $\Phi$  é linear.

Exemplo notável dum operador linear é, precisa-

mente, o operador de derivação,  $D$ , pois que, além de ser, como já vimos, distributivo a respeito de adição, êle é ainda permutável com os factores numéricos [ $D(af) = a(Df)$ , qualquer que sejam o número  $a$  e a função derivável  $f$ ]. Dêste modo, todas as regras aplicáveis às funções racionais inteiras duma variável numérica, serão ainda aplicáveis às funções racionais inteiras do símbolo  $D$ . Assim, por exemplo, ter-se-á:

$$(D^2 + 2D - 3)(D^2 - 2D - 3) = D^4 - 10D^2 + 9; D^4 - 5D - 36 = (D - 3)(D + 3)(D - 2i)(D + 2i), \text{ etc., etc.}$$

Exemplos de operadores lineares são os próprios operadores numéricos. Tem-se, com efeito: 1)  $a(f+g) = af + ag$ ; 2)  $a(bf) = b(af)$ , quaisquer que sejam as funções  $f, g$  e os números  $a, b$ .

Outro exemplo de linearidade é-nos dado pelos operadores  $M$  atrás citados.

Todavia, nós aqui limitámo-nos a definir o conceito de linearidade para operadores cujos domínio e contradomínio são constituídos por funções<sup>(1)</sup>. Ora a verdade é que tal conceito se estende fecundamente a muitos outros campos, e se quizermos, por uma racional medida de economia de pensamento, abraçar numa mesma teoria o maior número possível de domínios, devemos manter-nos fiéis ao método da Análise Geral: *abstrair completamente da natureza dos entes que constituem os dados e os resultados dos operadores, retendo apenas as propriedades formais de certas relações definidas entre esses entes* (por exemplo, as propriedades formais da adição).

Ê-se dêste modo levado, naturalmente, ao conceito abstracto de *sistema vectorial*.

Observe bem o leitor como o conceito que vamos definir (para o qual se adoptou a designação «sistema vectorial») corresponde exactamente ao fim que nos propomos atingir. Ele permitirá definir com a máxima amplitude possível o conceito de linearidade, conservando o que nêste existe de essencial. Em particular, tornar-se-á lícito falar de *funções racionais (inteiras ou fraccionárias) de um ou mais operadores lineares permutáveis entre si*, e aplicar a tais funções as regras do cálculo algébrico ordinário.

Quando depois se tratar de definir *funções irracionais ou transcendentais de operadores lineares*, será necessário restringir o conceito de «sistema vectorial», inserindo nele uma conveniente noção de «limite». Poderemos então instituir em bases rigorosas um *cálculo dos operadores lineares*, de que será apenas um caso particular o *cálculo simbólico dos electrotécnicos* (pelo menos numa parte em que este é admissível).

(1) Deter-nos-emos oportunamente sobre o sentido preciso desta questão. Trata-se agora apenas de sugerir o problema.

(1) O conceito estende-se imediatamente ao caso dos operadores de domínio e contradomínio numéricos; mas é fácil ver que as únicas funções lineares duma variável numérica são aquelas da forma  $\varphi x \equiv ax$ , em que  $a$  designa uma constante numérica arbitrária. Os operadores  $\log$ ,  $\sqrt{\phantom{x}}$ ,  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ , etc. são notoriamente não lineares.

E não haverá nisto nada de arbitrário ou de artificioso. Tudo tenderá naturalmente para um fim, como o leitor vai ter ocasião de constatar.

**Sistemas vectoriais.** <sup>(1)</sup> Por *sistema vectorial* ou *sistema de vectores relativo ao corpo real*,  $R$ , entende-se toda a classe  $S$  de entidades  $u, v, \dots$  de natureza qualquer, a respeito das quais sejam definidas duas operações — *adição* e *multiplicação escalar* — de acordo com os preceitos seguintes:

$V_1$ ) Para todo o par  $u, v$  de elementos de  $S$  existe um e um só elemento de  $S$  chamado *soma* de  $u$  com  $v$  e representável por  $u+v$ ;

$V_2$ )  $u+v=v+u$ , quaisquer que sejam  $u, v \in S$  <sup>(2)</sup> (*comutatividade*);

$V_3$ )  $(u+v)+w=u+(v+w)$ , quaisquer que sejam  $u, v, w \in S$  (*associatividade*);

$V_4$ ) Dados dois quaisquer elementos  $u, v$  de  $S$ , existe sempre um e um só elemento  $x$  de  $S$ , tal que  $u+x=v$ ; podendo escrever-se então  $x=v-u$  (*invertibilidade*);

$V_5$ ) Para cada par  $a, u$  formado por um número real  $a$  e por um elemento  $u$  de  $S$ , existe um e um só elemento de  $S$  chamado *produto* de  $a$  por  $u$  e representável por  $au$ ;

$V_6$ )  $a(u+v)=au+av$ ;

$V_7$ )  $(a+b)u=au+bu$ ;

$V_8$ )  $a(bu)=(ab)u$

$V_9$ )  $1 \cdot u=u$ ;

quaisquer que sejam  $u, v \in S$ ;  $a, b \in R$ .

As propriedades  $V_1$  a  $V_4$ , quando verificadas conjuntamente, costumam também exprimir-se, dizendo que a classe  $S$  constitui um *grupo comutativo* ou *abeliano* a respeito da adição. De tais propriedades resulta, em particular, que existirá necessariamente em  $S$  um e um só elemento  $x$  tal que:  $u+x=u$ , qualquer que seja  $u \in S$ . Representaremos por  $O$  este elemento e chamar-lhe-emos o *zero* do sistema  $S$ .

Os elementos  $u, v, \dots$  do sistema vectorial  $S$  serão chamados *vetores*, e os elementos  $a, b, \dots$  do corpo  $R$  serão chamados *escalares* <sup>(3)</sup>.

Na anterior definição, o corpo real  $R$  pode ser substituído por um outro corpo qualquer, por exem-

plo, o corpo complexo,  $K$ , o corpo racional,  $Ra$ , etc., e assim teremos: *sistemas vectoriais relativos ao corpo complexo*, *sistemas vectoriais relativos ao corpo racional*, etc.

*Exemplos:* a) Um primeiro exemplo dum sistema vectorial relativo ao corpo real é-nos fornecido pelos vectores do cálculo vectorial elementar. Como se sabe, cada vector é, neste caso, definido por um segmento orientado  $\overline{AB}$ , isto é, um segmento ao qual se atribui um determinado *sentido* de percurso, dizendo-se que *dois segmentos orientados* definem o *mesmo vector*, se, e só se, têm a mesma *direcção*, o mesmo *sentido* e o mesmo *comprimento*. Por outro lado, sabe-se o que se entende então por *soma* de *dois vectores* (obtida segundo a regra do paralelogramo) e por *produto dum número real por um vector*; e é bem fácil constatar que as operações assim introduzidas verificam as condições  $V_1$  a  $V_9$ .

b) Convencionemos agora chamar *vector n-dimensional* a toda a sucessão  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  números reais, chamando *soma* de *dois vectores*  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  à sucessão  $(x_1+x_1^*, x_2+x_2^*, \dots, x_n+x_n^*)$  e *produto dum número real por um vector*  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  à sucessão  $(ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$ . É fácil ver então que o conjunto  $R_n$  de todas estas sucessões (chamadas agora *vetores n-dimensionais*) constitui, com as duas operações que nele introduzimos, um sistema de vectores relativo ao corpo real. A tal sistema  $R_n$  dá-se o nome de *espaço vectorial cartesiano a n dimensões reais*.

