

PALESTRA

REVISTA DE PEDAGOGIA E CULTURA

6

LICEU NORMAL DE PEDRO NUNES

LISBOA — MCMLIX

INTRODUÇÃO À LÓGICA SIMBÓLICA E AOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ⁽¹⁾

por J. SEBASTIÃO E SILVA

INTROITO

«*Quem diz matemática diz demonstração*»

BOURBAKI

Era objectivo inicial destas palestras mostrar como é fácil iniciar em pouco tempo qualquer pessoa, mesmo um aluno do liceu, de 16 ou 17 anos, nos elementos da lógica simbólica. Todavia, como nos dirigimos a professores — e principalmente a professores de matemática — tal objectivo deverá ser bastante ultrapassado, para minucioso esclarecimento de vários aspectos dos assuntos tratados e discussão das suas possíveis repercussões no domínio da didáctica liceal.

Ao mesmo tempo, irão sendo introduzidas, a propósito, algumas noções de matemática moderna, especialmente de álgebra abstracta, que se reputam hoje indispensáveis à formação do professor de matemática.

No espírito de todos os que ensinam esta disciplina deveria sempre estar presente a frase de BOURBAKI acima transcrita. Na verdade, *matemática sem demonstração* o que é, senão caricatura grotesca, abominável, da verdadeira matemática, tão nociva no campo pedagógico quanto a segunda é benéfica e necessária? Há certamente uma posição extremista na referida frase, que quase equivale a afirmar: *quem diz matemática diz lógica formal*. Não, a matemática não é só lógica; as suas origens intuitivas e aplicações concretas são tão importantes no ensino como a sua própria estruturação racional (ocorre perguntar qual destes aspectos é mais curado entre nós). Mas o que se pode desde já afirmar é que:

⁽¹⁾ — Este artigo reproduz uma parte das lições proferidas pelo autor no Liceu Normal de Pedro Nunes nos dias 7, 14, 21 e 28 de Janeiro, 4 de Fevereiro e 4 de Março de 1959.

A parte restante, relativa à teoria dos conjuntos e das relações, será publicada oportunamente.

1) A lógica formal deu lugar a um ramo da matemática, que, com o nome de *lógica matemática*, *lógica simbólica* ou *logística*, inclui, entre outros capítulos, o *cálculo proposicional* e a *teoria dos conjuntos* (sem topologia).

2) Toda a matemática moderna está intimamente penetrada do espírito da lógica matemática.

Compete hoje portanto aos professores de matemática ensinar lógica nos liceus, de maneira explícita ou implícita (e melhor fora de maneira explícita). Por outras palavras: compete, por definição, a esses professores, ensinar os alunos a pensar correctamente, o que é muito diferente, e por vezes o oposto, de ensinar a resolver pontos-modelo para os exames.

Ora não se pode ter uma ideia exacta e clara do que é uma *axiomática*, uma *definição* ou uma *demonstração* — e, portanto, do que é *pensamento racional* — sem recorrer à lógica simbólica, que está para a matemática dos nossos dias, como a lógica formal de ARISTÓTELES estava, há mais de 20 séculos, para a geometria dos helenos. Ainda há cerca de 50 anos, matemáticos de primeira plana cometiam incorrecções de raciocínio, que são hoje apontadas como índice de preparação lógica deficiente. Este e outros factos evidenciam como o estudo de lógica matemática (incluindo nesta designação a teoria dos conjuntos) é essencial à formação do matemático moderno.

Há cerca de 20 anos, sustentámos, na «*Gazeta de Matemática*» (n.^{os} 5, 6 e 7), a ideia de introduzir a lógica simbólica no ensino secundário. Hoje a mesma ideia é defendida com insistência em congressos internacionais, e já tem sido experimentada com êxito nalguns países.

§ I. SISTEMAS DE LINGUAGEM ESCRITA

Qualquer língua, falada ou escrita, consiste em agrupamentos de sinais elementares, que podem ser *fonemas* (na linguagem falada) ou *letras* ou ainda *ideogramas* (na linguagem escrita). Há assim duas espécies principais de escrita: *fonética* e *ideográfica*. Na primeira, os sinais elementares (letras) representam sons; na segunda, os sinais elementares (ideogramas) representam directamente ideias (escrita chinesa e japonesa, por exemplo).

Nesta segunda categoria podemos incluir a própria escrita simbólica da matemática. Assim, os sinais 5, 3, π , +, <, etc. representam, não sons, mas sim directamente ideias.

Entre todos os possíveis agrupamentos de sinais elementares numa língua, haverá uns *com significado* e outros *sem significado*. Assim, a sucessão de letras AMRO não tem qualquer significado na língua portuguesa; mas têm-no, por exemplo, os agrupamentos ROMA, ARMO, MORAR, MORARA, etc. Tais agrupamentos distinguem-se entre si, não só pelas letras que os formam, mas também pela ordem

em que essas letras estão dispostas, podendo inclusivamente ser repetidas: trata-se pois dos agrupamentos denominados, em análise combinatória, *arranjos com (ou sem) repetição* ⁽¹⁾.

Observemos ainda que, enquanto nas escritas fonéticas os agrupamentos têm normalmente carácter *unidimensional*, na escrita simbólica da matemática aparecem também agrupamentos *bidimensionais* (fracções, determinantes, etc.). Note-se que a escrita bidimensional pode sempre ser substituída por escrita unidimensional; assim, pode escrever-se $\frac{3}{4}$ em vez de $\frac{3}{4}$, $\exp x$ em vez de e^x , etc. Mas em certos casos (por exemplo o dos determinantes) é manifestamente mais cómodo o sistema bidimensional.

Numa língua, as palavras são agrupadas em frases ou períodos, estes em parágrafos, etc.: existem assim diferentes *ordens* de agrupamentos. Em matemática e em lógica matemática essas diferentes ordens distinguem-se pelo uso da parênteses ou de pontos.

É natural chamar *sinais compostos* aos agrupamentos de *sinais simples* ou *elementares*. A todos os sinais, simples ou compostos, poderemos ainda chamar *expressões*, conquanto este termo seja usado, de preferência, para sinais compostos.

§ 2. DESIGNAÇÕES E PROPOSIÇÕES. DISTINÇÃO ENTRE A DESIGNAÇÃO E O DESIGNADO

Em qualquer língua encontramos duas espécies principais de expressões com significado: *designações* e *proposições*. As designações, também chamadas em certos casos 'nomes', designam ou nomeiam *seres* ⁽²⁾. As proposições, também chamadas 'frases' ou 'sentenças' exprimem *juízos*, *verdadeiros* ou *falsos* ⁽³⁾.

⁽¹⁾ — Vem a propósito lembrar que haveria toda a conveniência, quer científica quer didáctica, em introduzir no ensino secundário o estudo dos arranjos com repetição, precisamente no início da análise combinatória. Na verdade, não só é esse o conceito mais usual da análise combinatória (na vida corrente, nos fundamentos da matemática, no cálculo das probabilidades, etc.), como até o de mais fácil estudo. Chega a ser desconcertante que, para resolver problemas tais como '*Quantos números diferentes de 3 algarismos se podem escrever com os algarismos de 1 a 9?*' o aluno seja obrigado a seguir um caminho mais longo que o natural, recorrendo ao cálculo de arranjos sem repetição...

⁽²⁾ — Recordemos que se dá o nome de 'ser', 'ente' ou 'entidade' a tudo o que, numa dada teoria, se considera como *existente*. Trata-se de um conceito extremamente abstracto que procuraremos esclarecer, mais tarde, ao tratar dos conceitos de 'indivíduo', 'classe' e 'relação'. Como sinónimo de 'ser', poderia usar-se ainda o termo 'coisa', mas este normalmente não se aplica a pessoas ou animais.

⁽³⁾ — Em terminologia gramatical, as designações dizem-se *substantivos* ou *locuções substantivas* (de 'substância', *ser*), e as proposições, *orações* (de 'orar', *falar*).

Por exemplo, a expressão ROMA, na língua portuguesa, é uma designação, visto que nomeia um ente, neste caso uma cidade. Mas já a expressão ROMA É A CAPITAL DA ITÁLIA é uma proposição, visto que exprime um juízo, neste caso verdadeiro.

