
GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CANDIDATOS AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

PUBLICADO POR

J. CALADO, B. CARAÇA, R. L. GOMES, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

A N O 1 1 N.º 5 JANEIRO - 1941

PREÇO DÊSTE NÚMERO 4\$00

DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

DE

MATEMÁTICA

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

A O L E I T O R

Tôdas as publicações que desempenham uma função útil estão sujeitas a evoluir — a própria natureza da sua função o impõe.

Uma publicação é lançada com um determinado objectivo que procura realizar de certa maneira, dirigindo-se a um certo público. Ao fim de alguns números, as reacções do público, os seus desejos, o agrupamento dos seus leitores em sectores determinados, indicam claramente se a publicação tem condições de vida e, nesse caso, em que sentido deve orientar-se para bem servir o seu público.

A «Gazeta de Matemática» possui já a experiência necessária à sua orientação definitiva e vem portanto no seu 5.º número, dar conta dos resultados dessa experiência:

1.º A «Gazeta de Matemática» tem condições de vida, e verifica-se que ela corresponde a uma necessidade da nossa população académica.

2.º A «Gazeta» deve fazer incidir a sua acção, em especial, sobre a preparação para a aptidão às Escolas Superiores e sobre os primeiros anos dessas Escolas. É aí que a experiência mostrou residir principalmente o público que dela necessita.

3.º Em consequência desta verificação, a «Gazeta» vai, não dizemos mudar a orientação, mas rectificá-la e afirmá-la melhor no seu sector principal de acção.

Como? Dedicando, ao ensino das cadeiras gerais das Escolas Superiores — Álgebra, Cálculo Infinitesimal, Mecânica Racional — uma actividade maior do que a simples publicação e resolução de pontos. Vai passar a dar indicações mais gerais, mais completas, porventura mais úteis. A partir do próximo número, vai publicar exposições sistemáticas da prática referente a capítulos das cadeiras referidas. Quantas vezes o estudante se sente embaraçado pela falta de um bom guia que o ajude na resolução de problemas — o estudo duma curva, a realização dum cálculo numérico, etc. A «Gazeta» vai procurar suprir essa deficiência; daqui por diante publicará, em cada número, um guia prático dum problema geral.

O mesmo vai procurar fazer-se no que diz respeito às preparações para admissão às Escolas. Cada número ficará constituído por uma parte, digamos, transitória — os pontos saídos nos períodos imediatamente anteriores — e uma parte permanente que, acumulada, número a número, formará ao fim de algum tempo um instrumento — guia de trabalho precioso.

A «Gazeta» julga, deste modo, orientar o seu esforço naquêle sentido em que a prática indica que êle pode ser mais útil; os nossos leitores dirão se acertamos.

B. C.

A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

As convenções e os métodos da Lógica matemática têm-se imposto gradualmente, como valiosos instrumentos de análise das idéias, a despeito das fortes reacções que de início se opuseram à sua introdução no domínio da Ciência⁽¹⁾. Pareceu-nos, em particular, que, para uma clara e perfeita compreensão da parte do programa de matemática do 3.º ciclo dos liceus, que se refere aos métodos da Geometria, muito haveria a lucrar com o emprêgo judicioso de alguns elementos de Lógica matemática, ministrados previamente ao aluno, numa extensão do programa que, sem o sobrecarregar em excesso, teria a compensadora vantagem de o favorecer em grande parte do seu trabalho, contribuindo apreciavelmente para o desenvolvimento das suas faculdades de análise. No esboço que, em seguida, apresentamos, fomos além do que seria necessário para uma simples aprendizagem dos métodos da Geometria: a idéia que nos orientou foi a de mostrar, ainda que modestamente, até que ponto chegam, tanto neste como em outros domínios de aplicação, as possibilidades didácticas da Lógica matemática. Assim, ver-se-á que também o estudo da Aritmética racional e o das inequações podem ser nitidamente beneficiados com esta orientação.

1 — Considerando as três proposições seguintes:

- α — X é um triângulo;
- β — O Sol é uma estrela;
- γ — Todos os múltiplos de 3 são pares;

vê-se imediatamente que, enquanto a primeira é falsa ou verdadeira conforme a figura geométrica a que X , na realidade, se refere, a segunda é incondicionalmente verdadeira e a última, incondicionalmente falsa. A veracidade da proposição α é, pois, condicionada pela natureza de X , por isso que será verdadeira para umas determinações, e falsa para outras determinações, daquela variável⁽²⁾: diremos então que α é uma proposição condicional em X (ou, simplesmente, uma

(1) Estas reacções foram devidas, em grande parte, a alguns exageros reprováveis dos logísticos. É inteiramente justa a ironia de H. Poincaré, ao comentar as célebres definições do número 1, dadas em símbolos do sistema de Peano.

(2) Pressupõe-se, é claro, que X satisfaz a uma condição prévia, neste caso expressa pela proposição « X é uma figura geométrica». Frases, como «A alma é um triângulo», em que não se atende a êste preceito, são — não propriamente falsas, porque não se chega a pôr aqui o problema do «verdadeiro ou falso» — mas antes vazias de sentido.

condição), e para o pôr em evidência podemos escrever $\alpha(X)$, em vez de α . Por outro lado, as proposições tais como β e γ dir-se-ão *categóricas*, por isso que a sua veracidade não depende de circunstância alguma: ou bem são verdadeiras, e são-no então em qualquer caso, ou bem são falsas, e não há possibilidade de as tornar verdadeiras. Se lembrarmos que toda a igualdade entre expressões algébricas encerra, na verdade, uma proposição, apenas formulada em linguagem diferente da usual, encontraremos, logo, exemplos de proposições categóricas verdadeiras, nas identidades; de proposições categóricas falsas, nas igualdades impossíveis, e de proposições condicionais, nas equações. Exemplos análogos nos fornecem as inidentidades, as desigualdades impossíveis e as inequações.

Podem ainda, naturalmente, apresentar-se proposições condicionais em mais de uma variável, como por exemplo a seguinte « X , Y e Z são três rectas que se intersectam no ponto U », que é, como se vê, condicional em X , Y , Z e U ; mas tudo o que dissermos para as proposições condicionais em uma só variável facilmente se generaliza a todas as outras proposições; além de que, como é evidente, um sistema qualquer de variáveis, X, Y, Z, \dots , pode sempre, mediante um acto mental simples, considerar-se como uma variável única, de categoria diferente, $W = (X, Y, Z, \dots)$.

2 — Dadas as duas proposições:

$\alpha - X$ é um múltiplo de 6;

$\beta - X$ é um múltiplo de 3;

nota-se que, sempre que a primeira é verdadeira, a segunda também o é, ou o que vem a dar o mesmo, que, sempre que esta é falsa, aquela é falsa também; de modo que podíamos escrever: «Se X é um múltiplo de 6, X será também um múltiplo de 3» ou « X é divisível por 6, logo é divisível por 3». Diremos então que α *implica* β , ou que β é *consequência* de α , ou que β *resulta* de α (todas estas expressões são equivalentes), e escreveremos, simbolicamente, $\alpha \rightarrow \beta$.

É fácil ver que, dadas três proposições α_1 , α_2 e α_3 , se $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ e $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$, então $\alpha_1 \rightarrow \alpha_3$; o que se exprime dizendo que a *implicação lógica* goza da propriedade transitiva. Por exemplo: a proposição « X é um quadrado» implica a proposição « X é um rectângulo», a qual por sua vez implica a proposição « X é um paralelogramo», donde resulta que a primeira implica a terceira.

Convém notar que as proposições categóricas se comportam como proposições condicionais, quando ainda se ignora, ou se supõe ignorar, se elas são afinal verdadeiras ou falsas. Assim, antes de averiguar se qualquer das proposições «153 é múltiplo de 6» e «153 é múltiplo de 3» é ou não verdadeira, já se pode assegurar que a segunda é verdadeira, se a primeira o for, e que esta será falsa, se a segunda for por sua vez falsa; isto é, podemos dizer, como para as proposições condicionais, que a primeira implica a segunda. Observações análogas se devem aplicar a tudo o que dissermos em seguida.

3 — Os exemplos anteriores bastam para mostrar que, dadas duas proposições α_1 e α_2 , se $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, não se deve daí concluir, sem mais, que também $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$; isto é, a implicação lógica não goza da propriedade simétrica, embora goze da propriedade reflexiva (qualquer proposição se implica a si mesmo). Pode no entanto acontecer que se tenha, ao mesmo tempo, $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ e $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$: dir-se-á então que as proposições α_1 e α_2 são equivalentes, e escrever-se-á $\alpha_1 \equiv \alpha_2$.

Exemplos: as proposições « X é um triângulo equilátero» e « X é um triângulo equiângulo» são equivalentes; do mesmo modo são equivalentes as proposições « x é um número compreendido entre 3 e 4» e « x verifica a desigualdade $x^2 - 7x + 12 < 0$ ». Outros exemplos:

I — (n é divisível por 3, por 4 e por 5) \equiv (n é divisível por 60)

II — ($-6 < 2x < 3$) \equiv ($-3 < x < \frac{3}{2}$)

III — (X é um ser vivo) \equiv (X é um animal ou uma planta).

Quando uma prop. α implica uma prop. β , também se diz que α é *condição suficiente* para que se verifique β , ou que β é *condição necessária* para que se verifique α ; e ainda se costuma dizer que β é uma condição *mais restritiva ou mais forte* do que α , ou que α é uma condição *menos restritiva ou mais fraca* do que β . Se $\alpha \equiv \beta$, é também usual dizer que α (ou β) é condição *necessária e suficiente* para que se verifique β (ou α). Esta terminologia é muito conhecida.