Se, em vez de sucessões de  $n$  números reais, considerarmos as sucessões de  $n$  números complexos, seremos conduzidos ao conceito de *espaço vectorial cartesiano*  $K_n$ , a  $n$  *dimensões complexas*, o qual constitui, manifestamente, um sistema vectorial relativo ao corpo complexo.

c) Um outro exemplo dum sistema de vectores relativo ao corpo real é o conjunto  $\mathcal{F}$ , já atrás considerado, das funções reais de variável real definidas num mesmo intervalo, dando às expressões «*soma*  $f+g$  de duas funções  $f, g$ » e «*produto*  $af$  dum número real  $a$  pela função  $f$ » o significado que usualmente lhes é atribuído. Os *vetores* são portanto, neste caso, as *funções*  $f, g, \dots$

Se, em vez das funções reais da variável real, considerarmos funções complexas da variável complexa (definidas num mesmo domínio), teremos aí um novo exemplo dum sistema vectorial relativo ao corpo complexo.

Muitos outros exemplos de sistemas vectoriais podiam ser citados ainda.

**Operadores lineares. Anéis.** Sejam  $S, S^*$  dois quaisquer sistemas vectoriais (relativos ao mesmo

<sup>(1)</sup> Muitos autores usam a designação «*espaço vectorial*» ou ainda «*espaço linear*», com o significado que atribuímos aqui a «*sistema vectorial*».

<sup>(2)</sup> A expressão « $u, v \in S$ » deve ler-se aqui « $u, v$  pertencem a  $S$ ».

<sup>(3)</sup> A razão de tal terminologia está em que ela sugere analogias fecundas com as noções do cálculo vectorial ordinário.

corpo) e seja  $\Phi$  uma transformação unívoca de  $S$  em  $S^*$ . Diz-se que o operador  $\Phi$  é *linear*, quando verifica as condições:  $\Phi(u + v) = \Phi u + \Phi v$ ,  $\Phi(au) = a(\Phi u)$ , quaisquer que sejam os vectores  $u, v \in S$  e o escalar  $a$ . É fácil ver desde logo que o produto ou a soma de dois operadores lineares é ainda um operador linear.

Representemos por  $\Lambda(S)$  o conjunto de todas as transformações lineares do sistema vectorial  $S$  em si mesmo. Facilmente se reconhece que a adição e a multiplicação definidas em  $\Lambda(S)$  conforme as convenções precedentes gozam das seguintes propriedades:

I) *Propriedades da adição*: univocidade, associatividade, comutatividade e reversibilidade (isto é,  $\Lambda(S)$  forma um grupo comutativo a respeito da adição).

II) *Propriedades da multiplicação*: univocidade, associatividade e existência de unidade (o operador idêntico).

III) *Propriedade mista*: distributividade da multiplicação a respeito da adição.

Todas estas propriedades, assim verificadas conjuntamente — excluída a da existência de unidade — exprimem-se dizendo que o conjunto  $\Lambda(S)$  constitui um anel a respeito das duas operações consideradas.

*Nota*: Observemos que também o conjunto dos números inteiros (positivos e negativos), o conjunto dos números pares, o conjunto dos polinómios inteiros em  $x$ , etc., etc. constituem anéis a respeito da adição e da multiplicação ordinárias, mas com estas diferenças capitais: 1) nesses últimos conjuntos a multiplicação é comutativa; 2) o produto  $a \cdot b$  de dois elementos nesses conjuntos não pode ser nulo, sem que um pelo menos dos factores o seja; ao passo que, na família  $\Lambda(S)$ , excluído o caso de  $S$  ser unidimensional<sup>(1)</sup>, a multiplicação não é comutativa e existem pares de elementos (chamados *divisores de zero*) cujo produto é nulo sem que nenhum dos factores o seja. Pois bem: dá-se o nome de *domínios de integridade* àquêles anéis, como o anel dos inteiros, em que a multiplicação é comutativa e o anulamento do produto implica o anulamento de um, pelo menos, dos factores.

Observemos por outro lado que também o conjunto dos números racionais, o conjunto dos números reais o conjunto das funções racionais, etc., são domínios de integridade — mas com esta diferença ainda: que, nesses últimos conjuntos, ao contrário do que sucede

nos primeiros, a equação  $ax=b$  é resolúvel para todos os pares de elementos  $a, b$  tais que  $a \neq 0$ <sup>(1)</sup>. Dá-se o nome de *corpos* ou *domínios de racionalidade* a tais domínios de integridade.

É ainda de notar que o anel  $\Lambda(S)$  contém sempre um corpo: o corpo dos operadores escalares.

**Transformações lineares entre espaços cartesianos** — Supondo fixado, no espaço ordinário, um ponto  $O$  como origem, cada ponto  $A$  do espaço definirá um vector: o vector representado por  $\vec{OA}$ . Transformações lineares deste sistema vectorial em si mesmo são, por exemplo, as homotetias em relação à origem (correspondentes aos operadores escalares), as rotações em torno da origem, as projecções cilíndricas sobre planos que passam pela origem, etc., etc.

Consideremos, para fixar ideias, o espaço vectorial  $R_2$ , cujos elementos são, como sabemos, os pares ordenados de números reais (vectores do plano); e representemos por  $\Phi$  o operador que faz corresponder a cada elemento  $(x_1, x_2)$  de  $R_2$  o elemento  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  de  $R_2$  dado pelo sistema

$$(1) \begin{cases} \bar{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \bar{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

em que  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  representam números reais quaisquer. Pois bem: é fácil ver que não só a transformação  $\Phi$  assim definida é linear, como toda a transformação linear de  $R_2$  em  $R_2$  se pode reduzir à forma (1) mediante uma fixação oportuna dos coeficientes  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ . Dêste modo, cada transformação linear de  $R_2$  em  $R_2$  será univocamente representada pelo qua-

dro ou matriz  $\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}$  — de tal maneira que matrizes

distintas representarão operadores distintos. O operador idêntico,  $1$ , será então representado pela matriz

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}, \text{ e o operador } 0 \text{ pela matriz } \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix};$$

dum modo geral, cada operador escalar  $a$  terá a representação

$$\begin{Bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Bmatrix}. \text{ A soma de dois operadores } \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix} \text{ será, como é fácil ver, o operador}$$

$$\begin{Bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{Bmatrix}; \text{ e o produto dos mesmos ope-}$$

(1) Diz-se que um sistema vectorial  $S$  é unidimensional quando todos os elementos de  $S$  se podem obter de um deles ( $\neq 0$ ), multiplicando-o por escalares.