Na escrita simbólica da matemática encontramos, a cada passo, exemplos de ambas as espécies de expressões. Assim, os símbolos 2 , $2+3$, $\sqrt{3}$, $\log 5$, $\sin \pi$, $e^{i\pi}$, etc. são designações (nomeiam números); por outro lado as expressões $2+3=5$, $3>7$, $e^{i\pi} = -1$ são proposições, verdadeiras a primeira e a terceira, falsa a segunda. Mas note-se que, em matemática, as proposições simbólicas são habitualmente chamadas *fórmulas*, enquanto as designações se dizem simplesmente *expressões* e algumas vezes *termos*.

A propósito das designações há uma observação fundamental a fazer: não se pode, em geral, confundir uma designação com o ente que esta nomeia; isto é, há que distinguir, normalmente, a *designação* do *designado* ⁽¹⁾. A não observância desta simples regra conduz muitas vezes a situações paradoxais. Consideremos, por exemplo, as duas seguintes proposições:

Roma é a capital da Itália.

Roma é um substantivo próprio formado por 4 letras.

Se tomássemos à letra o que está escrito, viria, pela transitividade da igualdade, a seguinte conclusão:

A capital da Itália é um substantivo próprio formado por 4 letras.

Ora esta conclusão, conquanto seja *formalmente* correcta, é obviamente ilegítima, se atendermos ao significado dos termos: na primeira proposição a palavra *Roma* refere-se à cidade que normalmente nomeia (o designado): na segunda, a palavra *Roma* refere-se a essa própria palavra (a designação). O que se verifica portanto aqui é uma ambiguidade de escrita: duas coisas diferentes designadas pela mesma expressão. A fim de evitar ambiguidades deste tipo, adopta-se geralmente em lógica a seguinte convenção: para designar uma expressão qualquer (em vez do que esta porventura designa) escreve-se a referida expressão entre aspas simples ⁽²⁾. Assim,

⁽¹⁾ — Em casos excepcionais não há inconveniente em confundir um ente com a expressão mais simples que o representa. Sucede isto, por exemplo, com os números imaginários e, de um modo geral, com todas aquelas entidades que, em matemática, se diz terem *existência formal* ou *simbólica*.

⁽²⁾ — Note-se que as aspas duplas já têm outro significado, pois conduzem à *designação da designação da designação inicial*. Aliás, para não complicar as notações, o uso das aspas pode ser evitado, sempre que não haja perigo de confusão.

a maneira correcta de escrever a segunda proposição do exemplo seria :

'Roma' é um substantivo próprio formado por 4 letras,

servindo as aspas para indicar que se está designando a própria palavra *Roma* e não a cidade que essa palavra normalmente designa.

Em matemática é corrente confundir-se a designação com o designado, o que importa muitas vezes evitar. Sejam por exemplo as duas proposições :

π é um número irracional, π é uma letra grega,

Se o sujeito das duas proposições fosse o mesmo, concluir-se-ia :

Há uma letra grega que é um número irracional

Vem a propósito lembrar uma dificuldade típica que se depara muitas vezes no ensino inicial da álgebra : o facto de parecer ao aluno que chamamos números às letras, o que se lhe afigura, com toda a razão, uma excentricidade. Ora não é verdade que chamamos números às letras : *apenas passamos a usar as letras como se fossem designações de números*. O equívoco do aluno provém pois de tomar a designação pelo designado — o sinal pela coisa.

§ 3. EQUIVALÊNCIA DE DESIGNAÇÕES. IDENTIDADE DE ENTES

Dum modo geral, chamaremos *valor de uma designação* ao ente por esta designado. Pode acontecer que duas designações tenham o mesmo valor : dizem-se então *equivalentes* ou *sinónimas*. Assim, a proposição '*Roma é a capital da Itália*' afirma que o ente designado por '*Roma*' é o *mesmo* que o ente designado por '*capital de Itália*' e que portanto estas duas expressões são equivalentes. É o verbo '*ser*', ou melhor, a expressão '*é a*' que, neste caso, exprime a identidade dos entes designados. Em lógica simbólica a relação de identidade é expressa, sistematicamente, pelo sinal '='. Poderíamos pois escrever :

Roma = capital da Itália

O sinal '=' equivale portanto às expressões usuais '*é o*' ou '*é a*' '*é o mesmo que*', '*é idêntico a*', etc. Podemos contudo transigir com o hábito, continuando a ler '*igual a*' este sinal, desde que não esqueçamos que ele exprime identidade e não apenas igualdade.

É claro que tal convenção se aplica em particular à matemática. Por exemplo, a fórmula ' $2+3=5$ ' afirma que o ente designado por ' $2+3$ ' é o mesmo que o ente designado por ' 5 '. Portanto, ' $2+3$ ' e ' 5 ' são expressões equivalentes ou sinónimas, mas não idênticas entre si,

visto que não são, evidentemente, a *mesma* expressão (a palavra 'idêntico' vem de '*idem*' sinónimo latino de 'o mesmo', 'a mesma coisa'). É portanto verdade que $2+3=5$, mas é falso que

$$'2+3' = '5';$$

apenas poderemos escrever:

$$'2+3' = '2+3' \quad , \quad '5' = '5', \quad \text{etc.}$$

Exemplos análogos nos oferecem as fórmulas

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \quad , \quad e^{i\pi} = -1 \quad , \quad \text{etc.}$$

O sinal '=' exprime pois *identidade*, não entre as expressões que liga, mas entre os seres que estas nomeiam: não entre as *designações*, mas sim entre os *designados*. Indica que as duas expressões, embora *distintas*, designam *um mesmo* ente. Como vimos as designações dizem-se neste caso equivalentes. Também se diz então que os entes designados são *idênticos*, mas há aqui um *abuso cómodo de linguagem* (como tantos outros a que recorreremos), pois é evidente que não se trata então de dois entes, mas de *um só*.

Para indicar que duas expressões não designam o mesmo ente, escreve-se entre ambas o sinal ' \neq ', que se lê 'é distinto de', 'é diferente de', 'não é o mesmo que'. Assim tem-se

$$\sqrt{4+9} \neq 2+3 \quad , \quad '2+3' \neq '5' \quad , \quad \text{Portugal} \neq \text{Espanha}, \quad \text{etc.}$$

A *noção de identidade* é pois um conceito lógico de aplicação universal. Pena é que se tenha atribuído a este termo, em álgebra, um significado muito mais restrito: o de 'igualdade absoluta', em oposição a 'igualdade condicional' ou 'equação'; mas este ponto só poderá ficar devidamente esclarecido, ao tratarmos das expressões com variáveis ⁽¹⁾.

Para ilustrar as considerações anteriores, um exemplo muito sugestivo e de real interesse para o ensino é o das fracções. Escrevendo por exemplo $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ afirmamos que as duas fracções designam o mesmo ente (neste caso o mesmo número fraccionário). O sinal '=' exprime pois aqui identidade, não entre as fracções (que são *distintas*, embora *equivalentes*), mas sim entre os números que estas representam. O significado de 'fracção' não é portanto o mesmo de 'número fraccionário', embora muitos autores, até dos melhores, usem por vezes estes termos

(¹) — O leitor que se considere já devidamente esclarecido sobre este ponto poderá passar aos parágrafos seguintes

como sinónimos. Para reconhecer a necessidade de tal distinção, basta lembrar que dizemos, por exemplo

‘A fracção $\frac{6}{10}$ é redutível e a fracção $\frac{3}{5}$ irredutível’;

mas já não dizemos, com certeza:

‘O número fraccionário $\frac{3}{5}$ é irredutível’,

visto que o número $3/5$ é o mesmo que $6/10$.

Aliás é bem sabido que uma fracção pode designar um número que não seja sequer fraccionário: tal é o caso da fracção $\frac{15}{3}$, que representa um número

inteiro, o da fracção $\frac{\sqrt{2}}{2}$ que representa um número irracional, etc., etc.

Em resumo, as fracções são designações e, portanto, não devem ser confundidas com os entes (números) que designam.

§ 4. VALORES LÓGICOS DAS PROPOSIÇÕES

Vejamos agora o que sucede quanto às proposições.

Situando-nos no esquema da lógica clássica, bivalente, uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, não podendo dar-se os dois casos ao mesmo tempo (*princípio da não contradição*) e não existindo uma terceira possibilidade (*princípio do terceiro excluído*). Podemos então convencionar dizer que as proposições verdadeiras têm o valor *verdade* e as proposições falsas têm o valor *falsidade*: tais são pois os dois únicos *valores lógicos* cuja existência vamos admitir.