A *equivalência lógica* goza evidentemente das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

É também manifesto que todas as proposições categóricas, *reconhecidas* como verdadeiras, são entre si equivalentes, o que levou a representá-las, indistintamente, pelo símbolo 1. Análogamente, as proposições absolutamente falsas são equivalentes entre si, e recebem, por isso, a representação comum 0. Pôsto isto, eu direi que toda a prop. α implica a prop. 1, baseando-me na seguinte consideração: sempre que α é verdadeira, a prop. 1 também o é, por isso que α *sempre* verdadeira. Do mesmo modo direi que 0 implica qualquer prop. α : com efeito, sempre que α é falsa, a prop. 0 também o é, por isso que α *sempre* falsa. Assim, qualquer que seja a prop. α , ter-se-á: $0 \rightarrow \alpha \rightarrow 1$.

4 — Sejam agora as proposições:

$\alpha - X$ é divisível por 5;

$\beta - X$ é divisível por 3;

$\gamma - X$ é divisível por 15.

É fácil reconhecer que, sempre que as proposições α e β se verificam simultaneamente, e só então, a última é verdadeira. Portanto, afirmar *simultaneamente* α e β equivale à simples afirmação de γ . Diremos, neste caso, que a proposição γ equivale ao *produto lógico* das proposições α e β , e escreveremos $\gamma \equiv \alpha \cdot \beta$. Dêste modo, o sinal \cdot substitui a conjunção copulativa *e*. Outros exemplos:

I — (X é um losango). (X é um rectângulo) \equiv (X é um quadrado);

II — ($-3 < x < 4$). ($1 < x < 7$) \equiv ($1 < x < 4$);

III — ($12 = n$). ($18 = n$) \equiv ($6 = n$).

Como facilmente se pode verificar, a *multiplicação lógica* goza das propriedades comutativa e associativa. Além disso, tem-se, qualquer que seja α : $\alpha \cdot 1 = \alpha$, $\alpha \cdot 0 = 0$. Por outro lado, se $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \beta \equiv \alpha$, e, reciprocamente, se $\alpha \beta \equiv \alpha$, $\alpha \rightarrow \beta$; em particular $\alpha \cdot \alpha \equiv \alpha$.

Consideremos ainda as proposições formuladas em seguida:

$\alpha - X$ divide 4;

$\beta - X$ divide 6;

$\gamma - X$ é um divisor de 12, menor que 10.

Vê-se facilmente que a última é verdadeira, quando, e só quando, uma, pelo menos, das primeiras se verifica. Dêste modo, afirmar γ equivale a dizer que *uma, pelo menos*, das

proposições α e β é verdadeira. Diz-se então que a proposição γ é a *soma lógica* das proposições α e β , e escreve-se $\gamma \equiv \alpha + \beta$, onde o sinal $+$ substitue a conjunção disjuntiva *ou*. Outro exemplo: $(X \text{ é um número inteiro}) + (X \text{ é um número fraccionário}) \equiv (X \text{ é um número racional})$.

A *adição lógica* goza das propriedades comutativa e associativa, e ainda das seguintes: 1) $\alpha + 0 \equiv \alpha$; 2) $\alpha + 1 \equiv 1$, qualquer que seja a proposição α ; 3) $\alpha + \beta \equiv \beta$ é equivalente a $\alpha \rightarrow \beta$, (donde, em particular, $\alpha + \alpha \equiv \alpha$).

Pode ainda verificar-se, o que é muito importante, que, não só a multiplicação lógica é distributiva em relação à adição lógica, como esta é distributiva em relação àquela; isto é, quaisquer que sejam as proposições α, β, γ , tem-se: $\alpha \cdot (\beta + \gamma) \equiv \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ e $\alpha + \beta \cdot \gamma \equiv (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \gamma)$.

Muito facilmente se definem somas e produtos lógicos, com mais de dois dados, o que deixamos ao cuidado do leitor.

5 — Considerando agora as proposições

α — O número inteiro X é par;

β — O número inteiro X é ímpar;

vê-se que não podem tais proposições ser simultaneamente verdadeiras, nem simultaneamente falsas; isto é, se uma é verdadeira, a outra é necessariamente falsa, e se uma é falsa, a outra é necessariamente verdadeira. Diremos então que estas proposições são *contraditórias*, ou que uma *nega* a outra, e escreveremos: $\beta \equiv \alpha'$ ou $\alpha \equiv \beta'$ ⁽¹⁾. Outros exemplos:

I — $(x > 5) \equiv (x \leq 5)'$;

II — (Todos os múltiplos de 6 são múltiplos de 3) \equiv (Alguns múltiplos de 6 não são múltiplos de 3)'.

Dada uma proposição α é fácil reconhecer $\alpha \cdot \alpha' \equiv 0$ (princípio da não contradição) e $\alpha + \alpha' \equiv 1$ (princípio do terceiro excluído). As duas condições $\alpha \cdot \beta \equiv 0$, $\alpha + \beta \equiv 1$ são além disso suficientes para que $\alpha \equiv \beta'$.

São muito importantes as seguintes propriedades:

1) $(\alpha')' \equiv \alpha$; 2) Se $\alpha \rightarrow \beta$, $\beta' \rightarrow \alpha'$; 3) $(\alpha + \beta)' \equiv \alpha' \cdot \beta'$;

4) $(\alpha \cdot \beta)' \equiv \alpha' + \beta'$; 5) $1' \equiv 0$.

A *negação lógica* põe assim em evidência a dualidade que se verifica, por exemplo, entre a *soma lógica* e o *produto lógico*.

É necessário não confundir proposições contraditórias com proposições *incompatíveis*, aplicando esta designação a duas ou mais proposições cujo produto lógico seja igual a 0. Exemplo: as proposições « X é um número primo» e « X é um múltiplo de 6» são incompatíveis, mas não contraditórias, porque podem ser simultaneamente falsas.

6 — As convenções anteriores constituem a base do chamado *cálculo proposicional*, em que o papel dos números aparece desempenhado pelas proposições, e em que os sinais de relação e de operação correspondem às palavras *se, não, ou, e*. É manifesta a analogia entre as relações $\alpha \rightarrow \beta$ (onde α e β designam proposições) e $a \geq b$ (onde a e b representam números); e ainda entre as relações $\alpha \equiv \beta$ e $a = b$. Uma diferença há, porém, que desde já convém assinalar: enquanto, para cada par de números a e b , se verifica necessariamente uma das relações $a < b$, $a = b$, $a > b$ (ou, o que é o mesmo, uma das relações $a \leq b$, $b \geq a$), pode acontecer que, dadas duas proposições α e β , não se verifique nenhuma das relações $\alpha \rightarrow \beta$, $\beta \rightarrow \alpha$. Porém, conforme o que se viu, as regras formais do cálculo proposicional não diferem consideravelmente das do cálculo numérico, como também se pode ajuizar do

exemplo: $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) \equiv \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma +$

relações $\alpha \rightarrow \beta$, $\gamma \rightarrow \delta$, deduz-se $\alpha + \gamma \rightarrow \beta + \delta$, e ainda $\alpha\gamma \rightarrow \beta\delta$. Convém, contudo, nunca perder de vista as diferenças que existem entre um e o outro cálculo.

7 — Devemos agora notar que toda a proposição categórica pode apresentar-se sob a forma duma implicação lógica (afirmada ou negada) entre duas proposições condicionais, como facilmente se infere dos seguintes exemplos:

I — (5 é um número dígito) $\equiv (X \text{ é igual a } 5 \rightarrow X \text{ é um dígito})$;

II — (Todos os múltiplos de 6 são pares) $\equiv (n \text{ é } \dot{6} \rightarrow n \text{ é par})$;

III — (Alguns múltiplos de 3 não são pares) $\equiv (Y \text{ é } \dot{3} \rightarrow Y \text{ é par})'$;

IV — (Nenhum múltiplo de 6 é primo) $\equiv (W \text{ é } \dot{6} \rightarrow W \text{ não é primo})$;

V — (Alguns losangos são rectângulos) $\equiv (X \text{ é um losango} \rightarrow X \text{ não é um rectângulo})'$.

Assim, em geral, a toda a proposição categórica α pode dar-se uma das formas seguintes: $\dot{h} \rightarrow \dot{t}$ ou $(\dot{h} \rightarrow \dot{t})'$, onde \dot{h} e \dot{t} designam proposições condicionais; isto é, ou $\alpha \equiv (\dot{h} \rightarrow \dot{t})$, ou $\alpha \equiv (\dot{h} \rightarrow \dot{t})'$. No primeiro caso, dá-se a \dot{h} o nome de *hipótese* e a \dot{t} o nome de *tese* da proposição α ; podemos dizer então que α *transforma* \dot{h} em \dot{t} , e escreveremos $\alpha | \dot{h} \equiv \dot{t}$. Duas proposições α e β , tais que $\alpha \equiv (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)$, $\beta \equiv (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$, sendo $\alpha_1 \equiv \beta_2$ e $\alpha_2 \equiv \beta_1$ (a tese de cada uma coincide com a hipótese da outra), dizem-se *recíprocas*, e, quando enunciadas conjuntamente (isto é, quando se efectua o seu produto lógico), obtém-se a proposição *mais forte* $\alpha_1 \equiv \alpha_2$; por exemplo, as proposições «todo o divisor do m. d. c. de dois números divide também esses números» e «todo o divisor comum de dois números divide o seu m. d. c.» são entre si recíprocas, e fundem-se na proposição «para que um dado número n divida dois números a e b quaisquer, é necessário e suficiente que divida o seu m. d. c.».