(1) A referida propriedade do anulamento do produto está já implícita na resolubilidade de  $ax=b$  para  $a \neq 0$  (admitidas as restantes propriedades). Dêste modo, podemos definir corpo como todo o anel que, com a exclusão do zero, forma um grupo comutativo a respeito da multiplicação.

radores, na ordem em que estão escritos, será o operador

$$\begin{Bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{Bmatrix}.$$

O leitor pode agora constatar que, por exemplo, as

transformações  $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$ ,  $\begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$  não são permutáveis,

e que o produto  $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$  é nulo sem que ne-

nhum dos factores o seja — o que mostra que o anel  $\Lambda(R_2)$  não é um domínio de integridade.

Tôdas estas considerações se estendem imediatamente ao caso dos espaços vectoriais cartesianos com

um número  $n$  qualquer de dimensões, reais ou complexas; então, os operadores lineares serão representados por matrizes de ordem  $n$ , isto é, matrizes com  $n$  linhas e  $n$  colunas.

(Continua)

**Nota:** Não tendo sido possível terminar no presente número esta série de artigos, fica transferida para o número seguinte a bibliografia já prometida.

**Errata:** No artigo do número precedente, pág. 2, linhas 13, 15, 30, onde está escrito  $\alpha - D$ , deve ler-se  $D - \alpha$ .

---

# GAZETA DE MATEMÁTICA

---

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS  
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VIII

N.º 33

AGOSTO-1947

## SUMARIO

Développantes généralisées d'une courbe plane,  
por *Gabriel Viguier*

III — Sobre o cálculo simbólico, por *José Sebastião e Silva*

A propósito de uma nota, por *J. Sebastião e Silva*

### Pedagogia

Um método activo no ensino da geometria intuitiva  
por *Emma Castelnuovo*

Resultados dum exame de geometria — 1.º ciclo  
por *Maria Teodora Alves*

### Matemáticas Elementares

Pontos de exames de aptidão às Escolas Superiores — Julho de 1947

### Matemáticas Superiores

Pontos de exames de frequência e finais

Álgebra Superior — Matemáticas Gerais

Geometria Descritiva

Cálculo Infinitesimal — Análise Superior

Boletim Bibliográfico

NÚMERO AVULSO: ESC. 10500

---

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

### III. Sobre o Cálculo Simbólico

(Continuação dos n.ºs 31 e 32)

por José Sebastião e Silva

#### Funções racionais inteiras de operadores lineares.

Sejam  $S$  um sistema vectorial e  $\Phi$  uma transformação linear do sistema  $S$  em si mesmo. Por *função racional inteira do operador*  $\Phi$  (suposto variável ou indeterminado) entendemos toda a função  $F(\Phi)$  que se possa exprimir mediante um número finito de adições e multiplicações a partir de  $\Phi$  e de constantes numéricas (isto é, escalares). Visto que a soma e o produto de dois operadores lineares é ainda um operador linear, segue-se que toda a função racional inteira dum operador linear é ainda um operador linear.

As mais simples funções racionais inteiras de  $\Phi$  que se possam apresentar são, naturalmente, a função  $F(\Phi) \equiv \Phi$  e todas aquelas do tipo  $F(\Phi) \equiv a$ , em que  $a$  representa uma constante numérica qualquer. Por definição, todas as outras funções racionais inteiras de  $\Phi$  se obtêm a partir destas funções elementares, mediante um número finito de adições e de multiplicações. Donde resulta que toda a função racional inteira de  $\Phi$  se pode escrever sob a forma dum *polinómio inteiro* em  $\Phi$ :

$$F(\Phi) \equiv a_0 \Phi^n + a_1 \Phi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \Phi + a_n;$$

pois que, como é fácil ver: 1) a função  $F(\Phi) \equiv \Phi$  e as funções do tipo  $F(\Phi) \equiv a$  (funções de *grau zero*) já se podem considerar escritas sob aquela forma; 2) a soma e o produto de dois polinómios inteiros em  $\Phi$  calculam-se exactamente como se  $\Phi$  fosse uma variável numérica — o que se reconhece atendendo às propriedades da adição e da multiplicação entre operadores lineares (distributividade, comutatividade da adição, etc.) e à permutabilidade entre operadores lineares e factores numéricos. Dos factos precedentes resulta por sua vez que, se forem  $F(\Phi)$ ,  $G(\Phi)$  funções racionais inteiras de  $\Phi$ , os operadores  $F(\Phi)$ ,  $G(\Phi)$  serão permutáveis, isto é ter-se-á  $F(\Phi) \cdot G(\Phi) = G(\Phi) \cdot F(\Phi)$ .

Consideremos agora  $n$  transformações lineares  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ , do sistema vectorial  $S$  em si mesmo, as quais sejam permutáveis entre si duas a duas. A definição de *função racional inteira*  $F(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  dos operadores  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  será análoga à precedente, e o que foi dito a respeito das funções racionais inteiras de  $\Phi$  aplica-se *mutatis mutandis* às funções racionais inteiras de  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ .

*Exemplo:* Seja  $\mathcal{A}$  o conjunto de todas as funções analíticas de  $n$  variáveis complexas  $z_1, \dots, z_n$ , defi-

nidas num mesmo domínio, e convençionemos representar por  $D_i \varphi$  a derivada parcial em ordem a  $z_i$  de cada função  $\varphi \in \mathcal{A}$  ( $i = 1, \dots, n$ ). É manifesto que os operadores  $D_1, \dots, D_n$  constituem transformações lineares do sistema vectorial  $\mathcal{A}$  em si mesmo permutáveis entre si duas a duas, sendo portanto lícito definir funções racionais inteiras de tais operadores. Em particular, a potência  $(h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^p$ , em que  $h_1, \dots, h_n$  representam escalares quaisquer e  $p$  um número natural também qualquer, poderá desenvolver-se segundo a fórmula clássica — o que será agora, não apenas uma simples coincidência simbólica, mas um facto matemático demonstrável, ligado à teoria dos operadores lineares. Finalmente, poderemos definir com maior generalidade *função racional inteira das variáveis*  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ , admitindo que as constantes a que se refere a definição (em particular, os coeficientes dos polinómios) possam ser, em vez de números, operadores lineares quaisquer, permutáveis com cada um dos operadores  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ . As regras de cálculo usuais são ainda aplicáveis neste caso.

#### Funções racionais fraccionárias de operadores

**lineares.** Seja  $S$  um conjunto qualquer (que não será portanto, necessariamente, um sistema vectorial) e seja  $\Phi$  uma transformação unívoca do conjunto  $S$  em si mesmo. Diremos que a transformação  $\Phi$  é *invertível*, quando existir uma outra transformação unívoca  $\Xi$  do conjunto  $S$  em si mesmo, tal que  $\Xi \Phi = \Phi \Xi = 1$ ; em tal hipótese, o referido elemento  $\Xi$  será chamado *inverso* de  $\Phi$  e poderá representar-se por  $\Phi^{-1}$  ou por  $\frac{1}{\Phi}$ . Ora,

como é fácil ver, para que o operador  $\Phi$  seja invertível, é necessário e suficiente que ele constitua uma transformação biunívoca do conjunto  $S$  em si mesmo; isto é, será necessário e suficiente, que, para todo o elemento  $v$  de  $S$ , exista um e um só elemento  $u$  de  $S$ , tal que  $\Phi u = v$  <sup>(1)</sup>.