Por convenção ainda, designaremos o valor verdade pelo símbolo 1 e o valor falsidade pelo símbolo 0. Alguns autores usam, para representar os valores lógicos, as iniciais maiúsculas das palavras que os designam nas respectivas línguas: assim, em português, teríamos respectivamente as letras V e F como designações desses valores ⁽¹⁾.

Podemos agora estender o conceito de equivalência às proposições. Diremos, naturalmente, que duas proposições são *equivalentes*, quando têm o mesmo valor lógico, isto é, quando são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Podemos ainda usar o sinal ‘=’ para indicar a identidade dos valores lógicos, mas, para a distinguir da identidade em geral, convém usar neste caso um sinal diferente: indicaremos que duas proposições são equivalentes, escrevendo entre ambas o sinal ‘ \leftrightarrow ’. (Eventualmente, usaremos ainda o sinal ‘=’ para o mesmo fim). Assim, escrevendo

$$2 + 3 = 5 \leftrightarrow \sqrt{9} = 3,$$

⁽¹⁾ — Recordemos que, no cálculo das probabilidades, se representa por 1 a certeza e por 0 a impossibilidade.

queremos significar apenas que as duas proposições ' $2+3=5$ ' e ' $\sqrt{9}=3$ ' têm o mesmo valor lógico (neste caso 1).

§ 5. OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE PROPOSIÇÕES

a) *Negação*. A mais simples operação lógica é a negação, que consiste em converter uma dada proposição numa outra, que é verdadeira se a primeira é falsa, e falsa se esta é verdadeira. A proposição assim obtida também se diz negação da primeira.

Na linguagem comum a negação efectua-se, *nos casos mais simples*, antepondo o advérbio 'não' ao verbo da proposição dada. Assim, por exemplo, a negação de '*O Sol é um planeta*' é '*O Sol não é um planeta*'. Mas já a negação de '*Todos os homens são inteligentes*' é '*Nem todos os homens são inteligentes*' e a de '*Nenhum homem é inteligente*' é '*Algum homem é inteligente*'.

Em lógica simbólica a negação é indicada antepondo um determinado sinal à proposição a negar. Para esse fim, usaremos o sinal ' \sim ' que se pode ler 'não é verdade que' ⁽¹⁾. Assim, a negação de 'Todos os homens são inteligentes' escreve-se:

\sim Todos os homens são inteligentes

o que se pode ler: 'Não é verdade que todos homens são inteligentes'. Anàlogamente, a negação da proposição ' $7 > 3$ ' (verdadeira) é a proposição (falsa):

$\sim 7 > 3$

que se lê: 'Não é verdade que 7 é maior que 3' ou simplesmente '7 não é maior que 3'.

b) *Conjunção*. Consideremos as duas seguintes proposições:

'*O Sol é uma estrela*' , '*A Lua é um satélite da Terra*'

Ambas são verdadeiras e é portanto verdadeira a proposição:

'*O Sol é uma estrela e a Lua é um satélite da Terra*'.

que se obtém ligando as duas primeiras pela conjunção copulativa 'e'.

Mas já é falsa a proposição:

'*Vénus é uma estrela e a Lua é um planeta*'

⁽¹⁾ — Alguns autores usam o sinal '—' para a negação; mas este tem o inconveniente óbvio de se confundir com o sinal de subtracção.

por não serem verdadeiras ambas as proposições ligadas pela palavra 'e' (embora seja verdadeira a segunda).

A palavra 'e' funciona pois aqui como sinal de uma operação lógica que, aplicada a duas proposições, dá origem a uma nova proposição, que será verdadeira se as proposições dadas forem ambas verdadeiras (e só nesse caso). A esta operação lógica dá-se o nome de *conjunção*; diz-se também que a proposição obtida é a conjunção das duas primeiras.

Em lógica simbólica, indicaremos a conjunção com o sinal \wedge , que se lê 'e' ⁽²⁾. Assim, poderemos escrever:

O Sol é uma estrela \wedge *a Lua é um satélite da Terra.*

Analogamente, são verdadeiras, como é fácil ver, as proposições:

$$2 + 3 = 5 \wedge \sqrt{9} = 3, \quad \text{sen } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \pi < 3,15$$

e falsas as proposições:

$$2 + 3 = 5 \wedge \pi > 4, \quad 3 < 1 \wedge \sqrt{-4} = -2$$

c) *Disjunção*. Consideremos as duas seguintes proposições:

'Carlos é médico ou professor, ou ambas as coisas'

'Dou-lhe uma bola ou um automóvel de corda, mas não as duas coisas'

No primeiro caso está-se a indicar que uma *pelo menos* das proposições 'Carlos é médico', 'Carlos é professor' é verdadeira, *podendo sê-lo ambas*. No segundo caso está-se a precisar que *uma e só uma* das proposições 'Dou-lhe uma bola', 'Dou-lhe um automóvel de corda' será verdadeira.

De um modo geral, quando, a respeito de duas proposições, se indica que uma delas, *pelo menos*, é verdadeira, forma-se uma nova proposição, que se chama *disjunção inclusiva* das primeiras. Quando se indica que uma, e uma só, das proposições consideradas é verdadeira, forma-se uma nova proposição, denominada *disjunção exclusiva* das primeiras. Também se dá o nome de disjunção (*inclusiva* ou *exclusiva*) à operação lógica que consiste em passar das proposições dadas para a sua disjunção (respectivamente inclusiva ou exclusiva).

Assim, a primeira proposição do exemplo anterior é a disjunção inclusiva das hipóteses 'Carlos é médico', 'Carlos é professor',

(¹) — Muitos autores usam para o mesmo fim o sinal '&'.

enquanto a segunda é a disjunção exclusiva das hipóteses ‘Dou-lhe uma bola’, ‘Dou-lhe um automóvel de corda’.

Como se vê, a palavra ‘ou’ (que em gramática se chama *conjunção disjuntiva*) não permite, só por si, distinguir a disjunção inclusiva da exclusiva. Em latim, a palavra ‘vel’ tem aproximadamente o significado do ‘ou’ inclusivo; daí o adoptar-se, em lógica matemática, para a disjunção inclusiva, o sinal ‘ \vee ’, que, por comodidade, se lê simplesmente ‘ou’. Assim, a primeira proposição do exemplo anterior pode escrever-se agora, sem perigo de confusão:

$$\text{Carlos é médico} \vee \text{Carlos é professor}$$

Segundo esta convenção, serão verdadeiras, como é fácil ver, as proposições:

$$3 < 5 \vee 3 + 2 = 7, \quad \sqrt{-4} = 2 \text{ i } \vee \sqrt{10} > 3,$$

e falsas as proposições:

$$5 < 3 \vee 3 + 2 = 7, \quad \sqrt{-4} = -2 \vee \sqrt{10} = 3$$

Para a disjunção exclusiva usaremos o sinal ‘ $\dot{\vee}$ ’.

Normalmente, quando se diz apenas ‘disjunção’ subentende-se que se trata da disjunção inclusiva.

§ 6. AS OPERAÇÕES LÓGICAS CONSIDERADAS COMO OPERAÇÕES SOBRE VALORES LÓGICOS

Já atrás se disse (§ 4) que designamos por ‘1’ o valor *verdade* e por ‘0’ o valor *falsidade*. Para determinar o valor lógico da negação, da conjunção e da disjunção, a partir dos valores lógicos das proposições dadas, podem utilizar-se as seguintes tabelas, habitualmente chamadas *tabelas de verdade*:

		$p \wedge q$			$p \vee q$		
p	$\sim p$	$\begin{array}{c cc} & q & \\ \hline p & o & 1 \\ \hline o & o & o \\ \hline 1 & o & 1 \end{array}$			$\begin{array}{c cc} & q & \\ \hline p & o & 1 \\ \hline o & o & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$		
o	1			o			1
1	o			1			1

As duas últimas são tabelas de duas entradas, semelhantes à tábua pitagórica da multiplicação: por elas se vê imediatamente que o valor da conjunção é 1, quando ambos os dados têm o valor 1 (e só nesse caso); e que o valor da disjunção é 1, quando *um pelo menos* dos dados tem o valor 1 (e só nesse caso).