Há ainda outros modos de enunciar proposições categóricas, empregando proposições condicionais: assim, a proposição do exemplo V pode formular-se do seguinte modo: « $(X \text{ é um losango}). (X \text{ é um rectângulo}) \neq 0$ »⁽²⁾; e do exemplo II é equivalente a « $(X \text{ não é } \dot{6}) + (X \text{ é par}) \equiv 1$ »⁽³⁾, etc.

Observações: 1) Uma proposição categórica α escrita sob a forma $(\dot{h} \rightarrow \dot{t})$ ou $(\dot{h} \rightarrow \dot{t})'$ não depende, evidentemente, do símbolo escolhido para representar a variável que figura nas proposições \dot{h} e \dot{t} , contanto que esse símbolo seja o mesmo em ambas; assim, em II podíamos pôr Z , X ou qualquer outra letra, em vez de n ⁽⁴⁾. A proposição α traduz, por assim dizer, o que existe de *constante* entre \dot{h} e \dot{t} , através de todas as mudanças possíveis do símbolo representativo da variável.

2) Para especificar que uma proposição $\alpha(X)$ não é verificada por mais de uma determinação de X , pode fazer-se uso da seguinte implicação: $\alpha(Y) \cdot \alpha(Z) \rightarrow (Y = Z)$. Assim, por exemplo, a expressão « $(X \text{ é um múltiplo comum de } 4 \text{ e } 6, \text{ menor que } 20).$ » $(Y \text{ é um múltiplo comum de } 4 \text{ e } 6, \text{ menor que } 20) \rightarrow (X = Y)$ significa «não existe mais de um múltiplo comum de 4 e 6, inferior a 20».

⁽¹⁾ O sinal substitui, portanto, o advérbio *não*.

⁽²⁾ «Existem losangos que também são rectângulos».

⁽³⁾ «Dado um número inteiro, de duas uma: ou esse número é par ou não é múltiplo de 6».

⁽⁴⁾ Deve, é claro, respeitar-se qualquer convenção prévia, relativa à escolha do símbolo.

Exercício: Mostrar que o produto lógico das implicações $\alpha \rightarrow c$, $\delta \rightarrow \partial$, é equivalente à implicação única $\alpha + \delta \rightarrow \alpha' \partial + \delta' c + c \partial$.

8 — Nas suas modalidades mais freqüentes, o silogismo não é mais do que uma aplicação da propriedade transitiva da implicação lógica. Seja, por exemplo, o raciocínio «Todos os múltiplos do 6 são pares; 12 é múltiplo de 6, logo 12 é par», cujas premissas, postas sob a forma de implicação lógica, são as seguintes:

α : X é 6 $\rightarrow X$ é par;

β : Y é igual a 12 $\rightarrow Y$ é 6;

e representemos por α , δ , c , ∂ , respectivamente, a hipótese de α , a hipótese de β , a tese de α e a tese de β . Atendendo à observação 1 do parágrafo anterior, podemos substituir Y por X , em β , o que permite identificar α com ∂ , isto é, pôr $\alpha(X) \equiv \partial(X)$, e, portanto, escrever $\delta \rightarrow \partial \rightarrow c$, donde $\delta \rightarrow c$.

A proposição $\delta \rightarrow c$, que podemos representar por γ , é, evidentemente, a conclusão do raciocínio, e resulta, como se acaba de ver, da aplicação sucessiva de β e de α sobre δ : $\beta | \delta \equiv \partial$, $\alpha | \partial \equiv c$, donde $\alpha | \beta | \delta \equiv \gamma | \delta \equiv c$. Podemos então escrever $\alpha | \beta \equiv \gamma$ e dizer, por analogia com o que fizemos para as proposições condicionais, que α transforma β em γ ; para justificar esta convenção, basta notar que, escrita sob a forma «12 é 6», a proposição β coincide afinal com a hipótese de α , desde que se ponha 12 no lugar de X , e assim «12 é 6» \rightarrow «12 é par», isto é, $\beta \rightarrow \gamma$ (segundo α).

Consideremos agora um raciocínio cujas premissas sejam do tipo: $(\alpha \rightarrow \delta)$ (proposição α_1), $c \rightarrow \delta$ (proposição α_2). Neste caso a conclusão será $(\alpha \rightarrow c)$, pois que, se a implicação $\alpha \rightarrow c$ fosse verdadeira, como se tem $c \rightarrow \delta$ (segundo α_2) ter-se-ia $\alpha \rightarrow \delta$, o que, segundo α_1 , é falso.

(Continua)

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Cursos da Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

433 — Encontrar os três lados dum triângulo rectângulo, sabendo que o lado médio é igual à semi-soma dos outros dois e que o número que exprime a sua superfície é o mesmo que exprime o seu perímetro. R: *Se forem b o cateto médio,*

c o outro e a a hipotenusa será: $2b = a + c$; $\frac{bc}{2} = a + b + c$ e $a^2 = b^2 + c^2$ *donde, resolvendo o sistema,* $a = 10$, $b = 8$, $c = 6$.

J. C.

434 — Qual a razão entre os quintos termos dos desenvolvimentos dos binómios $(1-a)^n$ e $(1+a)^n$? Se a ordem dos termos correspondentes fôr par, qual será a sua razão?

R: $T_5 = \binom{n}{4} (-a)^4$; $T'_5 = \binom{n}{4} a^4$ *donde* $\frac{T_5}{T'_5} = 1$. *Se a ordem correspondente fôrse par, então a razão seria -1, como é óbvio.*

J. C.

435 — Na equação $9x^2 + 12x + 4 = 0$ indicar, sem resolver, qual a natureza das raízes; dizer os sinais, a sua soma e o seu produto. R: *Como* $\Delta = b^2 - 4ac = 144$ *e iguais. Por ser a soma* $S = -4/3$, *as raízes são negativas e o seu produto é* $P = 4/9$.

J. C.

436 — Calcule por logaritmos o volume dum paralelepípedo de que se conhece a diagonal da base 20,35 m e um ângulo adjacente $28^\circ 30' 4''$ e a altura 7,50 m. R: *Se o paralelepípedo fôr rectângulo a base é um rectângulo de área* $A = 20,35^2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha = \frac{20,35^2}{2} \cdot \sin 2\alpha$ *designando por* α *o*

ângulo de $28^\circ 30' 4''$, *e o volume é* $V = \frac{7,50 \times 20,35^2}{2} \cdot \sin 2\alpha$

logo $\log V = \log 7,50 + 2 \log 20,35 + \log \sin 57^\circ 0' 8'' + \log 2 = 3,11475$ *e por isso* $V = 1302,5 \text{ m}^3$.

J. C.

437 — Simplificar a expressão

$$\frac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin \frac{3\pi - 4x}{2} + 1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\begin{aligned} R: \frac{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\sin \frac{3\pi - 4x}{2} + 1 + \operatorname{tg}^2 x} &= \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + \cos^2 x} \\ &= \frac{-\sin x}{-\cos 2x + \cos^2 x} = -\operatorname{cosec} x. \end{aligned}$$

J. C.

438 — Pelo método geométrico do problema inverso, das duas rectas paralelas AX e BY e um ponto fixo O coplano à distância d da mais próxima, determinar a posição duma perpendicular comum \overline{CD} às duas paralelas dadas tal que do ponto se veja \overline{CD} sob um ângulo dado α . Discutir as soluções possíveis. Qual o valor máximo que pode ter α ?

(Ver solução no próximo número).

439 — a) Qual o valor máximo que pode ter α ? b) Qual o número no sistema decimal que corresponde a 371 na base 7? R: a) *Nem todos os números do sistema da base 13 podem escrever-se com os algarismos dados, pois devem adoptar-se símbolos novos para representar no sistema da base 13 os números 10, 11 e 12 do sistema decimal.* b) *Na base 7 os únicos algarismos adoptados na escrita dos números são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O símbolo 371 não representa pois um número da base 7.*

J. C.

I. S. C. E. F. — 23 de Julho de 1940

440 — a) Defina número primo e diga em que consiste a decomposição de um número em factores primos, que propriedades e aplicações conhece. b) Sejam os dois números $A = p^2 \cdot q^n$, $B = q^2 \cdot p^n$, onde p e q são números primos e n inteiro e positivo. Quantos divisores comuns têm A e B e quais? R: *Se* $n \geq 2$ *o número de divisores é* $9: 1, p, p^2, q, q^2, p \cdot q, p^2 \cdot q, p \cdot q^2$ *e* $p^2 \cdot q^2$; *se* $n = 1$ *o número de divisores é* $4: 1, p, q$ *e* $p \cdot q$.

441 — Diga o que é um sistema de equações; defina solução. Resolva o seguinte problema: determinar p , q , r de modo que a função $y = x^3 + px^2 + qx + r$ tome para $x = 0, 1, 2$ os valores 3, 7, 19, respectivamente.

$$R: \begin{cases} r=3 \\ p+q+r=6 \\ 4p+2q+r=11 \end{cases} \begin{cases} p=1 \\ q=2 \\ r=3 \end{cases}$$

GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CANDIDATOS AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

PUBLICADO POR

J. CALADO, B. CARAÇA, R. L. GOMES, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

A N O I I N.º 6 ABRIL-1941

PREÇO DÊSTE NÚMERO 4\$00

DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

(CONTINUADO DO N.º 5)

9 — Dada uma proposição condicional $\alpha(X)$, suponhamos que existe uma, e uma só, determinação de X , que representaremos por X^* , para a qual a proposição $\alpha(X)$ é verdadeira⁽¹⁾. Dêste modo, a proposição $\alpha(X^*)$, incondicionalmente verdadeira, traduz uma propriedade exclusiva de X^* , e será portanto possível *definir* o elemento X^* à custa dessa mesma propriedade: « X^* é o elemento que satisfaz à condição $\alpha(X^*)$ », ou, em termos de Lógica matemática, « $(X=X^*) \equiv \alpha(X)$ »⁽²⁾. Obtém-se, por este processo, uma *definição lógica* da entidade X^* . Por exemplo, « X é o sucessor de 4» é uma propriedade que pode utilizar-se para definir o número convencionalmente representado pelo símbolo 5, e assim teremos, *por definição*, «5 é o sucessor de 4».