Assim, por exemplo, o operador  $D$  não será invertível, segundo tal conceito. Mas já a função  $\varphi x \equiv x^3$  é uma transformação biunívoca do conjunto dos números reais em si mesmo, e portanto um operador invertível, tendo-se  $\varphi^{-1} = \sqrt[3]{\phantom{x}}$ . Do mesmo modo, o operador

(1) Dêste modo, «biunívoca» será sinónimo de «invertível».

$\Theta = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$  admite o inverso  $\Theta^{-1} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ .<sup>(1)</sup> Seja finalmente  $\Phi$  uma transformação linear do espaço cartesiano  $R_n$  em si mesmo: condição necessária e suficiente para que o operador  $\Phi$  admita inverso é que o determinante da matriz representativa de  $\Phi$  seja diferente de zero; em tal hipótese, o operador  $\Phi^{-1}$  poderá ser determinado segundo a regra de CRAMER.

Os operadores invertíveis dir-se-ão também *regulares* e os operadores não invertíveis serão também chamados *singulares* ou *degeneres*.

Da anterior definição deduzem-se facilmente as seguintes propriedades: 1) Se  $\Phi$  é um operador regular, tem-se  $(\Phi^{-1})^{-1} = \Phi$ ; 2) Se os operadores  $\Phi, \Psi$  são regulares, tem-se  $(\Phi\Psi)^{-1} = \Psi^{-1}\Phi^{-1}$ ; 3) Se os operadores  $\Phi, \Psi$  são permutáveis entre si e  $\Psi$  é regular, também  $\Phi, \Psi^{-1}$  são permutáveis entre si.<sup>(2)</sup>

Nesta última hipótese, chama-se *cociente* de  $\Phi$  por  $\Psi$  e pode representar-se por  $\frac{\Phi}{\Psi}$  o operador  $\Phi\Psi^{-1} = \Psi^{-1}\Phi$ .

Então, das proposições 2), 3) deduz-se imediatamente que: Dados quatro operadores  $\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$ , permutáveis entre si dois a dois, e dos quais  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  sejam regulares, tem-se  $\frac{\Phi_1}{\Psi_1} \cdot \frac{\Phi_2}{\Psi_2} = \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_2}{\Psi_1 \cdot \Psi_2}$ . Em particular: Dados três operadores  $\Phi, \Psi, \Theta$ , permutáveis entre si dois a dois e dos quais  $\Psi, \Theta$  sejam regulares, tem-se  $\frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\Phi\Theta}{\Psi\Theta}$ .

Temos suposto até agora que  $S$  é um conjunto qualquer. Pois bem, vamos supor a partir deste momento que  $S$  é de novo um sistema vectorial. Em tal hipótese, se forem  $\Phi, \Psi, \Theta$  três transformações unívocas do sistema  $S$  em si mesmo, sendo  $\Theta$  regular, ter-se-á ainda:  $\frac{\Phi}{\Theta} + \frac{\Psi}{\Theta} = \frac{\Phi + \Psi}{\Theta}$ .

Como se vê, é possível estender ao caso presente, uma a uma, tôdas as propriedades formais das frações numéricas, sob convenientes restrições<sup>(3)</sup>. Por outro

(1) Recordemos que, na teoria de GALOIS, são chamadas substituições estas transformações biunívocas dum conjunto finito em si mesmo.

(2) Tem-se com efeito  $\Psi^{-1}\Phi = \Psi^{-1}\Phi\Psi\Psi^{-1} = \Psi^{-1}\Phi\Psi\Psi^{-1} = \Phi\Psi^{-1}$ , q. e. d.

(3) Tal não deve surpreender-nos. A maneira mais natural de introduzir os números racionais (e mesmo os números reais) consiste em apresentá-los como operadores lineares definidos num sistema de grandezas contínuas. Institue-se dêste modo uma teoria sintética dos números, que será logicamente impecável, quando se tiver dado uma conveniente axiomática dos sistemas de grandezas contínuas, e se tiver demonstrado a não-contradição dessa axiomática (reduzindo-a à não-contradição da aritmética dos inteiros). Em particular, observando que os números positivos formam um sistema de grandezas contínuas a respeito da multiplicação, é-se conduzido a uma teoria dos logaritmos, que é a mais simples, a mais natural e a mais elegante que se possa conceber.

lado, recordando que duas funções racionais inteiras dum mesmo operador linear são sempre operadores lineares permutáveis entre si, e atendendo à proposição 3), torna-se natural agora definir *função racional fraccionária dum operador linear*  $\Phi$  (suposto variável). Daremos esse nome a toda a função  $R(\Phi)$ , que, sem ser racional inteira, se possa reduzir à forma

$$R(\Phi) = \frac{f(\Phi)}{g(\Phi)} \text{ em que } f, g \text{ designam duas quaisquer}$$

funções racionais inteiras (de coeficientes numéricos). É claro que a função  $R(\Phi)$  só será definida para aqueles valores de  $\Phi$  que tornem o operador  $g(\Phi)$  regular.

Podemos agora abordar o problema da decomposição duma fracção racional própria em soma de fracções simples: Dados dois polinómios inteiros em  $z$ ,  $p(z)$ ,  $q(z)$ , dos quais o primeiro tenha grau inferior ao segundo, sabe-se que, representando por  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  as raízes (oportunamente repetidas quando múltiplas)

da equação  $q(z) = 0$ , a função racional  $\frac{p(z)}{q(z)}$  admite

uma decomposição do tipo  $\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(z-\lambda_i)^{r_i}}$ , em

que os  $k_i$  representam determinados números complexos e os  $r_i$  determinados números inteiros. Pois bem, atendendo aos resultados precedentes, é bem fácil agora demonstrar que, dado um operador linear  $\Phi$ , para o qual os operadores  $\Phi - \lambda_1, \dots, \Phi - \lambda_n$  sejam regulares, poderá ainda escrever-se

$$\frac{p(\Phi)}{q(\Phi)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(\Phi - \lambda_i)^{r_i}}.$$

\* \* \*

Todavia, êste resultado não permite ainda justificar o cálculo simbólico, tal como nós o utilizámos de início, na integração da equação linear ordinária a coeficientes constantes:

$$(1) \quad a_0 D^n \varphi + a_1 D^{n-1} \varphi + \dots + a_{n-1} D \varphi + a_n \varphi = \psi,$$

pois que, para nenhum valor de  $\lambda$ , o operador  $D - \lambda$  é invertível: com efeito, a equação  $D\varphi - \lambda\varphi = \theta$  admite infinitas soluções em  $\varphi$ , para cada função  $\theta$ , dada sob certas condições. Ora não seria difícil, mediante considerações relativas a operadores plurívocos, justificar o uso do método simbólico em tal caso. É contudo preferível encarar o problema de um outro ponto de vista<sup>(1)</sup>.