Estas tabelas induzem-nos a considerar a negação, a conjunção e a disjunção, não propriamente como operações sobre proposições, mas sim como operações sobre valores lógicos. Assim, o resultado da negação sobre os valores lógicos 0 e 1 será, respectivamente, 1 e 0, ou seja, em símbolos:

$$\sim 0 = 1 \quad , \quad \sim 1 = 0 .$$

Anàlogamente, ter-se-á:

$$1 \wedge 1 = 1 \quad , \quad 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \quad , \quad 0 \wedge 0 = 0$$

$$1 \vee 1 = 1 \quad , \quad 0 \vee 1 = 0 \vee 1 = 1 \quad , \quad 0 \vee 0 = 0$$

Poderemos ainda escrever, para a disjunção exclusiva:

$$1 \dot{\vee} 1 = 0 \quad , \quad 0 \dot{\vee} 1 = 1 \dot{\vee} 0 = 1 \quad , \quad 0 \dot{\vee} 0 = 0$$

Trata-se agora, muito simplesmente, de operações definidas num conjunto formado apenas por *dois* elementos (o valor 0 e o valor 1), conjunto que podemos designar abreviadamente pela notação $\{0, 1\}$.

Tais operações são definidas pelas anteriores tabelas, *tabuadas* dessas operações.

Este novo ponto de vista simplifica consideravelmente o estudo da lógica, como teremos ocasião de verificar.

§ 7. PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DAS OPERAÇÕES LÓGICAS ⁽¹⁾

As operações lógicas de disjunção, conjunção e negação definem uma estrutura algébrica no conjunto $\{0, 1\}$ (conjunto formado pelos dois valores lógicos 0 e 1). Interessa agora estudar essa estrutura algébrica, isto é, as *propriedades formais* das referidas operações. Para esse efeito, e a fim de facilitar a comparação com as propriedades das operações elementares sobre números, convém mudar as notações atrás adoptadas. Assim, usaremos o sinal '+' para a disjunção (também chamada *adição lógica*) e um ponto ou um simples espaço em branco para a conjunção (também chamada *multiplicação lógica*). Para a negação (também chamada *complementação*), conti-

(¹) — Embora o assunto deste parágrafo seja muito importante, a sua leitura, bem como a dos três parágrafos seguintes, não é indispensável para a compreensão do que se segue. O leitor poderá pois, se quiser, passar agora ao § 10, e tornar a este ponto quando mais lhe aprouver.

nuaremos a usar o sinal ' \sim '. Portanto, sendo a e b dois valores lógicos, escreveremos, segundo estas convenções,

$a + b$ e $a . b$ (ou ab) ;

em vez de

$a \vee b$ e $a \wedge b$

para indicar respectivamente, a disjunção (ou *soma lógica*) e a conjunção (ou *produto lógico*) dos valores dados. A negação do valor a , também chamada *complemento* ou *contrário* de a , continuará a ser designada por ' $\sim a$ ' (ler '*não a*' ou '*complemento de a*') ⁽¹⁾.

Mas convém observar que estas notações, convenientes para o fim indicado, e adoptadas por muitos autores, nomeadamente em cálculo das probabilidades, prestam-se todavia a confusão, quando usadas conjuntamente com os sinais de operações usuais entre números.

A disjunção e a conjunção são, como vimos, operações *sempre possíveis* e *uniformes*, isto é, conduzem sempre a um valor lógico, e um só, quando aplicadas a qualquer par de valores lógicos. Além disso, possuem as propriedades que vamos indicar, designando por a , b e c valores lógicos quaisquer:

A — Propriedades da adição lógica

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1) É uma operação <i>comutativa</i> , isto é: | $a + b = b + a$ |
| 2) É uma operação <i>associativa</i> : | $(a + b) + c = a + (b + c)$ |
| 3) Tem um <i>elemento neutro</i> (que é 0): | $a + 0 = a$ |
| 4) Tem um <i>elemento absorvente</i> (que é 1): | $a + 1 = 1$ |

B — Propriedades da multiplicação lógica

- | | |
|--|-----------------------------|
| 1') É uma operação <i>comutativa</i> : | $a . b = b . a$ |
| 2') É uma operação <i>associativa</i> : | $(a . b) . c = a . (b . c)$ |
| 3') Tem um <i>elemento neutro</i> (que é 1): | $a . 1 = a$ |
| 4') Tem um <i>elemento absorvente</i> (que é 0): | $a . 0 = 0$ |

C — Propriedades mixtas

- 5) A multiplicação é *distributiva a respeito da adição*:

$$a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$$

(1) — É de notar que, enquanto os termos '*conjunção*', '*disjunção*' e '*negação*' designam indiferentemente operações e resultados dessas operações, os resultados da *adição lógica*, da *multiplicação lógica* e da *complementação* são designados por nomes diferentes: *soma lógica*, *produto lógico* e *complemento* (ou *contrário*).

5') A adição é *distributiva a respeito da multiplicação*:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

É claro que a demonstração das propriedades enunciadas se pode reduzir a simples verificação, utilizando as tabuadas destas duas operações (§ 6) e agrupando os dados de todos os modos possíveis, visto que, tomando estes apenas os valores 0 e 1, *tais agrupamentos serão sempre em número finito*.

Exemplificando com a propriedade 5), teremos:

$$0 \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 = 0 \quad , \quad 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

$$1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 = 1 \quad , \quad 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 1$$

$$0 \cdot (1 + 1) = 0 \cdot 1 = 0 \quad , \quad 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 + 0 = 0$$

e assim por diante. Neste caso, trata-se de formar os arranjos com repetição dos elementos 0 e 1 *três a três* (haverá portanto $2^3 = 8$ arranjos); porém, supondo já demonstrada a comutatividade, o número de casos a examinar reduz-se a 6.

O que desde logo chama atenção, na anterior lista de propriedades, é a perfeita identidade entre as propriedades formais das duas operações: *passa-se dumas para as outras apenas mudando o sinal '+' em '.' e trocando '0' por '1'*. Nisto consiste o *princípio da dualidade lógica*. Tal circunstância não se verifica com a adição e a multiplicação usuais, sobre números: *em particular, não se verificam aí as propriedades 4) e 5') que vemos surgir agora no campo da lógica matemática*.

Recordemos entretanto que, no campo dos números reais, a adição é *reversível*, isto é: dados dois números a e b quaisquer, existe sempre um (e um só) número x tal que $a + x = b$. *Ora a adição lógica não é reversível*. Para o reconhecer, basta observar que nenhum dos valores lógicos 0 e 1 verifica a equação

$$1 + x = 0$$

Todavia, a adição lógica e a multiplicação lógica possuem a seguinte propriedade muito notável, que não encontramos nas operações usuais com números:

6) *Para todo o elemento a existe um (e um só) elemento x tal que $a + x = 1$ e $ax = 0$.*

Este elemento x não é mais do que o *complemento* ou *contrário* de a , que convencionámos representar por $\sim a$. Temos com efeito, quer seja $a = 0$ quer seja $a = 1$:

$$a \cdot \sim a = 0 \quad , \quad a + \sim a = 1$$

Supondo que no lugar de a figuram proposições, estas duas fórmulas exprimem respectivamente, sob forma simbólica, os dois conhecidos princípios da lógica formal de ARISTÓTELES (lógica bivalente):

PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO. *Uma proposição não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.*

PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO. *Uma proposição ou é verdadeira ou falsa (isto é: não existe um terceiro valor lógico).*

Daquelas mesmas fórmulas resulta imediatamente a lei da dupla negação: $\sim\sim a = a$.

Finalmente, de 6) e das propriedades anteriores resultam as duas primeiras leis de DE MORGAN

$$\sim (a \cdot b) = \sim a + \sim b \quad , \quad \sim (a + b) = \sim a \cdot \sim b$$

Supondo que nos lugares de a e b figuram proposições, estas duas fórmulas exprimem os seguintes factos:

- I. *Negar que as proposições a e b são ambas verdadeiras equivale a afirmar que uma pelo menos é falsa.*
- II. *Negar a proposição ‘uma, pelo menos, das proposições a , b é verdadeira’ equivale a afirmar que a e b são ambas falsas.*

Por exemplo negar a proposição ‘A Lua é uma estrela \wedge a Terra é um planeta’, equivale a afirmar ‘A Lua não é uma estrela \vee a Terra não é um planeta’. Anàlogamente, negar ‘Carlos é médico \vee Carlos é professor’ equivale a afirmar ‘Carlos não é médico \wedge Carlos não é professor’.