Para que, segundo o processo indicado, uma dada proposição $\alpha(X)$ possa conduzir à definição dum elemento, é evidentemente necessário que *exista* uma, e *uma só*, entidade X^* , que satisfaça à condição $\alpha(X^*)$. Toda a definição dum elemento deve, portanto, logicamente, ser precedida duma proposição de *existência* e de *unicidade*. É, contudo, natural admitir a possibilidade de um mesmo elemento ser definido de modos diferentes, isto é, utilizando proposições condicionais distintas; assim, a anterior definição (do número 5) será equivalente à seguinte: « $(X=5) \equiv (X \text{ é o m. d. c. de } 20 \text{ e } 15)$ ». Haverá portanto, entre as propriedades dum ser, uma que se toma, *um tanto arbitrariamente*, como propriedade definidora (em geral, produto lógico de um conjunto de propriedades), sendo as restantes consideradas apenas consequências da definição. Convém, evidentemente, aceitar como definidora a propriedade que se *afigure* mais simples, — mas compreende-se que, muitas vezes, se torne difícil, até impossível, a determinação duma tal propriedade elementar⁽³⁾.

Notemos agora que, além das definições de elementos, se devem considerar ainda as definições de *classes* (ou de *conjuntos*). O processo é análogo ao anterior: define-se uma classe (ou um conjunto), indicando uma propriedade comum a todos os elementos dessa classe (ou desse conjunto), e só a êsses. Exemplos: I) Definição de quadrado perfeito: « $(x \text{ é um quadrado perfeito}) \equiv (\text{Existe um inteiro } y \text{ tal que } x=y^2)$ »; II) Definição de mediatriz dum segmento: « $(X \text{ é um ponto da mediatriz do segmento } \overline{AB}) \equiv \text{dist}(A, X) = \text{dist}(B, X)$ ». Neste caso, as condições de existência e de unicidade deixam de constituir um motivo de preocupação, visto que o conjunto dos elementos que satisfazem a uma dada proposição condicional $\alpha(X)$ *existe sempre e é único*; pode apenas tal conjunto não conter elemento nenhum (recebe então o nome de *conjunto vazio*)⁽⁴⁾. Assim, existe, e é determinado, o conjunto dos números primos múltiplos de 4, embora tal conjunto seja vazio; análogamente, é vazia a classe dos triângulos rectângulos equiláteros.

Devemos, finalmente, referir-nos a definições de *operadores* ou *relações*. Exemplo: Por meio da equivalência « $(A \text{ recta } x \text{ é paralela à recta } y) \equiv (\text{As rectas } x \text{ e } y \text{ pertencem ao mesmo plano})$ » (Não existe nenhum ponto comum a x e a y), fica definida a relação «paralelo a», entre duas rectas. Não deixaremos, contudo, de afirmar que se pode, mediante um artifício muito simples, fazer entrar este tipo de definições, no precedente.

Como se vê, uma definição não é, no fundo, mais do que a atribuição dum nome ou, o que vem a dar o mesmo, a representação por meio dum símbolo, da entidade ou da classe de entidades, que gozam duma certa propriedade: o objectivo é, pois, resumir, por meio dum único símbolo, o que, antes disso, só era exprimível por meio de vários símbolos. Assim, as definições são proposições, incondicionalmente verdadeiras por nossa própria *deliberação*, isto é, por *convenção*, e têm por fim, não só a economia de tempo, como ainda maior clareza de expressão: é, sem dúvida, muito mais cómodo dizer «circunferência» do que «conjunto dos pontos dum plano situados a uma mesma distância de um outro ponto desse plano», principalmente, se notarmos que esta noção é de uso correntíssimo em Geometria.

10 — Em qualquer teoria matemática, construída segundo os preceitos da Lógica, começa-se por fixar um certo número de noções (as *noções primitivas*) e um certo número de proposições (os *postulados*), de modo que satisfaçam às seguintes condições: 1) Todas as entidades consideradas nessa teoria se podem definir à custa das noções primitivas; 2) Todas as proposições categóricas que, na mesma teoria, se formulam como verdadeiras (excepto as definições) são consequências lógicas dos postulados; 3) Os postulados são compatíveis, isto é, não conduzem a contradição; 4) Nenhuma noção primitiva se pode reduzir, por meio duma definição, às restantes noções primitivas; 5) Nenhum postulado se pode deduzir dos restantes postulados⁽⁵⁾. Em virtude destas condições, os conceitos primitivos não serão susceptíveis de definição, e os postulados serão *indemonstráveis*: uns e outros se aceitam *geralmente*, como dados fornecidos pela *intuição*, no contacto com a realidade sensível. Assim, por exemplo, na Geometria que se estuda nos liceus, ou Geometria euclidiana, *é uso* tomarem-se, como primitivas, entre outras, as idéias de «ponto», «recta», «plano», «situado entre»; e como postulados, entre outras, as seguintes proposições: «Por dois pontos distintos passa uma recta, e uma só»; «Dados três pontos distintos, pertencentes a uma recta, existe um, e um só dêles, situado entre os restantes»; «Por um ponto exterior a uma recta passa uma, e uma só, paralela a essa recta».

Além dos postulados, consideram-se em Matemática mais dois tipos de proposições: as *definições nominais* e os *teoremas*. As primeiras, de que já tratámos desenvolvidamente no

(1) Pode comparar-se $\alpha(X)$ a uma equação que admite uma solução única X^* ; dêste modo, $\alpha(X^*)$ corresponde à identidade em que é convertida essa equação, quando se faz $X=X^*$.

(2) Como já fizemos anteriormente (obs. 2), § 7), usamos o sinal \equiv para exprimir *identidade*; assim « $a=b$ » significa que a representa o mesmo elemento que b .

(3) A propriedade com que, historicamente, uma entidade se dá a conhecer *pela primeira vez*, nem sempre é a mais indicada para uma definição lógica dessa entidade: é o que sucede por exemplo, com o número π .

(4) Há nisto, é claro, apenas uma convenção: uma extensão natural do conceito de conjunto, em vista da comodidade de linguagem que daí resulta.

(5) As condições 4) e 5) não são indispensáveis para o desenvolvimento lógico da teoria; compreende-se, todavia, a vantagem que há em reduzir a um *mínimo* o número das entidades que não se definem e o das proposições que não se demonstram, sendo óbvio que tal *mínimo existe necessariamente*.

§ anterior, introduzem novas noções, à custa dos conceitos primitivos, com o objectivo de contribuir para a brevidade e a clareza do discurso. Os teoremas são aquelas proposições, distintas dos postulados e das definições que, segundo a condição 2), se podem deduzir dos postulados, isto é, que são susceptíveis de *demonstração*.

Pode suceder que, dado um teorema α_1 , não só seja possível deduzir α_1 dos postulados admitidos, como até exista um postulado α , que seja implicado por α_1 , quando se admittem os restantes postulados; isto é, as proposições α e α_1 serão, em tais condições, equivalentes, e poderá substituir-se α por α_1 . Isto mostra que a escolha das proposições que hão-de figurar como postulados, numa dada teoria, apresenta um certo grau de arbitrariedade: devem preferir-se, é claro, as proposições de enunciado mais simples, mas podem surgir neste caso, as mesmas hesitações que apontámos, a respeito das definições. Análoga liberdade de escolha se verifica para as noções primitivas. Por exemplo, em vez do conceito de «recta», podem tomar-se como primitivos o conceito de «distância (entre dois pontos)», o de «directão», etc. Análogamente, demonstra-se que o postulado das paralelas (Por um ponto exterior a uma recta passa uma paralela a essa recta, e uma só) se pode substituir pelo teorema, segundo o qual a soma dos ângulos internos dum triângulo é igual a um ângulo raso (a última proposição passaria então a ser um postulado e a primeira, um teorema).

Em virtude do que dissémos nos §§ anteriores, fica perfeitamente esclarecido o significado de expressões, tais como «hipótese» e «tese» (dum teorema ou dum postulado), «teoremas recíprocos», etc.

Devemos ainda notar que não existe uma distinção fundamental entre definições e postulados: estes são apenas, como já se tem dito, definições disfarçadas, que limitam a indeterminação dos conceitos primitivos.

11 — É normal, no ensino médio, para demonstrar (e até para enunciar) um teorema de Geometria, fazer uso de figuras, cujo papel não é, unicamente o de facilitar a compreensão da matéria, mas ainda o de substituir uma parte importante da demonstração (ou do enunciado): omitem-se muitas passagens, apenas porque são sugeridas, intuitivamente, pela figura. Perde-se, deste modo, em precisão, o que se ganha em clareza, — se pode chamar-se *claro* ao que é *superficial* ⁽¹⁾. As propriedades que, intervindo na demonstração dum teorema, não são geralmente invocadas, são as que envolvem os conceitos de «pertence a» e «situado entre», — chamadas *propriedades topológicas*. Por exemplo, o facto de um ponto ser interior ou exterior a um polígono é uma propriedade topológica. Têm de específico estas propriedades não serem alteradas quando, por exemplo, se substituem segmentos iguais por segmentos diferentes, ângulos rectos por ângulos não-rectos, segmentos de recta por convenientes linhas curvas, etc. — contanto que a posição relativa dos pontos seja respeitada ⁽²⁾. Daí o dizer-se que «a Geometria é a arte de raciocinar sobre figuras mal feitas».