(1) O processo que vamos seguir é, na sua essência, devido a FANTAPPIÈ,



Representemos por  $\mathcal{C}$  o conjunto das funções complexas, definidas num intervalo fechado  $(a, b)$  e contínuas nesse intervalo<sup>(1)</sup>. Se pusermos

$$(2) \quad \mathcal{J}f = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b; f \in \mathcal{C}),$$

imediatamente se reconhece que  $\mathcal{J}$  representa uma transformação linear do sistema vectorial  $\mathcal{C}$  em si mesmo. Ora o operador  $\mathcal{J} - \lambda$  é regular qualquer que seja o número complexo  $\lambda \neq 0$ , pois que, como é fácil verificar, a equação integral

$$\mathcal{J}\varphi - \lambda\varphi = \theta \quad (\lambda \neq 0)$$

admite, para cada  $\theta \in \mathcal{C}$ , a solução única

$$(3) \quad \varphi(x) = -\frac{1}{\lambda}\theta(x) - \frac{1}{\lambda^2} \int_a^x e^{\frac{x-t}{\lambda}} \theta(t) dt,$$

a qual pertence ainda, manifestamente, ao conjunto  $\mathcal{C}$ . (Para  $\lambda=0$ , o operador  $\mathcal{J} - \lambda$  converte-se no operador  $\mathcal{J}$ , que é visivelmente singular).

Estamos portanto habilitados a integrar a equação (1), com as condições iniciais  $\varphi^{(i)}(a) = c_i$  ( $i=0, \dots, n-1$ ). Suponhamos, para fixar ideias,  $n=2$ :

$$(1^*) \quad a_0 D^2 \varphi + a_1 D \varphi + a_2 \varphi = \psi \quad (a_0 \neq 0);$$

aplicando duas vezes o operador  $\mathcal{J}$  a ambos os membros de (1\*) (admitindo que  $\psi, \varphi \in \mathcal{C}$ ), ter-se-á sucessivamente, pondo  $\varphi(a) = c_0, \varphi'(a) = c_1$ :

$$a_0 D \varphi - a_0 c_1 + a_1 \varphi - a_1 c_0 + a_2 \mathcal{J} \varphi = \mathcal{J} \psi$$

$$a_0 \varphi - a_0 c_0 - a_0 c_1 x + a_1 \mathcal{J} \varphi - a_1 c_0 x + a_2 \mathcal{J}^2 \varphi = \mathcal{J}^2 \psi$$

ou ainda, pondo  $\bar{\psi} = \mathcal{J}^2 \psi + a_0 c_0 + (a_0 c_1 + a_1 c_0) x$ :

$$(1^{**}) \quad (a_2 \mathcal{J}^2 + a_1 \mathcal{J} + a_0) \varphi = \bar{\psi},$$

equação integral equivalente à equação diferencial (1\*), completada com as condições iniciais  $\varphi(a) = c_0, \varphi'(a) = c_1$ . Podemos ainda escrever (1\*\*) sob a forma:  $\varphi = (a_2 \mathcal{J}^2 + a_1 \mathcal{J} + a_0)^{-1} \bar{\psi}$ . Então, atendendo a todas as considerações precedentes<sup>(2)</sup> e utilizando a fórmula (3) será fácil achar a solução única de (1\*\*), expressa por meio de quadraturas a partir de  $\bar{\psi}$  e das constantes  $c_0, c_1$ . Para que o processo fique completamente justificado, será necessário verificar no final que, pertencendo  $\psi$  a  $\mathcal{C}$ , também  $\varphi$  pertencerá a  $\mathcal{C}$ , hipótese esta em que o processo foi aplicado. Tal verificação é porém imediata.

Analogamente se resolve um sistema de equações diferenciais lineares ordinárias a coeficientes cons-

tantes. Como já tivemos ocasião de observar, os problemas relativos a circuitos eléctricos a constantes concentradas conduzem sempre a sistemas deste tipo. A questão requiere, porém, uma análise cuidadosa, que não é possível desenvolver aqui.

**Espaços de BANACH** — Até agora tratámos unicamente de funções racionais de operadores lineares. Se quisermos ir para além das funções racionais de operadores lineares, sem abandonar o método da *Análise geral que temos seguido até aqui*, será necessário restringir o conceito de «sistema vectorial».

Ora notemos que, no espaço cartesiano  $K_n$  (a  $n$  dimensões complexas), costuma ser definida uma noção de «comprimento», «módulo» ou «norma» dum vector: a cada vector  $u = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , atribui-se, como seu comprimento, o número real  $|\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}|$ , que representaremos aqui por  $|u|$ .<sup>(3)</sup> Por outro lado, esta avaliação (chamemos-lhe assim) verifica as quatro condições seguintes:

$$M_1) \quad |u| > 0, \text{ se } u \neq 0;$$

$$M_2) \quad |u| = 0, \text{ se } u = 0;$$

$$M_3) \quad |u + v| \leq |u| + |v| \quad \text{quaisquer que sejam o es-}$$

$$M_4) \quad |a u| = |a| |u| \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} M_3 \\ M_4 \end{matrix}} \right\} \text{ calar } a \text{ e os vectores } u, v.$$

Dum modo geral, chamaremos *sistema vectorial normado* a todo o sistema vectorial — relativo ao corpo real ou ao corpo complexo — no qual, a cada vector  $u$ , se considere associado, de harmonia com as condições  $M_1$  a  $M_4$ , um número  $|u|$  chamado *norma*, *comprimento* ou *módulo* de  $u$ .

Um exemplo dum sistema vectorial normado relativo ao corpo complexo, além do já citado (o espaço  $K_n$ ), é o conjunto  $\mathcal{C}$  das funções complexas contínuas num intervalo fechado  $(a, b)$ , chamando *norma*  $|\varphi|$  duma função  $\varphi \in \mathcal{C}$  ao máximo valor de  $|\varphi(x)|$  no intervalo  $(a, b)$ ; isto é, em símbolos:

$$|\varphi| = \max |\varphi(x)| \quad (a \leq x \leq b).$$

(É bem fácil ver como, em tal caso, são verificadas as condições  $M_1$  a  $M_4$ ).

Seja  $S$  um sistema vectorial normado. Diremos que uma dada sucessão  $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$  de elementos de  $S$  converge para um determinado elemento  $u$  de  $S$ , e escreveremos então  $u = \lim_n u_n$ , quando, a todo o número  $\varepsilon > 0$ , se possa fazer corresponder um número natural  $N_\varepsilon$ , tal que, para  $n > N_\varepsilon$ , se tenha necessariamente  $|u - u_n| < \varepsilon$ .

Consideremos de novo o espaço cartesiano  $K_n$ .

(1) Trata-se portanto de funções complexas da variável real. É claro que uma parte deste conjunto será constituída pelas funções reais definidas em  $(a, b)$  e aí contínuas. Podíamos tratar o assunto com maior generalidade, considerando espaços funcionais mais amplos do que este, mas isso levar-nos-ia demasiado longe.