Na sua forma algébrica, operatória, as primeiras leis de DE MORGAN exprimem o seguinte facto essencial, que está na base do já referido PRINCÍPIO DA DUALIDADE LÓGICA:

A negação transforma a adição lógica em multiplicação lógica e vice-versa.

Assim, poderíamos definir ‘soma lógica’ a partir de ‘produto lógico’ ou vice-versa:

$$a + b = \sim (\sim a \cdot \sim b) \quad , \quad a \cdot b = \sim (\sim a + \sim b)$$

É de notar que os sinais ‘ \wedge ’ e ‘ \vee ’ para a conjunção e a disjunção têm a vantagem de chamar a atenção para a dualidade lógica.

Antes de prosseguir o estudo da lógica simbólica, convém recordar certa terminologia da matemática moderna.

Diz-se que, num conjunto de elementos quaisquer, é definida uma *operação binária*, quando é dado um processo pelo qual, a cada *par ordenado* (a, b) de elementos desse conjunto (*dados*), corresponde em geral um elemento c do mesmo conjunto, que se chama o *resultado* da operação aplicada aos elementos dados. Se indicarmos com o símbolo O a operação considerada, o resultado desta aplicada ao par (a, b) de elementos pode ser designado pela expressão $a O b$.

Por exemplo, a adição e a multiplicação são operações binárias definidas em vários conjuntos de números, pois que, a cada par de números a, b , a primeira faz corresponder um determinado número: a soma $a + b$, e a segunda outro número: o produto $a \cdot b$. São ainda operações binárias a subtração e a divisão. Análogamente, a conjunção e a disjunção são operações binárias definidas no conjunto $\{0, 1\}$; mas já a negação é uma operação *unária* definida no mesmo conjunto, pois faz corresponder, a cada elemento dado (*um só* de cada vez), um outro elemento do conjunto.

Diz-se que um conjunto C é um *semi-grupo*, relativamente a uma operação binária definida em C , quando esta operação possui as três seguintes propriedades: *é sempre possível, uniforme e associativa* ⁽²⁾. Se além disso a operação é comutativa, o semi-grupo diz-se *comutativo*.

Nos casos mais frequentes, a operação de um semi-grupo chama-se uma vez *adição* (sinal $+$), outras vezes *multiplicação* (sinal \times ou \cdot ou espaço em branco). Por exemplo, o conjunto dos números naturais $\{1, 2, 3, \dots\}$ é um semi-grupo comutativo, quer a respeito da adição, quer a respeito da multiplicação, visto que estas operações binárias são ali sempre possíveis, uniformes, associativas e comutativas; o mesmo se pode dizer para a conjunção e a disjunção no conjunto $\{0, 1\}$ dos valores lógicos. Porém o conjunto dos números naturais não é um semi-grupo a respeito da subtração, visto que esta operação não é associativa (nem sequer é sempre possível naquele conjunto).

Diz-se que uma operação binária O , definida num conjunto C , é *reversível*, quando, dados dois elementos a, b quaisquer desse conjunto, existe sempre um (e um só), elemento x de C tal que

$$a O x = b$$

e ainda um elemento y (e um só) de C tal que

$$y O a = b$$

⁽¹⁾ — Como já se disse atrás, a leitura deste parágrafo, bem como a dos dois seguintes, não é indispensável para a compreensão do que se segue.

⁽²⁾ — Supõe-se que o conjunto C tem pelo menos um elemento.

É claro que, se a operação é comutativa, tem-se $x = y$. Se além disso esta operação se chama adição ($O = +$), o elemento x diz-se a *diferença entre* b e a e escreve-se $x = b - a$; se a operação se chama multiplicação ($O = \cdot$), o elemento x diz-se *quociente de* b *por* a e escreve-se $x = b/a$.

Pois bem, dá-se o nome de *grupo* a todo o semi-grupo cuja operação é reversível.

Por exemplo, o conjunto dos números naturais não é um grupo, nem a respeito da adição, nem a respeito da multiplicação; o conjunto dos números inteiros relativos é um grupo a respeito da adição, mas não a respeito da multiplicação; o conjunto dos números racionais positivos é um grupo a respeito da multiplicação, mas não a respeito da adição; o conjunto dos números racionais (relativos) é um grupo a respeito de adição, mas não a respeito da multiplicação (a não ser que se exclua o zero), etc. etc.

Dada uma operação binária O qualquer definida num conjunto C (semi-grupo ou não), diz-se que um elemento u de C é elemento *neutro* da operação O , quando se tem:

$$u O a = a O u = a, \text{ qualquer que seja o elemento } a \text{ de } C.$$

Demonstra-se que, num semi-grupo, não pode existir mais de um elemento neutro. O elemento neutro da adição, quando existe, chama-se *zero* ou *elemento nulo* e representa-se geralmente por o . O elemento neutro da multiplicação, quando existe, chama-se *elemento unidade* e representa-se muitas vezes (mas não sempre) por 1 .

Dada uma operação binária O definida num conjunto C , com elemento neutro u , diz-se que um elemento a de C é *regular* ou *invertível*, quando existe um (e um só) elemento a' de C tal que

$$a O a' = a' O a = u;$$

esse elemento diz-se então o *associado* de a . Se a operação tem o nome de 'adição' o associado de a (quando exista) chama-se o *simétrico* de a e representa-se por $-a$. Se a operação se chama 'multiplicação', o associado de a diz-se *inverso* de a e representa-se por $1/a$ ou por a^{-1} . Demonstra-se em álgebra abstracta o seguinte facto:

Para que a operação O de um semi-grupo G seja reversível (e G seja portanto um grupo) é necessário e suficiente que exista em G um elemento neutro de O e que todo o elemento de G seja invertível em G (a respeito da operação O).

Pode acontecer que num conjunto C estejam definidas duas operações binárias, uma chamada 'adição' e a outra 'multiplicação'. Diz-se que C é um *anel* a respeito dessas operações, quando se verificam as três seguintes condições:

- I) O conjunto C é um grupo *comutativo* a respeito da adição.
- II) O conjunto C é um semi-grupo a respeito da multiplicação.
- III) A multiplicação é distributiva a respeito da adição.

Se além disso a multiplicação é comutativa, o anel diz-se *comutativo*.

Dá-se o nome de *corpo* a todo o anel que seja um grupo a respeito da multiplicação, *excluindo o elemento nulo*. Um anel será pois um corpo, quando tiver elemento unidade e todos os seus elementos não nulos forem invertíveis (no anel).

Por exemplo, são aneis comutativos com elemento unidade (mas não corpos) o conjunto dos inteiros relativos, o conjunto dos polinómios em x de coeficientes numéricos, etc. (a respeito da adição e da multiplicação usuais). São corpos comutativos o conjunto dos números racionais, reais ou complexos, o conjunto das fracções racionais em x , etc. O conjunto dos números pares relativos é exemplo de um anel comutativo *sem elemento unidade*.

Um exemplo bastante sugestivo de anel comutativo com 4 elementos é o seguinte:

No conjunto $C = \{0, 1, 2, 3\}$ convencionemos chamar soma $x + y$ de dois números x, y , ao resto da divisão por 4 da soma de x com y no sentido usual; e análogamente para o produto $x \cdot y$. Tere-mos então as seguintes tabuadas de adição e de multiplicação, neste conjunto de quatro elementos:

$x + y$					$x \cdot y$				
$x \backslash y$	0	1	2	3	$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	0	0	0
1	1	2	3	0	1	0	1	2	3
2	2	3	0	1	2	0	2	0	2
3	3	0	1	2	3	0	3	2	1

Estas convenções tornam-se naturais se interpretarmos 0, 1, 2, 3, não como números propriamente, mas como *classes de congruência para o módulo 4*. Note-se que a adição se efectua, como se os números estivessem dispostos em círculo ou *anel*, à maneira das horas num relógio (no caso das horas o módulo é 12).

Fácilmente se reconhece que o conjunto considerado é de facto um anel, relativamente às operações nele definidas. Este anel é mesmo comutativo e possui elemento unidade, mas *não é um corpo*. Com efeito, o elemento 2, embora diferente de 0, não é invertível no anel, isto é, não existe nenhum elemento x deste conjunto tal que $2 \cdot x = 1$.