Para que uma demonstração seja impecável, do ponto de vista lógico, é necessário que não dependa, de maneira nenhuma, da figura utilizada, de modo que, abstraindo desta, a demonstração não seja afectada em qualquer pormenor. Não pretendemos, com isto, insinuar que se devesse por completamente de parte a figura: pelo contrário, há grande vantagem no seu

uso (devidamente acautelado), como poderoso auxiliar da intuição. Não deixaremos, contudo, de aconselhar, como óptimo exercício para combater os hábitos de raciocínio provenientes do uso imoderado das figuras, fazer a demonstração de alguns teoremas, sem recorrer à imagem geométrica intuitiva. É, porém, necessário, para tal conseguir, além dum conhecimento perfeito de todas as propriedades que intervêm na demonstração, o emprêgo dum sistema de notações, muito mais minucioso do que os ordinariamente adoptados (não esqueçamos que as notações correspondem a verdadeiras definições, e qual o papel simplificador das definições). Os símbolos vêm deste modo substituir o desenho, o que representa um progresso decisivo no sentido da depuração lógica dos métodos.

12 — Vamos, neste §, introduzir algumas convenções que teremos necessidade de utilizar. Como símbolos representativos de entidades, empregaremos letras do alfabeto latino em redondo: maiúsculas (A, B, ...), para os pontos; minúsculas, (a, b, x, ...), para os números; minúsculas encimadas dum traço (\bar{x} , \bar{a} , ...), para as rectas; minúsculas entre colchetes ([y], [b], ...), para as figuras geométricas em geral. Em particular usaremos letras latinas minúsculas, em itálico, (a, x, ...), para designar números inteiros. Quando nada se diga em contrário, estes símbolos representarão seres indeterminados, dentro dos limites impostos pelas condições anteriores: assim, A e B designarão dois pontos *quaisquer, independentes* (coincidentes ou distintos); resulta ainda das convenções estabelecidas que proposições, tais como «A, P e X são pontos», « \bar{x} e \bar{y} são rectas» «k é um número» são proposições reconhecidas, uma vez por todas, como incondicionalmente verdadeiras, e, por isso mesmo, dispensáveis nos enunciados das outras proposições. O sinal ' será aqui utilizado com a mesma função que se lhe atribui vulgarmente (excepto quando se aplica às proposições, caso em que exprime negação).

Em vez do termo «igualdade» aplicado às figuras geométricas, usaremos o de «congruência»: «[a] é congruente a [b]» significa o mesmo que, no sentido ordinário, «a] é igual a [b]»; e escreveremos, para exprimir este facto, $[a] \cong [b]$, em vez de $[a] = [b]$. O sinal = fica reservado para exprimir identidade. Notemos que, no caso dos números, «igualdade» é sinónimo de «identidade».

Adoptaremos ainda as seguintes notações: ϵ (*pertence a*); \neq (*distinto de*); \parallel (*paralelo ou paralela a*); AB (recta def. por A e por B); \overline{AB} (segmento de extremos A e B); \widehat{AB} (semi-recta que tem por origem A e que passa por B); \widehat{AB}^{-1} (semi-recta oposta a \widehat{AB}); \widehat{AOB} (ângulo convexo cujos lados são \widehat{OA} e \widehat{OB}); $\bar{a} . \bar{b}$ (ponto de intersecção das rectas \bar{a} e \bar{b}); [ABC] (triângulo de vértices A, B e C); $A \in [P, Q]$ (A está situado entre P e Q). Convém ainda ter presentes algumas regras: num triângulo [ABC] o ângulo *oposto* ao lado \widehat{AB} é \widehat{ACB} (as letras exteriores

⁽¹⁾ É inteiramente justificável a orientação *intuitivo-racional*, que se imprime ao ensino da Geometria, nesta fase de iniciação (ainda não vai longe o tempo em que se ensinava Euclides, à maneira de Euclides...); o que não podemos aceitar, é que muitas vezes se apresente como demonstração, o que não é demonstração, e como definição... o que nada define.

⁽²⁾ Poincaré dá intuitivamente a ideia de «propriedade topológica», dizendo que são topológicas aquelas propriedades duma figura que se conservam, mesmo quando esta é grosseiramente reproduzida por uma criança.

são as que designam os vértices do lado oposto); AOB^{-1} será um ângulo adjacente a $A\hat{O}B$ (lado comum $\hat{O}A$); $A^{-1}\hat{O}B^{-1}$, o ângulo verticalmente oposto a $A\hat{O}B$; AOA^{-1} , um ângulo raso, etc.

13—Podemos agora, por meio do simbolismo adoptado, enunciar algumas proposições da Geometria euclidiana:

$\pi: ([a] \cong [b]) \cdot ([b] \cong [c]) \rightarrow ([a] \cong [c])$, (Propriedade transitiva da congruência entre figuras geométricas).

$\theta: (A, B, C \text{ não são colineares}) \cdot (A\hat{B}C > A\hat{C}B) \rightarrow (\overline{AC} > \overline{AB})^{(1)}$, (Em qualquer triângulo, a um maior ângulo opõe-se um maior lado).

$\alpha: (P, Q, R \text{ não são colineares}) \cdot (P\hat{Q}R \cong 1 \text{ recto}) \rightarrow (\overline{PR} > \overline{PQ})$, (A hipotenusa dum triângulo rectângulo é sempre maior do que os catetos).

Teorema de Thales: $(M, N, P, Q \text{ são colineares}) \cdot (M'N'P'Q' \text{ são colineares}) \cdot (MM' \parallel NN' \parallel PP' \parallel QQ') \cdot (M \neq N) \cdot (P \neq Q) \rightarrow \left(\frac{MN}{M'N'} = \frac{PQ}{P'Q'} \right)$.

Veja-se que, por este processo, a hipótese e a tese ficam sempre postas em relêvo. Além disso, os enunciados em linguagem corrente não são, de nenhum modo, mais precisos do estes, apresentados em linguagem simbólica. Não esqueçamos ainda que (Obs. 1), § 7) é indiferente adoptar este ou aquele símbolo no enunciado dum teorema, desde que se respeitem as convenções: assim, no enunciado do teorema θ , podemos, por exemplo, substituir A, B, C , respectivamente, por P, Q, R . Em particular, fazendo em α a substituição: P por R , Q por Q , R por P , a hipótese não muda de aspecto, enquanto a tese toma a forma « $\overline{PR} > \overline{QR}$ » (o cateto \overline{PQ} foi substituído pelo cateto \overline{QR} , sem que tivesse havido alteração do teorema). É ainda para notar como o enunciado, que apresentamos, do teorema de Thales, inclui todos os casos possíveis: possibilidade de alguns dos pontos M, P, N, Q , coincidirem; arbitrariedade na disposição dos mesmos; possibilidade de as rectas MQ e $M'Q'$ serem paralelas, etc.

Visto que, segundo as propriedades 1) e 2) do § 5, se tem $(h \rightarrow t) \equiv (t' \rightarrow h')$, será sempre possível enunciar um mesmo teorema, pelo menos de duas maneiras distintas. Assim, o teorema (2) « $(M \text{ pertence à mediatriz de } \overline{AB}) \rightarrow (AM \cong BM)$ » [Qualquer ponto da mediatriz dum segmento é equidistante dos extremos desse segmento], pode ainda enunciar-se como segue: « $(\overline{AP} \cong \overline{BP}) \rightarrow (P \text{ não pertence à mediatriz de } \overline{AB})$ » [Todo o ponto não equidistante dos extremos dum segmento não pertence à mediatriz desse segmento]; notemos ainda que o recíproco deste teorema é verdadeiro, o que permite substituir a seta pelo sinal \equiv .

14—Proponhamo-nos demonstrar agora o teorema α , enunciado no § anterior, admitindo como verdadeiros o teorema θ do mesmo § e o teorema β seguinte: « $(U, V, X \text{ não são colineares}) \cdot (U\hat{V}X \cong 1 \text{ recto}) \rightarrow (U\hat{X}V < U\hat{V}X)$ ». Para isso, representemos por h_1 e h_2 , respectivamente, as proposições « P, Q, R não são colineares» e « $P\hat{Q}R \cong 1 \text{ recto}$ »; a hipótese h de α será então $h \equiv h_1 \cdot h_2$. De h resulta, pelo teorema β : $P\hat{Q}R > P\hat{R}Q$ (prop. 2); de h_1 e 2, deduz-se, conforme θ : $\overline{PR} > \overline{PQ}$ (tese t do teorema α , que deste modo fica demonstrado). Podemos pôr em evidência todas as passagens da demonstração, utilizando o seguinte esquema (a chaveta indica que se deve tomar

o produto lógico das proposições abrangidas):

$$h \equiv h_1 \cdot h_2 \xrightarrow{\partial} h_1 \rightarrow t,$$

ou, mais simplesmente, $h \rightarrow h_1 \cdot \partial \rightarrow t$, donde $h \rightarrow t$ (teorema α); a implicação $h \rightarrow \partial$ (ou, o que é equivalente, $h \rightarrow h_1 \cdot \partial$) não é mais do que o teorema β ; por outro lado, a implicação $h_1 \cdot \partial \rightarrow t$ vem a ser o teorema θ . Para reconhecer a identidade entre estas implicações e os teoremas indicados, basta fazer nos enunciados uma conveniente mudança dos símbolos, tendo em vista a obs. 1) do § 7. Pode escrever-se ainda (§ 8): $\beta \rightarrow \alpha$ (segundo θ).