(2) Trata-se, evidentemente, de decompor a fracção própria do segundo membro numa soma de fracções simples. (Veja-se o artigo do n.º 31 desta revista).

(3) É claro que, dado um número complexo  $z = a + bi$ , representamos aqui, como habitualmente, por  $|z|$ , o módulo de  $z$ ; isto é, pomos  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Neste espaço é, como se sabe, aplicável o critério de convergência de CAUCHY: *Condição necessária e suficiente para que uma sucessão de vectores  $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$  seja convergente é que, para todo o número  $\varepsilon > 0$ , exista um número natural  $N_\varepsilon$ , tal que, quaisquer que sejam  $p, q > N_\varepsilon$ , se tenha  $|u_p - u_q| < \varepsilon$ .*

Por outro lado, não é difícil demonstrar que também no sistema normado  $\mathcal{C}$  é válido o referido critério de convergência.

Pois bem, chamam-se espaços de BANACH todos aqueles sistemas vectoriais normados em que é válido o critério de convergência de CAUCHY. Um espaço de BANACH diz-se real ou complexo conforme ele for um sistema vectorial relativo ao corpo real ou relativo ao corpo complexo. Os espaços  $K_n$  e  $\mathcal{C}$  são, portanto, espaços de BANACH complexos. Variadíssimos outros exemplos de espaços de BANACH poderíamos citar aqui, se esta exposição não fosse já demasiado longa.

**Espaços funcionais analíticos.** Um primeiro conceito de espaço funcional analítico deve-se a SALVATORE PINCHERLE<sup>(1)</sup>. Dados um número complexo  $\alpha$  e um número real  $r \geq 0$ , representemos por  $[\alpha, r]$  o conjunto de todas as séries  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$ , cujos raios de convergência são superiores a  $r$ . Como se sabe, cada uma destas séries define univocamente, no interior do seu círculo de convergência, uma função analítica (isto é, uma função provida de derivada em todos os pontos interiores ao círculo). Adoptando os conceitos usuais de soma de duas séries e de produto duma série por um número complexo, o conjunto  $[\alpha, r]$  torna-se manifestamente um sistema vectorial relativo ao corpo complexo.

Diremos que uma sucessão  $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$  de elementos de  $[\alpha, r]$  converge para um determinado elemento  $f$  de  $[\alpha, r]$  e escreveremos então  $\lim_n f_n = f$ , quando existir pelo menos um círculo com centro em  $\alpha$  e de raio ao mesmo tempo maior que  $r$  e menor que os raios de convergência de todas as séries  $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ , sobre o qual a função  $f_n(z)$  tenda uniformemente para a função  $f(z)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Com tal conceito de «limite» (que não chegou a ser introduzido por PINCHERLE), o sistema  $[\alpha, r]$  torna-se um caso particular dos espaços funcionais analíticos por mim considerados na nova sistematização que dei à teoria dos funcionais analíticos de FANTAPPIÈ<sup>(2)</sup>. Para maior brevidade, limitar-me-ei a este caso particular.

Ocorre desde logo perguntar se é possível introduzir no espaço  $[\alpha, r]$  uma noção de «norma», da qual se possa deduzir, conforme as convenções precedentes, a noção de «limite» que nele definimos. Creio que a resposta é negativa. Todavia, é fácil reconhecer que o espaço  $[\alpha, r]$  se pode exprimir, de certo modo, como soma duma infinidade numerável de espaços de BANACH.

**Funções analíticas de operadores lineares.** Consideremos de novo um espaço funcional analítico  $[\alpha, r]$ . Seja por outro lado  $S$  um espaço de BANACH complexo, e representemos por  $\Lambda(S)$  o conjunto das transformações lineares do sistema  $S$  em si mesmo. Pergunta-se: Dado um operador  $\Phi \in \Lambda(S)$  e uma função  $f \in [\alpha, r]$ , que significado devemos atribuir ao símbolo  $f(\Phi)$ , que se obtém substituindo em  $f(z)$  a variável complexa  $z$  pelo símbolo  $\Phi$ ? Vou apenas indicar, em linhas muito gerais, como se responde a esta questão.

Observemos, em primeiro lugar, que o conjunto  $[\alpha, r]$  contém todos os polinómios inteiros em  $z$  (supõe-se, naturalmente,  $\alpha \neq \infty$ ). Em particular, conterá a função  $f(z) \equiv z$  e as funções do tipo  $f(z) \equiv a$  ( $a$ , const. numérica qualquer); todas as outras funções pertencentes a  $[\alpha, r]$  se obtêm a partir dessas funções elementares, mediante adições e multiplicações efectuadas em número finito ou infinito, com passagens ao limite. Ora a atribuição dum significado ao símbolo  $f(\Phi)$  deve ser feita de modo que subsistam as regras de cálculo usuais e, para isso, devem ser verificadas as seguintes condições:

- 1)  $f(\Phi) \in \Lambda(S)$ , desde que  $\Phi \in \Lambda(S)$ .
- 2) Se for  $f(z) \equiv z$ , será  $f(\Phi) = (\Phi)$ ; e se for  $f(z) \equiv a$ , será  $f(\Phi) = a$ .
- 3) Se  $f(z) \equiv f_1(z) + f_2(z)$ , então  $f(\Phi) = f_1(\Phi) + f_2(\Phi)$ , e se  $g(z) \equiv g_1(z) \cdot g_2(z)$ , então  $g(\Phi) = g_1(\Phi) \cdot g_2(\Phi)$ .
- 4) Se for  $f = \lim_n f_n$ , será  $f(\Phi) = \lim_n \Phi_n$ .

(Diremos, naturalmente, que uma sucessão  $(\Phi_n)$  de operadores pertencentes a  $\Lambda(S)$  converge para um determinado operador  $\Phi \in \Lambda(S)$ , quando se tiver  $\lim_n (\Phi_n u) = \Phi u$ , qualquer que seja  $u \in S$ ).

Ora bem: *Condição necessária e suficiente para que tal problema seja resolúvel é que o operador  $(\lambda - \Phi)^{-1}$  seja uma função de  $\lambda$  univocamente definida e analítica<sup>(1)</sup> no conjunto complementar do círculo com centro em  $\alpha$  e de raio  $r$ ; em tal hipótese, a solução é única e dada pela fórmula*

$$(4) \quad f(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - \Phi} d\lambda$$

(1) Veja-se PINCHERLE na lista bibliográfica.

(2) *Sull'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche*, Rediconti Acc. Lincei, 1946, pág. 711. A ideia destes espaços já se encontra esboçada num artigo de R. CACCIOPOLI sobre o mesmo assunto.

(1) É claro que o significado do termo «analítica» aqui empregado deriva do anterior conceito do «limite duma sucessão de operadores». O mesmo se diga a respeito do integral que aparece na fórmula (4).

em que  $C$  representa o contorno, percorrido no sentido positivo, dum círculo com centro em  $\alpha$  e de raio ao mesmo tempo maior que  $r$  e menor que o raio de convergência da série  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ .

Supusemos que  $S$  é um espaço de BANACH complexo; mas podíamos supor que se trata de um espaço funcional analítico ou, mais geralmente, de um espaço que se possa exprimir, de certo modo, como soma duma infinidade de espaços de BANACH complexos <sup>(1)</sup>.

Na hipótese de o operador  $\Phi$  ser contínuo <sup>(2)</sup>, demonstra-se que a função  $(\lambda - \Phi)^{-1}$  de  $\lambda$  resulta analítica em todos os pontos  $\lambda$  em que é definida, isto é, em que o operador  $\lambda - \Phi$  é invertível. Chama-se *conjunto resolvente* de  $\Phi$ , precisamente, o conjunto desses valores de  $\lambda$  para os quais  $(\lambda - \Phi)^{-1}$  existe, e chama-se *espectro* de  $\Phi$  o complementar do conjunto resolvente de  $\Phi$ . Portanto, no caso de  $\Phi$  ser contínuo, a condição precedente reduz-se a exigir que o espectro de  $\Phi$  esteja contido no círculo de centro  $\alpha$  e raio  $r$ .

Ainda na hipótese de  $\Phi$  ser contínuo, deduz-se do que foi dito a proposição seguinte: Dada uma função

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ , condição necessária e suficiente para que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\Phi - \alpha)^n$  seja convergente

e a sua soma coincida com o valor de  $f(\Phi)$  dado pela fórmula (4), é que o espectro de  $\Phi$  seja interior ao círculo de convergência da série dada.

Uma outra conclusão importante é ainda esta: Seja  $f(z, t)$  uma função analítica das duas variáveis  $z, t$ , e seja  $\Phi$  uma transformação linear de  $S$  em si mesmo, para a qual o símbolo  $f(\Phi, t)$  tenha um sentido, fixado pela fórmula (4), para convenientes valores

do parâmetro  $t$ ; então, se pusermos  $g(z, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} f(z, t)$ ,

será  $g(\Phi, t) \equiv \frac{d}{dt} f(\Phi, t)$ .

\* \* \*

Vou agora indicar brevemente, sem entrar em pormenores, algumas aplicações do que acaba de ser

(1) A fórmula (4) foi estabelecida por FANTAPPIÈ para o caso das matrizes finitas. A sua extensão aos operadores em espaços a infinitas dimensões foi sugerida por E. CARTAN em carta a G. GIORGI, e pode considerar-se efectuada por E. R. LORCH (ver bibliografia). Todavia, LORCH limita-se a operadores lineares contínuos em espaços de BANACH.

(2) O operador  $\Phi$  diz-se *contínuo* se, para cada sucessão convergente  $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$  de elementos de  $S$ , se tem

$$\Phi(\lim_n u_n) = \lim_n \Phi u_n.$$

estabelecido. Consideremos a equação integro-diferencial

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \equiv \int_a^y \varphi(x, t) dt \quad (a \leq y \leq b),$$

com a condição inicial  $\varphi(x, y) \equiv \theta(y)$ , supondo  $\theta$  pertencente ao conjunto  $\mathcal{C}$  das funções complexas, contínuas no intervalo  $(a, b)$ ; e admitamos que a função incógnita  $\varphi(x, y)$  é, para cada valor de  $x$ , uma função de  $y$  pertencente a  $\mathcal{C}$ . Então, se pusermos

$\int_a^y \varphi(x, t) dt \equiv \mathcal{I} \varphi(x, y)$  <sup>(1)</sup>, a equação (5) tomará o aspecto

$$(5^*) \quad \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) \equiv \mathcal{I} \varphi(x, y).$$

Ora, se  $\mathcal{I}$  fosse um símbolo numérico, a solução desta equação seria, evidentemente,

$$(6) \quad \varphi(x, y) \equiv \varphi(a, y) e^{x\mathcal{I}} \equiv e^{x\mathcal{I}} \theta(y).$$

Mas notemos que, segundo a fórmula (3) atrás considerada, o espectro do operador  $\mathcal{I}$  se reduz ao ponto  $\lambda=0$  <sup>(2)</sup>; donde se conclui que o símbolo  $e^{x\mathcal{I}}$  tem sentido para todo o  $x$  real ou complexo. Por outro lado, atendendo ao último dos resultados precedentes, vê-se que  $e^{x\mathcal{I}} \theta(y)$  é de facto uma solução de (5\*) e portanto de (5), solução cuja unicidade é fácil estabelecer.

Resta-nos calcular  $e^{x\mathcal{I}} \theta(y)$ ; para isso basta utilizar

o desenvolvimento  $e^{x\mathcal{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \mathcal{I}^n$  e observar

que é:  $\mathcal{I}^n \theta(y) \equiv \frac{1}{(n-1)!} \int_a^y (y-t)^{n-1} \theta(t) dt$  <sup>(3)</sup>; chega-se

deste modo ao resultado:

$$(6^*) \quad \varphi(x, y) \equiv \frac{d}{dy} \int_a^y J_0 [2i\sqrt{x(y-t)}] \theta(t) dt$$
 <sup>(4)</sup>,

em que  $J_0$  representa a conhecida função de BESSEL

já tabelada:  $J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} z^{2n}$ . É fácil agora constatar a legitimidade da hipótese segundo a qual

(1) Seria mais correcto escrever  $\mathcal{I}_y \varphi(x, y)$  em vez de  $\mathcal{I} \varphi(x, y)$ , mas prefiro a última notação por me parecer mais sugestiva neste caso.

(2) É fácil ver que o símbolo  $\mathcal{I}$  representa uma transformação linear contínua de  $\mathcal{C}$  em si mesmo.

(3) Para reconhecer a validade desta fórmula, basta derivar  $n$  vezes sucessivas em ordem a  $y$  (sem esquecer que  $y$  é ao mesmo tempo parâmetro e limite superior de integração) e observar que as primeiras  $n-1$  expressões se anulam para  $y=a$ .

(4) Pode ainda verificar-se que o integral que figura nesta fórmula é igual a  $\int_a^y J_0 [2i\sqrt{x(y-t)}] \theta(y-t) dt$ .

$\varphi(x, y)$  é, para cada valor de  $x$ , uma função de  $y$  contida em  $\mathcal{C}$ .

Em vez de (5), podíamos considerar a equação mais geral

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \int_a^y \mu(y, t) \varphi(x, t) dt + \psi(x, y)$$

com a condição inicial  $\varphi(a, y) \equiv \theta(y)$  e designando por  $\mu(y, t)$ ,  $\psi(x, y)$  funções dadas sob convenientes restrições. Então, pondo  $K\varphi(x, t) \equiv \int_a^y \mu(y, t) \varphi(x, t) dt$ , a

equação (7) tomaria o aspecto duma equação diferencial linear de 1.ª ordem, com o parâmetro  $y$ , cuja integração faria surgir uma função inteira do operador linear  $K$ . Notando, por outro lado, como a inversão de  $\lambda - K$  consiste na resolução de uma equação linear de VOLTERRA, ver-se-ia que o espectro de  $K$  se reduz ainda, neste caso, à origem, e que, portanto, o símbolo  $f(K)$  tem sentido para toda a função  $f(z)$  analítica na origem<sup>(1)</sup>. Em tudo o mais, proceder-se-ia de modo análogo ao precedente, à parte o emprego da função  $J_0$ .