Mais geralmente, a teoria da divisibilidade permite-nos estabelecer os dois seguintes factos: 1) *qualquer que seja o número natural m , o conjunto das classes de congruência para o módulo m é um anel comutativo com unidade*; 2) *este anel será um corpo, se, e só se, o número m for primo*.

Encontramos *exemplos de anéis e de corpos não comutativos* em conjuntos de operadores ou transformações, de que trataremos oportunamente; em particular, as matrizes quadradas de ordem $n > 1$ (com elementos numéricos) formam um anel não comutativo com unidade.

NOTA — No exemplo anterior (das classes de congruência para o módulo 4) tem-se $2 \cdot 2 = 0$. Quando num anel se tem $a \cdot b = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, diz-se que que a e b são *divisores de zero*. Chama-se *domínio de integridade* todo o anel comutativo que não tem divisores de zero (em que é válido, portanto, o *princípio de anulação do produto* e a *equivalente lei do corte*: se $ac = bc$, com $c \neq 0$, então $a = b$). São domínios de integridade o anel dos inteiros relativos, o anel dos polinômios de coeficientes num dado corpo ou anel, etc. etc.

É fácil ver que *todo o corpo comutativo é um domínio de integridade*. Mais ainda, demonstra-se que, *para que um anel comutativo A se possa ampliar num corpo, é necessário e suficiente que A não tenha divisores de zero*.

A ausência de divisores de zero equivale ainda ao *princípio das identidades dos polinômios*, isto é: *para que, aos polinômios $P(x)$ de coeficientes num anel A, seja aplicável o princípio das identidades, é necessário e suficiente que A seja um domínio de integridade*. Por exemplo, supondo que os coeficientes do polinômio de 2.º grau

$$2x^2 + 2x$$

pertencem ao anel das classes de congruência para o módulo 4, vê-se que o trinômio tem mais de duas raízes (1, 2 e 3), sem ter os coeficientes nulos.

§ 9. NOÇÃO DE ÁLGEBRA DE BOOLE

O conjunto dos valores lógicos 0, 1 não é um corpo, nem mesmo um anel, a respeito da adição lógica e da multiplicação lógica, porque, como vimos, a primeira não é reversível: *não existe o simétrico do elemento 1*. Todavia, o conceito de *complemento* de um elemento a , desempenha aqui um papel semelhante aos de *simétrico* e de *inverso*:

$$a + \sim a = 1 \quad , \quad a \cdot \sim a = 0$$

De um modo geral dá-se o nome de *álgebra de Boole* (em homenagem ao criador da lógica matemática) a todo o conjunto com mais de um elemento, no qual estejam definidas duas operações binárias, a que podemos chamar adição (sinal +) e multiplicação (sinal \cdot), que possuam as propriedades 1) a 6) indicadas no § 7.

O mais simples exemplo de álgebra de Boole é pois o conjunto $\{0, 1\}$ dos valores lógicos; mas veremos exemplos de álgebras de Boole com um número qualquer de elementos, finito ou infinito.

O conceito de álgebra de Boole assemelha-se ao do corpo, embora se trate de estruturas algébricas diferentes. Em particular, num corpo nunca se verifica o *princípio da dualidade*, que é válido em toda a álgebra de Boole.

O estudo das álgebras de Boole tem adquirido uma grande importância, sobretudo ultimamente, em virtude das suas aplicações ao estudo dos circuitos eléctricos e à construção dos cérebros electrónicos.

§ 10. APLICAÇÃO DAS OPERAÇÕES LÓGICAS NAS MODERNAS MÁQUINAS DE CALCULAR ⁽¹⁾

As operações lógicas intervêm essencialmente no funcionamento das modernas calculadoras de tipo aritmético, em especial nas máquinas electrónicas. Para dar uma ideia de como se efectua essa intervenção, convém primeiro recordar o conceito de 'disjunção exclusiva' que introduzimos no § 5; esta operação binária, a que chamaremos agora *adição lógica exclusiva* e que indicaremos com o sinal ' $\dot{+}$ ', pode ser definida no conjunto $\{0, 1\}$ a partir das operações anteriores, por meio da fórmula:

$$x \dot{+} y = x \cdot \sim y + y \cdot \sim x$$

A tabuada da disjunção exclusiva será então:

$$x \dot{+} y$$

$x \backslash y$	0	1
0	0	1
1	1	0

O resultado desta operação será pois 1, quando, um, e *um só*, dos valores dados for 1 (na disjunção usual o resultado é 1, quando um *pelo menos* dos valores dados é 1).

Olhando para a tabuada anterior, imediatamente se reconhece que, interpretando 0 e 1 como representantes das classes de congruência para módulo 2, a disjunção exclusiva coincide com a adição usual sobre estas classes. Como a multiplicação lógica também, neste caso, coincide com a multiplicação usual e o módulo 2 é primo, segue-se que:

O conjunto $\{0, 1\}$ é um corpo a respeito da disjunção exclusiva (como adição) e da conjunção (como multiplicação).

Interessa-nos ainda considerar as duas seguintes *operações ternárias* (isto é com três dados), derivadas das anteriores:

$$\begin{aligned} S &= x \dot{+} y \dot{+} z && (\text{operação de soma}) \\ T &= xy + xz + yz && (\text{operação de transporte}) \end{aligned}$$

⁽¹⁾ — Para desenvolvimento deste assunto pode ler-se, por exemplo, o artigo do Doutor A. CÉSAR DE FREITAS, 'Os princípios fundamentais dos computadores digitais automáticos' a aparecer na «Gazeta de Matemática».

Vejamos agora como as operações lógicas permitem efectuar, por exemplo, adições sobre números escritos na base 2 (as modernas máquinas trabalham directamente com o sistema binário de numeração). Suponhamos que se trata de efectuar a adição dos dois seguintes números (base 2):

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \end{array}$$

Começando pela primeira coluna da direita, a máquina calcula, por um lado, a soma $1 + 1 = 0$, relativa a essa coluna, e, por outro lado, o produto $1 \cdot 1 = 1$, que será *transportado* para a coluna seguinte, a fim de ser somado com as outras parcelas (com efeito $1 + 1 = 10$, no sistema binário). Agora a máquina calculará a soma

$$S = 1 + 1 + 1 = 1,$$

relativa à segunda coluna, e ainda o transporte

$$T = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1,$$

que irá para a coluna seguinte (na verdade $1 + 1 + 1 = 11$, no sistema binário). Na terceira coluna virá

$$S = 1 + 0 + 0 = 1, \quad T = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

e assim sucessivamente.

Para multiplicar os mesmos números, a máquina segue a regra usual de multiplicação, para números escritos no sistema binário, utilizando a tabuada da multiplicação no conjunto $\{0, 1\}$ e somando sucessivamente os produtos parciais deslocados sucessivamente de uma casa para a esquerda.

A título de curiosidade, vamos apresentar os esquemas dos circuitos eléctricos que efectuem as operações lógicas elementares (conjunção, disjunção e negação), em máquinas de tipo simples, com base em electro-ímanes (nas máquinas electrónicas, muito mais rápidas, a ideia é essencialmente a mesma, sendo os electro-ímanes substituídos por válvulas electrónicas).

O *circuito de conjunção* (ou *circuito 'e'*) é esquematizado na fig. 1; o *circuito de disjunção* (ou *circuito 'ou'*), na fig. 2, e o circuito de negação (ou *circuito 'não'*) na fig. 3.

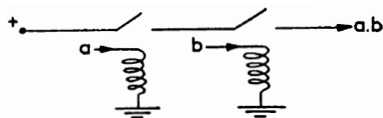


Fig. 1

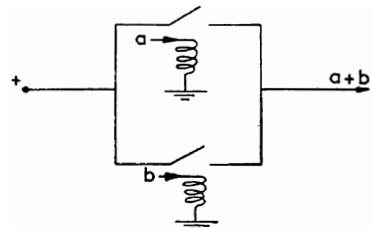


Fig. 2

O valor lógico 1 significa neste caso *passagem de corrente*, enquanto o valor 0 significa *ausência de corrente*.