Nesta demonstração empregou-se, como se vê, um único silogismo: mas raramente isto acontece. O exemplo seguinte dará uma ideia do número surpreendente de propriedades que se aplicam numa demonstração, aparentemente simples, de Geometria elementar.

Seja o teorema γ seguinte: «Todo o ângulo inscrito numa circunferência é congruente a metade do ângulo ao centro correspondente»; e demonstremos este teorema no caso em que um dos lados do ângulo inscrito passa pelo centro da circunferência; isto é, demonstremos o teorema γ^* , cuja hipótese h^* é o produto lógico das condições: $h_1: [x]$ é uma circunferência de centro em O ; $h_2: A \in [x]$; $h_3: B \in [x]$; $h_4: C \in [x]$; $h_5: A \neq B$; $h_6: A \neq C$; $h_7: B \neq C$; $h_8: O \in BC$; e cuja tese t é a condição: $A\hat{B}C \cong \frac{1}{2} A\hat{O}C$. Para a demonstração, suponhamos

conhecidas as seguintes proposições categóricas verdadeiras: δ_1 —Definição de «diâmetro» duma circunferência; $\gamma_1: [k]$ é uma circunferência de centro em O (\overline{PQ} é um diâmetro de $[k]$) ($R \in [k]$) ($R \neq P$) ($R \neq Q$) \rightarrow (O, P, R não são colineares); δ_2 —Definição de «circunferência de centro em O »; $\gamma_2: (A, B, C$

não são colineares) ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$) \rightarrow ($A\hat{C}B \cong \frac{1}{2} B\hat{A}C^{-1}$)⁽³⁾; γ_3 :

« \overline{XY} é um diâmetro duma circunferência de centro em C) \rightarrow \rightarrow ($C \in [X, Y]$)»; $\gamma_4: (P \in [M, N]) \rightarrow (A\hat{P}N^{-1} \cong A\hat{P}M)$ ($A\hat{M}N \cong A\hat{M}P$)»; γ_5 —Propriedade transitiva da congruência entre ângulos; $\gamma_6: (A\hat{B}C \cong P\hat{Q}R) \rightarrow (\frac{1}{2} A\hat{B}C \cong \frac{1}{2} P\hat{Q}R)$.

Posto isto, virá, sucessivamente: $\partial_1: \overline{BC}$ é um diâmetro de $[x]$ (de h_1, h_3, h_4, h_7 e h_8 , por δ_1)⁽⁴⁾; $\partial_2: A, O, B$ não são colineares (de h_1, h_2, h_3, h_6 e ∂_1 , por γ_1); $\partial_3: \overline{OA} \cong \overline{OB}$ (de h_1, h_2 e h_3 , por δ_2); $\partial_4: A\hat{B}O \cong \frac{1}{2} A\hat{O}B^{-1}$ (de ∂_2 e ∂_3 , por γ_2); $\partial_5: O \in [B, C]$ (de h_1 e ∂_1 , por γ_3); $\partial_6: (A\hat{O}B^{-1} \cong A\hat{O}C)$ ($A\hat{B}C \cong A\hat{B}O$) (de ∂_5 , por γ_4); $\partial_7 \equiv t: A\hat{B}C \cong \frac{1}{2} A\hat{O}C$ (de ∂_4 e ∂_6 , pelas propriedades

⁽¹⁾ Admitimos aqui, como óbvia, a seguinte equivalência: « $(A, B, C \text{ não são colineares}) \equiv (A, B, C \text{ são os vértices dum triângulo})$ ».

⁽²⁾ Admitimos aqui, como teorema, o que no § 7 aceitámos como definição. Tomamos agora, como definidora, a seguinte proposição: «A mediatriz dum segmento é a perpendicular ao meio desse segmento».

⁽³⁾ Consequência dos teoremas: «Qualquer ângulo externo dum triângulo é congruente à soma dos internos opostos» e «Em qualquer triângulo a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes».

⁽⁴⁾ Quando, por exemplo, escrevemos: « $\partial_1 \dots$ (de ∂_2 e ∂_3 , por γ_2)» pretendemos com isto afirmar que $\partial_2 \cdot \partial_3 \rightarrow \partial_1$, sendo esta implicação equivalente ao teorema (ou postulado) γ_2 . Se, em vez dum teorema ou postulado, se tratar duma definição, ter-se-á, mais do que uma implicação simples (\rightarrow)—uma equivalência (\equiv). Note-se que foram omitidos os sinais . nos produtos lógicos.

γ_5 e γ_6 combinadas). Tem-se, pois, $h \rightarrow t$, como se pretendia demonstrar. Deixamos ao cuidado do leitor a construção dum esquema análogo ao do exemplo anterior.

15 — Na maior parte das demonstrações, em Geometria elementar, é necessário recorrer à intervenção de elementos que não figuram no enunciado, mas que se consegue eliminar antes de atingir o termo dos raciocínios. Tais elementos são introduzidos por meio de *hipóteses adicionais*, cujo papel consiste portanto em tornar exequível a demonstração. Assim, para demonstrar o teorema: «Se, num triângulo $[PQR]$, se tem $PQ > PR$, será também $PRQ > PQR$ », faz-se intervir um ponto M (elemento estranho), tal que: $Me PQ$, $PM \equiv PR$ (hipótese adicional); então, visto que $PQ > PR$, o ponto M ficará situado entre P e Q , e portanto será $PRQ > PRM$; por outro lado, como $P\hat{M}R \equiv P\hat{R}M$ (visto os lados \overline{PM} e \overline{PR} do triângulo $[PMR]$ serem congruentes, *por construção*), ter-se-á $PRQ > PMR$; além disso, $P\hat{M}R$ será maior do que PQR , por ser ângulo externo do triângulo $[MQR]$, oposto a $M\hat{Q}R = PQR$, e assim virá (tese do teorema): $PRQ > PQR$ ⁽¹⁾. O elemento M foi, como se vê, eliminado. Averiguemos, no entanto, em que medida é legítimo este procedimento, tão usual em Geometria elementar.

Seja $h(X) \rightarrow t(X)$ o teorema a demonstrar, e suponhamos que foi possível estabelecer a implicação $h(X) \cdot \alpha(X, Y) \rightarrow t(X)$, em que $\alpha(X, Y)$ representa uma hipótese adicional, introdutora do elemento estranho Y . Então, para que, da última implicação, se possa deduzir a primeira, basta que se verifique a seguinte condição de existência: «Qualquer que seja a determinação X^* de X que verifique a proposição $h(X)$, existe, pelo menos, uma determinação Y^* de Y para a qual é verdadeira a proposição $\alpha(X^*, Y)$ ». Com efeito, seja X^* uma determinação de X que verifica $h(X)$ e, supondo verificada a condição anterior, designemos por Y^* um elemento tal que a proposição $\alpha(X^*, Y^*)$ seja verdadeira; então, em virtude da implicação estabelecida, a proposição $t(X^*)$ também será verdadeira. Assim, toda a determinação de X que verifique $h(X)$ verificará também $t(X)$: isto quer dizer que se tem $h(X) \rightarrow t(X)$.

Além disso, é fácil ver que, se esta condição se não verificar, nada se pode concluir. Portanto, sempre que se introduzirem elementos estranhos numa demonstração, é preciso ter o cuidado de estabelecer as respectivas proposições de existência. Assim, no exemplo apresentado, deve acrescentar-se que o ponto M existe, necessariamente, em virtude do seguinte postulado: «Dados um segmento \overline{AB} , uma recta \bar{a} e um ponto $P \in \bar{a}$, existe, para cada lado de P , um, e um só ponto M , tal que: $Me \bar{a}$, $PM \equiv \overline{AB}$ ».

Tornemos agora ao teorema γ do § anterior. O seu enunciado, em linguagem simbólica, obtém-se a partir do de γ_1^* , suprimindo apenas as condições h_6 e h_8 , na hipótese deste. Bastará demonstrar o teorema em toda a sua generalidade, bastará demonstrá-lo em cada um dos seguintes casos: $p_1: (A \neq C) \cdot (O \in BC)$; $p_2: (A \neq C) \cdot (O \in BA)$; $p_3: A = C$; $p_4: (A \neq C) \cdot (\bar{B}O \text{ é interior a } \overline{ABC})$; $p_5: (A \neq C) \cdot (\bar{B}O \text{ é exterior a } \overline{ABC})$. Com efeito, tem-se, como facilmente se verifica, representando por h a hipótese de γ : $h_{p_1} + h_{p_2} + h_{p_3} + h_{p_4} + h_{p_5} \equiv h$ ($p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \equiv h$); isto é, os casos considerados são todos os possíveis. Mas as implicações $h_{p_1} \rightarrow t$ e $h_{p_2} \rightarrow t$ coincidem com o

teorema γ^* , já demonstrado; por outro lado, é óbvio que se tem $h_{p_3} \rightarrow t$; resta-nos pois provar que se tem $h_{p_4} \rightarrow t$ e $h_{p_5} \rightarrow t$, visto que, pela adição lógica ordenada de todas estas implicações, se obtém $h \rightarrow t$. Ora, para demonstrar as duas últimas implicações, basta introduzir um ponto D , tal que: $D \in [x]$, $D \in BO$, $D \neq B$; esse ponto *existe, necessariamente*, em virtude do seguinte teorema: «Toda a recta que passa por um ponto interior a uma circunferência encontra esta em dois pontos distintos». Então, virá, no caso p_4 : $\overline{AB} \equiv \overline{ABD} + \overline{DBC}$; e no caso p_5 : $\overline{AB} \equiv \overline{ABD} - \overline{CBD}$ ou $\overline{AB} \equiv \overline{CBD} - \overline{ABD}$; mas, em qualquer dos casos, os ângulos \overline{ABD} e \overline{CBD} têm um lado que passa pelo centro, o que permite aplicar-lhes o teorema γ_1^* : deste modo se chega, facilmente, à tese do teorema, sendo eliminado o ponto D , elemento auxiliar.