Também poderíamos substituir em (7) o limite de integração variável  $y$  pelo limite constante  $b$ , e assim, em vez do operador  $K$ , teríamos um outro operador linear  $\bar{K}$ , cujo espectro já não coincidiria necessariamente com a origem, mas seria ainda um conjunto limitado<sup>(2)</sup>, o que é suficiente para que o símbolo  $f(\bar{K})$  tenha sentido quando  $f(z)$  é uma função inteira.

Notemos ainda que o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dx} \varphi_i(x) = \sum_{k=1}^n a_{ik}^x \varphi_k(x) + \psi_i(x) \quad [i = 1, 2, \dots, n],$$

com a condição inicial  $\varphi_i(a) = c_i$ , designando por  $\psi_i$  funções dadas e por  $a_{ik}^x$  números quaisquer, se pode integrar por considerações inteiramente análogas às precedentes, com a única diferença de que, em vez do operador  $\bar{K}$ , nos aparece agora o operador definido pela matriz finita  $\{a_{ik}^x\}$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ).

Em todos estes exemplos, as equações diferenciais são apenas da primeira ordem. Passando a equações de ordem superior, é-se levado a considerar funções analíticas de operadores lineares, que já não são funções inteiras.

\* \* \*

O cálculo operacional baseado na fórmula (4) pode estender-se às funções de mais de uma variável. Seja  $S$  um espaço de BANACH (ou mais geralmente um espaço que se possa exprimir como soma de infinitos espaços de BANACH) e sejam  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$  transformações lineares do espaço  $S$  em si mesmo *permutáveis entre si duas a duas*. Então, em condições inteiramente análogas às precedentes, designando por  $f(z_1, \dots, z_n)$  uma função analítica das variáveis  $z_1, \dots, z_n$ , a atribuição dum significado ao símbolo  $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$  pode fazer-se mediante a fórmula

$$f(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}{(\lambda_1 - \Phi_1) \dots (\lambda_n - \Phi_n)} d\lambda_1 \dots d\lambda_n,$$

em que  $C_1, \dots, C_n$  designam convenientes curvas fechadas percorridas no sentido positivo. Tudo o que foi dito a propósito das funções analíticas dum operador linear pode estender-se sem qualquer dificuldade ao caso presente.

É mediante considerações deste género que FANTAPPIÈ resolve por quadraturas o problema de CAUCHY para os sistemas de equações às derivadas parciais, lineares e a coeficientes constantes. Não me deterei sobre tal assunto: na lista bibliográfica são indicadas as memórias de FANTAPPIÈ em que o problema é resolvido. Limitar-me-ei a recordar que, em muitos casos da prática (como, por ex., a propósito da equação do calor, da equação dos telegrafistas, etc.) não é o problema de CAUCHY que interessa resolver. Em tais casos, o cálculo operacional atrás exposto tem-se mostrado ineficaz, ou pelo menos pouco cómodo, sendo então aconselhável o método baseado na transformação de LAPLACE<sup>(1)</sup>. Este, porém, não é isento de inconvenientes, aos quais não posso aqui referir-me com detalhe. A verdade é que ambos os métodos constituem um campo aberto à investigação, onde muito há ainda a esclarecer e a aprofundar.

Para êsse campo me é grato chamar a atenção dos estudiosos portugueses que desejem familiarizar-se rapidamente com os métodos de matemática moderna, e obter em pouco tempo resultados animadores, que os lancem abertamente no caminho da investigação

### Lista bibliográfica

A literatura sobre este assunto é vastíssima. Limito-me a indicar as obras e os artigos de que tenho mais directo conhecimento:

(1) Facilmente se demonstra que o operador linear  $K$  é contínuo: transformação linear contínua do espaço  $\mathcal{C}$  em si mesmo.

(2) É fácil demonstrar que o espectro dum operador linear contínuo é sempre um conjunto limitado: ora  $\bar{K}$  é, como  $K$ , um operador contínuo. Observe-se ainda como a inversão do operador  $\lambda - \bar{K}$  se traduz na resolução duma equação integral linear de FREDHOLM.

(1) Veja-se a lista bibliográfica.

- S. PINCHERLE e U. AMALDI—*Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, Bologna, 1901.
- O. HEAVISIDE—*Electromagnetic theory*, London, 1922.
- G. GIORGI—*Nuove osservazioni sulle funzioni di matrici*, Rendiconti Acc. Lincei, Roma, Luglio, 1928.
- J. R. CARSON—*Electric circuit theory and the operational calculus*, New York, 1929.
- P. HUMBERT—*Le calcul symbolique*, Paris, 1934.
- R. COURANT und D. HILBERT—*Methoden der Mathematischen Physik*. Bd. II, Berlin, 1937.
- G. DOETSCH—*Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, Berlin, 1937 (reeditado em 1943 pela empresa *Dover publications*, New York).
- H. SCHWERTFEGGER—*Les fonctions de matrices*, Hermann, Paris, 1938.
- L. FANTAPPIÈ 1) — *Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali*, ecc. Rendiconti del Cir. Mat. Pal., 1933.
- 2) *Sulla soluzione del problema di CAUCHY*, ecc., Comm. Pontificia Acc. Scient. 1939.
- 3) *Risoluzione in termini finiti del problema di CAUCHY con dati iniziali su una superficie qualunque*, Rend. Acc. Italia, 1941.
- K. W. WAGNER—*Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik*, Leipzig, 1940.
- H. ERTTEL—*Elemente der Operatorenrechnung*, Berlin, 1940.
- H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER—*Operational methods in applied mathematics*, Oxford, 1941.
- K. FAN—*Exposé sur le calcul symbolique de Heaviside*, Revue scientifique, 1942.
- E. R. LORCH—1) *The spectrum of linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., Sept. 1942.
- 2) *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*, Trans. Amer. Math. Soc., Nov. 1943.
- N. DUNFORD—*Spectral theory*, Trans. Amer. Math. Soc., Sept. 1943.
- A. GHIZZETTI—*Calcolo simbolico (Le trasformazioni di Laplace e il calcolo simbolico degli elettrotecnici)* Zanichelli, Bologna, 1943.
- Muitas destas obras referem-se exclusivamente ao método baseado no uso da transformação de LAPLACE. Entre estas é particularmente notável o tratado de DOETSCH.
- Errata:** No artigo do número precedente, pág. 8, 1.<sup>a</sup> coluna, linhas 2 e 3 (a partir do título), deve substituir-se  $\Phi$  por  $\Psi$  e  $\Psi$  por  $\Phi$ .
- No artigo do número 31, pág. 3, 2.<sup>a</sup> coluna, linha 17, deve substituir-se «reais» por «positivos».