No primeiro esquema, os interruptores estão postos *em série* e portanto só haverá corrente no circuito quando se lançar corrente nas duas bobines ao *mesmo tempo*, fechando os dois interruptores, que, de outro modo, se mantêm abertos por meio de uma mola. Assim, o resultado será 1, só quando *ambos* os dados, *a* e *b*, forem 1: trata-se pois da conjunção.

No segundo esquema os interruptores estão posto *em paralelo*, e portanto, haverá corrente no circuito quando se lançar corrente *numa pelo menos* das bobines (mas só nesse caso): trata-se pois da disjunção.

Finalmente, no terceiro esquema, o lançamento de corrente na bobine produz interrupção no circuito e existe uma mola que fecha automaticamente o interruptor, quando não há corrente na bobine: trata-se, pois, manifestamente, da negação.

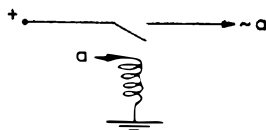


Fig. 3

A partir destes três tipos de circuitos elementares, que podemos indicar respectivamente pelos símbolos

$$= \boxed{e} \text{ — } , \quad = \boxed{\text{ou}} \text{ — } , \quad \text{— } \boxed{n} \text{ — } ,$$

é fácil construir vários circuitos, que efectuem outras operações lógicas, mais ou menos complicadas, visto que todas, em última análise, se podem definir a partir daquelas três, ou mesmo de duas (por exemplo, a disjunção pode-se definir a partir da conjunção e da negação, como vimos no final do § 7).

Ainda a título de exemplo, apresentamos na fig. 4 o esquema de um circuito que pode efectuar a *disjunção exclusiva*, definida segundo a fórmula, $a + b = a \cdot \sim b + b \cdot \sim a$.

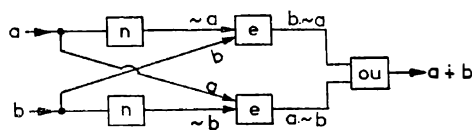


Fig. 4

Ainda se podem imaginar outros circuitos para efectuar esta operação, visto que podemos defini-la de outros modos, a partir das operações fundamentais.

Por exemplo, tem-se, como é fácil ver

$$a \dot{+} b = (a + b) \cdot (\sim a + \sim b) = (a + b) \cdot \sim (ab), \quad \text{etc.}$$

Um dos problemas relativos a álgebras de Boole, que são postos pelas máquinas de calcular, consiste precisamente *em reduzir à expressão mais simples (ou a uma expressão particularmente simples) determinadas funções booleanas, exigidas pelos cálculos.*

§ II. IMPLICAÇÃO MATERIAL E DEDUÇÃO LÓGICA

No conjunto $\{0, 1\}$ definem-se não só *operações*, mas também *relações*. Uma das mais importantes é a implicação material, de que vamos tratar.

Consideremos, por exemplo, a proposição:

‘Se Carlos não telefona, vem à hora marcada’

Trata-se aqui de uma proposição condicional, isto é de uma proposição que relaciona os valores lógicos, ainda não conhecidos, de duas proposições:

a) *‘Carlos não telefona’*, b) *‘Carlos vem à hora marcada’*

de tal modo que, se a primeira for verdadeira (valor 1) a segunda também o será (valor 1), mas se a primeira for falsa (valor 0), a segunda tanto pode ser verdadeira como falsa (valores 0 e 1). Expressa-se este facto dizendo que a proposição a) *implica* a proposição b); para o indicar em lógica simbólica, escrevemos entre a primeira e a segunda o sinal ‘ \rightarrow ’ (ler ‘implica’), tal como se segue:

Carlos não telefona \rightarrow Carlos vem à hora marcada

Exemplos intuitivos como este sugeriram a seguinte

DEFINIÇÃO. Dados dois valores lógicos *a* e *b* diz-se que *a implica b*, quando o número representado por *a* é menor

ou igual ao número representado por b . Escreve-se então $a \rightarrow b$ (ler '*a implica b*'). Assim teremos

$$0 \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow 1,$$

mas não $1 \rightarrow 0$, isto é, 1 não implica 0 , ou ainda: $\sim (1 \rightarrow 0)$.

A seta está pois a substituir simplesmente o sinal ' \leq ', se tratarmos os valores lógicos 0 e 1 como se fossem números. Porque se usa então aqui o sinal ' \rightarrow ' em vez de ' \leq ' e se diz 'implica' em vez 'menor ou igual a'? Trata-se de uma *convenção cómoda de linguagem*, como tantas outras que é habitual introduzir em matemática, e cujas vantagens só com o uso se tornam evidentes.

Na verdade, a palavra 'implica', segundo esta definição, tem um significado que não coincide com o usual, embora tenha sido sugerido por exemplos, como o anterior, em que o conceito de implicação se apresenta na sua forma corrente.

Para salientar que se trata de dois conceitos distintos, embora associados entre si, costuma ainda dar-se à relação agora definida entre valores lógicos o nome de *implicação material*; então o sinal ' \rightarrow ' lê-se 'implica materialmente', em vez de 'implica', simplesmente.

Nesta ordem de ideias, se p e q são duas proposições, a fórmula ' $p \rightarrow q$ ' significa *unicamente* que o valor lógico da primeira proposição (chamada *antecedente*) é inferior ou igual ao valor lógico da segunda (chamada *consequente*). Convenciona então dizer-se que p implica (materialmente) q ; mas isto não quer dizer necessariamente, que p implica q no *sentido usual*, isto é, que q se deduz de p , depende de p ou é uma *consequência lógica* de p . Basta reparar nos dois seguintes exemplos, cujo aspecto bizarro tem por único objectivo fazer realçar a diferença entre os dois conceitos:

1.º EXEMPLO. Considerem-se as duas seguintes proposições:

'A Lua é um queijo flamengo' , '2+2=4'

A primeira é falsa (valor 0), a segunda verdadeira (valor 1); logo a primeira implica materialmente a segunda, visto que $0 < 1$. Mas, evidentemente, a segunda não é uma consequência lógica da primeira.

2.º EXEMPLO. Sejam as proposições:

'O número 9 é primo' , 'Há seres vivos em Marte'.

Ninguém com juízo irá concluir do facto de 9 ser primo (o que nem sequer é verdade) que existem seres vivos em Marte. Contudo, podemos desde já afirmar que a primeira proposição implica a segunda

querendo com isto dizer unicamente que o valor da primeira (o) é inferior ou igual ao da segunda (o ou 1).

Outros exemplos ainda: São verdadeiras as implicações materiais

$$2+3=5 \rightarrow 5 \text{ é primo}, \quad \sqrt{10}=5 \rightarrow \sqrt{8}=4, \text{ etc.}$$

mas é falsa a implicação '5 é primo \rightarrow 5 divide 12'.

Até aqui estes exemplos não têm, como dissemos, outro objectivo que não seja o de esclarecer as convenções introduzidas. *Na verdade, o conceito de implicação material só tem interesse quando começa a aproximar-se do conceito usual, intuitivo, de implicação, tal como se apresenta no exemplo inicial deste parágrafo.* Vejamos outros exemplos em que isto aconteça.

1.º EXEMPLO. Sejam as proposições:

'Existem plantas em Marte' , 'Existem seres vivos em Marte'

Embora ignoremos o valor lógico de qualquer destas proposições, já sabemos que a primeira implica materialmente a segunda, isto é, que, se o valor da primeira for 1 o da segunda será também 1 e que, se o daquela for 0, o desta será 0 ou 1 (admitindo que os conceitos de 'planta' e de 'ser vivo' estão bem definidos). Ora neste caso também diremos, no sentido usual, que a primeira proposição implica a segunda.

2.º EXEMPLO. É bem fácil determinar o valor lógico de cada uma das proposições:

' 2^3+4^3 é múltiplo de 6' , ' 2^3+4^3 é múltiplo de 3'

Porém, mesmo antes de o conhecer, já podemos dizer que a primeira implica materialmente a segunda, visto que esta é, em virtude de um conhecido teorema, consequência lógica daquela.

Como se vê por estes exemplos, é nos casos em que se ignora previamente o valor lógico das duas proposições entre as quais se estabelece a implicação material, que esta começa a concordar com a noção, mais ou menos intuitiva, que temos de implicação.