16 — Nos exemplos apresentados, a demonstração consistiu em passar *da hipótese para a tese*, por meio de várias implicações, equivalentes a outras tantas proposições categóricas, conhecidas como verdadeiras (teoremas, postulados ou definições). Por este processo, são formuladas, umas após outras, diversas proposições condicionais, de modo que: 1) toda a proposição, que não faça parte da hipótese do teorema ou duma hipótese adicional, é consequência lógica de algumas (ou mesmo todas) formuladas anteriormente; 2) a última proposição formulada coincide com a tese. Equivale isto a dizer (§ 8), que, partindo de proposições admitidas como verdadeiras, se é conduzido à proposição que se pretende demonstrar, pela aplicação sucessiva de silogismos. O caso mais simples será aquele em que a hipótese fica ligada à tese por uma cadeia linear de proposições: $h \rightarrow \varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \rightarrow \dots \rightarrow \varphi_{n-1} \rightarrow t$ (donde $h \rightarrow t$); mas será este também o caso menos freqüente. Em geral os raciocínios são mais complicados: apresentam-se ramificações muito variadas, em que as proposições se combinam entre si, quer pela soma lógica, quer pelo produto lógico.

Devemos contudo notar que não é esta a única maneira de proceder, o único método possível de demonstração: poderá ainda adoptar-se a marcha inversa, isto é, *da tese para a hipótese*, ou, o que vem a dar o mesmo, *da proposição a demonstrar, para as proposições categóricas admitidas como verdadeiras*. O primeiro método é chamado *sintético* ou *dedutivo*: várias proposições (pelo menos duas!) combinam-se entre si, por meio do raciocínio *dedutivo*, para conduzir a uma proposição *única*; o segundo método é chamado *analítico* ou *reduutivo*: *reduz-se*, em última análise, a veracidade duma única proposição, à veracidade de *de duas ou mais* proposições. O método sintético é o mais conveniente para a exposição duma teoria já construída; o método analítico é o mais indicado para a investigação, quando se pretende saber se uma dada proposição é ou não verdadeira.

Ocupar-nos-emos adiante, dum terceiro método de demonstração.

17 — Apliquemos o método analítico à demonstração do seguinte teorema: « $(\bar{u}$ é perpendicular ao meio de $\overline{AB})$ ($P \in \bar{u}) \rightarrow (\overline{AP} \equiv \overline{BP})$ ». Designemos por M o ponto $\bar{u} \cdot \overline{AB}$, que, por hipótese, é o ponto médio de \overline{AB} . Então, para que

⁽¹⁾ Neste exemplo e nos seguintes, limitamo-nos, para maior brevidade, a *esboçar* a demonstração, à maneira ordinária, fazendo um largo apelo à intuição.

se verifique a condição $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ (tese), basta que se tenha $[AMP] \cong [BMP]$ e $\widehat{AMP} \cong \widehat{BMP}$ (visto que, em triângulos congruentes, a ângulos congruentes se opõem lados congruentes); mas a última congruência resulta da hipótese, pois que, sendo u (ou MP) perpendicular a AB , os ângulos \widehat{AMP} e \widehat{BMP} serão rectos e portanto congruentes: resta-nos, pois, a condição $[AMP] \cong [BMP]$; mas, como os triângulos $[AMP]$ e $[BMP]$ são rectângulos, e um cateto dum é congruente a um cateto do outro (o lado \overline{MP} comum, a última congruência será satisfeita, desde que se tenha $\widehat{AM} \cong \widehat{BM}$; ora, esta condição resulta imediatamente da hipótese, pois, como dissemos, M é o ponto médio de AB : assim o teorema fica demonstrado.

Muitas vezes, as demonstrações feitas pelo método analítico são conduzidas de modo que o termo inicial seja a proposição dada, α , e o termo final, uma proposição, ω , conhecida como verdadeira, conforme o seguinte esquema: $\alpha \leftarrow \leftarrow \alpha_1 \leftarrow \dots \leftarrow \alpha_n \leftarrow \omega$. É claro que, na redução de α a α_1 , de α_1 a α_2 , etc., intervêm proposições conhecidas, em geral distintas de ω , mas na demonstração é atribuída a esta um papel de relêvo, como se a veracidade de α ficasse reduzida, por este processo, à veracidade de ω , e só à dessa proposição — o que não é exacto.

Em geral, aplica-se este método, quando as sucessivas proposições são mesmo equivalentes entre si. São deste género as demonstrações de identidades, em que a passagem de cada termo para o seguinte é feita com a aplicação dos chamados «princípios de equivalência das equações». Exemplo: Seja o teorema: ${}^m\sqrt{a} \cdot {}^m\sqrt{b} = {}^m\sqrt{ab}$ ⁽¹⁾; para a sua demonstração consideremos, sucessivamente, as seguintes proposições, *equivalentes entre si*: $({}^m\sqrt{a} \cdot {}^m\sqrt{b})^m = ({}^m\sqrt{ab})^m$, $({}^m\sqrt{a})^m \cdot ({}^m\sqrt{b})^m = ({}^m\sqrt{ab})^m$, $a \cdot b = ab$; mas a última proposição é incondicionalmente verdadeira (trata-se duma identidade): logo, também a primeira, *equivalente a esta*, será incondicionalmente verdadeira, e assim o teorema está demonstrado. Notemos que, neste exemplo, intervieram não só os princípios de equivalência, mas ainda: 1) propriedade relativa à potência dum produto; 2) definição de potência; 3) propriedades da igualdade.

(Continua)

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

⁽¹⁾ Em virtude das convenções adoptadas no § 12, a hipótese deste teorema («a e b são números» e «m é um número inteiro») é supérflua, e assim o teorema fica reduzido à tese, proposição incondicionalmente verdadeira neste caso. Supomos, é claro, que se trata aqui apenas de raízes positivas.

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo.

555 — Para que valores de m são reais e desiguais as quatro raízes da equação: $2x^4 - (3m-2)x^2 + m^2 - 4 = 0$. R: *Para que as quatro raízes sejam reais e desiguais é necessário e suficiente que o discriminante, a soma e o produto das raízes da equação resolvente $2x^2 - (3m-2)x + m^2 - 4 = 0$, sejam positivos, o que torna as suas raízes reais, desiguais e positivas. Quere dizer será: $(3m-2)^2 - 8m^2 + 32 > 0$; $3m-2 > 0$ e $m^2 - 4 > 0$. Estas desigualdades são satisfeitas: a 1.ª para qualquer valor real de m ; a 2.ª para $m > 2/3$ e a 3.ª para valores de m tais que $m > 2$ ou $m < -2$. Satisfazem pois às três desigualdades simplesmente os valores de m reais tais que $m > 2$.* J. C.

556 — Aplique a fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton ao desenvolvimento de $(1+x)^4$. R: $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$. J. C.

557 — Defina algebricamente o logaritmo do número N no sistema de base a . Calcule o logaritmo de 16 no sistema de base 2. R: *Chama-se logaritmo do número N no sistema de base a ao número x tal que $a^x = N$. Assim $\log_2 16 = x$, $2^x = 16$ $x = 4$.* J. C.

558 — Os comprimentos das bases de um trapézio rectângulo são $16^m, 32$ e $13^m, 86$ e o da altura é $4^m, 29$. Calcule recorrendo ao cálculo logarítmico, os valores dos ângulos do trapézio. R: *Como é óbvio dois dos ângulos são rectos e os outros dois são os ângulos agudos dum triângulo rectângulo de que os catetos são $4^m, 29$ e $2^m, 46 = 16^m, 32 - 13^m, 86$. E será então $\lg x = \frac{2,46}{4,29}$ donde $\log_{10} x = 0,59094 + 1,36754 = 1,75848$ e $x = 29^0 49' 52''$. $\beta = 60^0 10' 8'' = 90^0 - 29^0 49' 52''$.* J. C.

559 — Verifique a igualdade: $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a -$

$-\sin^2 b$. R: $\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a \cos b + \sin b \cos a) \times (\sin a \cos b - \sin b \cos a) = \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b \cos^2 a = \sin^2 a \cos^2 b - \sin^2 b (1 - \sin^2 a) = \sin^2 a (\cos^2 b + \sin^2 b) - \sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 b$. J. C.

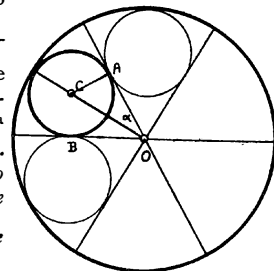
560 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores de: $\cos 75^0 = \cos(30^0 + 45^0)$ e de $\lg\left(-\frac{13}{3}\pi\right)$. R: $\cos 75^0 = \cos(30^0 + 45^0) = \cos 30^0 \cos 45^0 - \sin 30^0 \sin 45^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; $\lg\left(-\frac{13}{3}\pi\right) = -\lg \frac{13}{3}\pi = -\lg \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$. J. C.

561 — Considere uma circunferência de raio r . Trace uma outra circunferência de raio

$\frac{r}{3}$ e que seja tangente interiormente à primeira. Demonstre que há um número inteiro de circunferências nas condições da 2.ª e que são tangentes entre si. R: *Da figura, considerando o triângulo [OAC], deduz-se que $\sin z = \frac{AC}{OC} = \frac{1}{2}$ donde $z = 30^0$ e*

portanto $\widehat{AOB} = 60^0$. Como $360^0 = 6 \cdot 60^0$ conclue-se que há um número inteiro de circunferências nas condições do enunciado; esse número é evidentemente 6. J. C.

562 — Numa divisão, com resto diferente de zero, qual é o menor número de unidades que pode juntar ao dividendo sem alterar o resto? Justifique a resposta. R: *Tem-se (1) $D = dq + r$, $r < d$; adicionando m a ambos os membros de (1) vem (2) $m + D = dq + r + m$. Para que m seja o menor número nas condições do enunciado, deverá ser (3) $m + D = d(q+1) + r$ ou atendendo a (2) e (3) $r + dq + m = d(q+1) + r$ e portanto $m = d$.* J. C.



GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

PUBLICADO POR

J. CALADO, B. CARAÇA, R. L. GOMES, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

A N O I I N.^o 7 JULHO-1941

NÚMERO DEDICADO PRINCIPALMENTE AOS
CONCORRENTES A EXAMES DE APTIDÃO
ÀS ESCOLAS SUPERIORES

PREÇO DÊSTE NÚMERO 6\$00

DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

(CONTINUADO DO N.º 6)

18 — Tratemos agora do terceiro método de demonstração: o *método de redução ao absurdo*, também chamado *método analítico indirecto*. Este e os anteriores constituem os *métodos gerais de demonstração*, por isso que, para demonstrar uma proposição *qualquer*, é forçoso adoptar um destes métodos, além de que o emprego de cada um deles não é privativo duma classe particular de proposições. Pode até acontecer que, na mesma demonstração, se acumulem dois ou mesmo os três métodos: tratar-se-á, neste caso, duma demonstração de tipo *misto*.

O método de redução ao absurdo consiste essencialmente em demonstrar a proposição dada α , estabelecendo a falsidade da sua contraditória, α' : ora (§5), se α' é falsa, α é necessariamente verdadeira. Para demonstrar a falsidade de α' , segue-se a marcha dedutiva: deduzem-se de α' novas proposições; destas, outras ainda, e assim sucessivamente, até se chegar a uma proposição ω' que seja a contraditória duma proposição ω , conhecida como verdadeira; assim ω' será falsa, e como se tem $\alpha' \rightarrow \omega'$, também α' será falsa. Quando se chega à proposição ω' , manifestamente falsa, diz-se que tal conclusão é *absurda*, donde a designação, do método (de redução ao absurdo); por outro lado, é visível a analogia entre este método e o analítico, o que justifica, em parte, a segunda designação.

Como exemplo, demonstremos em *Geometria plana*, partindo do postulado das paralelas, a seguinte afirmação: «Duas rectas distintas, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si». A contraditória da proposição a demonstrar é a seguinte: «Existem, pelo menos, duas rectas distintas \bar{a} e \bar{b} , que, sendo paralelas a uma terceira \bar{c} , não são paralelas entre si»; mas notemos que, se as rectas \bar{a} e \bar{b} são distintas e não paralelas, se encontram num ponto $M = \bar{a} \cap \bar{b}$, e, assim, a última propo-

sição é equivalente à seguinte: «Existe uma recta \bar{c} e um ponto M , tais que, por M , passam duas rectas \bar{a} e \bar{b} , distintas, paralelas a \bar{c} ». Mas esta proposição é incompatível com o postulado das paralelas, e portanto falsa: a proposição dada é pois verdadeira.

Muitas vezes, este método reduz-se à simples aplicação das propriedades 1) e 2) do §5, ao teorema $\kappa \rightarrow \iota$, a demonstrar: como as implicações $\kappa \rightarrow \iota$ e $\iota' \rightarrow \kappa'$ são equivalentes, demonstrar que se tem $\kappa \rightarrow \iota$ é o mesmo que demonstrar a implicação $\iota' \rightarrow \kappa'$ (parte-se da contraditória da tese e é-se conduzido à negação da hipótese).

19 — Em Matemática, não se consideram apenas teoremas, postulados e definições — verdades estabelecidas: estudam-se também problemas — verdades a estabelecer. (Modificando as convenções introduzidas no §12, passaremos neste § a representar elementos determinados ou *conhecidos* pelas primeiras letras do alfabeto e elementos variáveis ou *desconhecidos* pelas últimas letras do alfabeto). Esquemáticamente, um problema consiste em, dada uma proposição condicional $\alpha(X)$, pedir a determinação dos elementos que satisfazem à condição $\alpha(X)$. Assim, resolver um problema não é mais do que passar duma proposição $\alpha(X)$ para outra $\beta(X)$, que seja equivalente à primeira, e que se considere *definidora* da classe dos elementos que as verificam. Por exemplo, o problema «Determinar os números x , tais que $x^2 - 7x + 10 = 0$ » fica resolvido quando se passa à proposição condicional « $(x=2) + (x=5)$ », equivalente à que é expressa pela equação do enunciado.

Mas, tendo em vista as observações do §9, é de prever que surjam dúvidas, quando se procura interpretar o sentido da locução «resolver um problema». Assim, os problemas que

se propõem, geralmente, em Geometria elementar, deverão ser resolvidos, *só com auxílio da régua e do compasso*. Neste caso, a referida locução adquire um sentido particular, e devem considerar-se como definidoras, correspondentes a problemas *elementares*, as proposições condicionais dos seguintes tipos: « \bar{x} é a recta que passa pelos pontos A e B»; « $[x]$ é a circunferência de centro em O e de raio congruente a \overline{PQ} »; « $X = \bar{a} \cdot \bar{b}$ »; «X é um ponto de intersecção das circunferências $[a]$ e $[b]$ »; «X é um ponto de intersecção de \bar{a} com a circunferência $[c]$ »; «(X, Y e Z são distintos e pertencem a \bar{a}). (X \in [Y, Z])». Dêste modo, deve considerar-se *teóricamente* resolvido um problema, quando se chega a um conjunto de proposições dêste tipo, como equivalente à condição apresentada; é óbvio que a *resolução* de tais problemas elementares não interessa à Matemática, mas apenas ao Desenho: *matematicamente*, êsses problemas consideram-se, por sua própria natureza, já resolvidos.

Dá-se o nome de *soluções* do problema, correspondente a uma condição $\alpha(X)$, às determinações de X que verificam a condição dada: haverá problemas com várias soluções (indeterminados), uma única solução (determinados) e nenhuma solução (impossíveis). Assim, o problema «Dados A e B, de-

terminar X, de modo que $\overline{AX} \cong \overline{BX} \cong \frac{1}{m} \overline{AB}$ » admite duas soluções, no plano, e uma infinidade de soluções, no espaço, se $m < 2$; admite uma única solução, se $m = 2$; e não admite solução nenhuma, se $m > 2$. Mas é ainda manifesto que o número de soluções dum problema está condicionado pelo sentido que se atribui à locução «resolver um problema»; assim, há problemas, como o da trisecção do ângulo, o da duplicação do cubo e o da quadratura do círculo, que, na *Geometria da régua e do compasso*, não admitem solução nenhuma, embora sejam resolúveis por outros processos.

Para resolução de problemas de Matemática existem dois métodos gerais: o *analítico* ⁽¹⁾ e o *sintético*. Consiste o primeiro em reduzir a resolução do problema proposto à de outros que pareçam mais simples, cuja resolução se reduz, por sua vez, à de outros ainda, e assim sucessivamente, até se chegar a problemas de resolução imediata; é

êste o método que se usa, por exemplo, na resolução das equações, com a aplicação dos princípios da equivalência. Pelo método sintético, resolvem-se, uns a seguir aos outros, vários problemas conhecidos, de modo que, ao resolver o último, fique também resolvido o problema proposto. Não entraremos em pormenores a respeito dêstes métodos, nem sequer apresentaremos exemplos da aplicação de cada um dêles à resolução de problemas. Limitar-nos-emos a observar que deve haver todo o cuidado em estabelecer a equivalência entre a condição final, $\omega(X)$, definidora das soluções, e a condição dada, $\alpha(X)$; em particular, se $\alpha(X) \rightarrow \omega(X)$, sem que se tenha $\omega(X) \rightarrow \alpha(X)$, são introduzidas *soluções estranhas*; ao passo que, se $\omega(X) \rightarrow \alpha(X)$, sem que se verifique a implicação inversa, serão *omitidas* soluções.

Antes de terminar, desejamos formular algumas conclusões. A exposição que fizemos não é tão desenvolvida que mostre todos os recursos da Lógica matemática (ou simbólica), na análise do raciocínio matemático; nem tão reduzida, que possa, sem qualquer simplificação prévia, ser utilizada no ensino médio. Foi nosso intento apresentar sugestões, de preferência a indicar um modelo definitivo para o ensino. Uma conclusão, porém, se impõe, entre todas: a dificuldade dum estudo criterioso dos métodos gerais da Matemática, e duma justa compreensão do encaadeamento das proposições no raciocínio matemático, sem recorrer à Lógica simbólica, e sem uma cuidadosa preparação que desenvolva no aluno hábitos de rigorismo lógico, libertando-o progressivamente dos processos intuitivos.

Algumas noções, como as de produto lógico e de soma lógica, podem ser úteis no estudo das desigualdades.

Por outro lado, a Aritmética, com a simplicidade dos seus conceitos e das suas propriedades, constitui, mais do que a Geometria, um campo privilegiado para a aplicação da Lógica matemática.

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

⁽¹⁾ Também chamado método *do problema resolvido*, porque se começa por supor já resolvido o problema, a-fim-de mais facilmente se descobrir o processo de resolução.