É portanto nesses casos que começa de facto a ter interesse a implicação material⁽¹⁾. Então o sinal ' \rightarrow ' que se lê geralmente 'im-

(1)— Mas note-se que é muito difícil, se não impossível, definir com rigor a noção usual, intuitiva, de implicação, ao passo que é facilímo, como vimos, definir a implicação material. *Daí a vantagem e a comodidade deste último conceito no estudo da lógica.*

plica' substitui com propriedade a palavra 'se' (conjunção condicional) anteposta à proposição antecedente ⁽¹⁾. Assim a implicação:

$$2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de } 6 \rightarrow 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de } 3$$

poderá ler-se:

$$\text{Se } 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de } 6, \quad 2^3 + 4^3 \text{ é múltiplo de } 3$$

Aliás, se efectuarmos os cálculos, reconhecemos que a primeira proposição é afinal verdadeira: *conclui-se então, sem mais, que a segunda também o é.*

De um modo geral, quando, dadas duas proposições, A e B, se consegue averiguar, por um lado, que $A \rightarrow B$ e, por outro lado, que A é verdadeira, conclui-se logicamente que B também é verdadeira. Nisto mesmo consiste a *dedução lógica* ou *raciocínio dedutivo* (*silogismo*), numa das suas formas mais correntes em matemática. O esquema do raciocínio é o seguinte:

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B & (\text{premissa maior}) \\ A & (\text{premissa menor}) \\ \hline \therefore B & (\text{conclusão}) \end{array}$$

Aqui o sinal \therefore lê-se 'logo' e indica que a proposição B se *deduz logicamente* de A, segundo a implicação $A \rightarrow B$. Recordemos que, na lógica tradicional, este tipo de raciocínio é denominado *silogismo condicional*, *regra de dedução* ou *modus ponens*. Exemplo:

'Se este livro tem uma folha rasgada, pertence-me. Este livro tem uma folha rasgada. Logo pertence-me'.

Mas note-se que são errados raciocínios do seguinte tipo (*paralogismos*):

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

Exemplo: 'Se este livro tem uma folha rasgada, pertence-me. Ora este livro pertence-me. Logo tem uma folha rasgada'.

Casos curiosos de paralogismo são aqueles que nos levam a não confiar excessivamente na prova dos nove (bem como em qualquer outra prova baseada na teoria de divisibilidade). Com o efeito, o facto

⁽¹⁾ — Na linguagem comum, usam-se ainda, com sentido análogo, as expressões 'desde que', 'contando que', 'uma vez que', 'quando', 'todas as vezes que', etc. A proposição antecedente (em gramática, *oração subordinada condicional*) pode também vir depois da proposição consequente (*oração principal*). Exemplo: 'É sempre possível dividir a por b, desde que seja $b \neq 0$ '.

de a conta estar certa implica prova dos nove exacta, mas a prova dos nove pode ser exacta sem que a conta esteja certa...

Note-se que o anterior tipo de silogismo corresponde a uma dupla implicação:

$$(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$$

Uma propriedade fundamental da implicação é a *transitividade* (já verificada para a relação \leq), que se pode enunciar do seguinte modo:

Se a implica b e b implica c, também a implica c (sendo a, b, c valores lógicos quaisquer); isto é, em símbolos:

$$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$$

Daqui resultam silogismos de novo tipo. Exemplo:

‘Se ele não telefona, chega à hora marcada. Se chega à hora marcada, vem de automóvel. Logo, se ele não telefona, vem de automóvel’.

§ 12 A IMPLICAÇÃO COMO OPERAÇÃO LÓGICA. SILOGISMOS DISJUNTIVOS E SILOGISMOS CONJUNTIVOS

A implicação material pode interpretar-se não só como relação, mas ainda como *operação binária*, definida no conjunto $\{0, 1\}$ dos valores lógicos. Por exemplo, a afirmação $1 \rightarrow 1$ é verdadeira (tem o valor lógico 1); podemos portanto escrever:

$$(1 \rightarrow 1) = 1.$$

Anàlogamente se tem

$$(0 \rightarrow 1) = 1, \quad (0 \rightarrow 0) = 1, \quad (1 \rightarrow 0) = 0$$

Deste modo, a cada par ordenado (x, y) de valores lógicos, corresponde um determinado valor lógico que se representa por $x \rightarrow y$. Fica assim definida, portanto, no conjunto $\{0, 1\}$, uma nova operação binária, cuja tabuada é:

$$x \rightarrow y$$

$x \backslash y$	0	1
0	1	1
1	0	1

Como se vê, a *implicação não é comutativa*. Note-se que esta operação lógica se pode reduzir a operações já anteriormente definidas. Tem-se com efeito, como é fácil verificar:

$$(A \rightarrow B) = B \vee \sim A$$

Se, no lugar de A e de B figuram proposições, esta fórmula exprime o seguinte facto:

‘Dizer que A implica B equivale a dizer que ou B é verdadeira ou A é falsa (podendo dar-se ambos os casos)’.

O mesmo se pode ainda exprimir do seguinte modo:

‘Dizer que A implica B equivale a dizer que, se B é falsa, então A é falsa’,

ou seja, em símbolos:

$$(A \rightarrow B) = (\sim B \rightarrow \sim A)$$

Nisto se baseia o silogismo denominado *regra de contraposição* ou *modus tollens*:

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B & (\text{premissa maior}) \\ \sim B & (\text{premissa menor}) \\ \hline \therefore \sim A & (\text{conclusão}) \end{array}$$

Exemplo: ‘Se Marte é uma estrela, emite luz. Ora Marte não emite luz. Logo não é uma estrela’.

Mas observe-se o paralogismo:

‘Se Marte é uma estrela, emite luz. Ora Marte não é uma estrela. Logo não emite luz’.

Além da implicação, também a disjunção e a conjunção dão lugar a silogismos, *qualificados* respectivamente de *disjuntivos* e *conjuntivos*, e que podem ser dos seguintes tipos:

$$\begin{array}{llll} \begin{array}{l} A \vee B \\ \sim A \\ \hline \therefore B \end{array} & \begin{array}{l} \sim (A \wedge B) \\ A \\ \hline \therefore \sim B \end{array} & \begin{array}{l} A \\ B \\ \hline \therefore A \wedge B \end{array} & \begin{array}{l} A \\ \sim B \\ \hline \therefore \sim (A \wedge B) \end{array}, \text{ etc.} \end{array}$$

Exemplos:

‘Ele é médico ou professor. Ora ele não é médico. Logo é professor’.

‘Ele não é médico e professor ao mesmo tempo. Ora ele é médico. Logo não é professor’.

Já no § 4 falámos de equivalência entre proposições. Convém agora tratar do assunto mais em pormenor.

Dados dois valores lógicos a e b , suponhamos que se tem ao mesmo tempo

$$a \rightarrow b \text{ e } b \rightarrow a \quad (\text{isto é, } a \leq b \text{ e } b \leq a)$$

Então será evidentemente $a=b$. Aqui o sinal '=' exprime a relação lógica de *identidade* entre os valores a e b ; mas podemos ainda chamar-lhe *equivalência (material)*, como fizemos para as proposições, e usar o sinal ' \leftrightarrow ', em vez de '='.

Assim recaímos no conceito da equivalência já definido no § 4 para proposições. Tal como sucedia com a implicação, o conceito de equivalência material concorda com a noção usual, intuitiva, de equivalência, quando se ignora o valor lógico das proposições que sabemos serem equivalentes. Neste caso, o sinal ' \leftrightarrow ' substitui a locução '*se e só se*', que certos autores americanos costumam escrever '*iff*' (*if and only if*). Por exemplo, a proposição:

‘Ele virá, se e só se telegrafar’

exprime equivalência entre duas proposições, das quais se ignora ainda o valor lógico. Dizem-se *bicondicionais* as proposições de equivalência, como a anterior.

Ainda como sucedia com a implicação, a equivalência pode também interpretar-se como operação binária definida no conjunto $\{0, 1\}$. Tem-se como efeito:

$$\begin{aligned} (0 \leftrightarrow 0) &= 1 & , & & (1 \leftrightarrow 1) &= 1 \\ (0 \leftrightarrow 1) &= 0 & , & & (1 \leftrightarrow 0) &= 0 \end{aligned}$$

donde a tabuada

$$x \leftrightarrow y$$

$x \backslash y$	0	1
0	1	0
1	0	1

que evidencia a *comutatividade da equivalência*: $(a \leftrightarrow b) = (b \leftrightarrow a)$.

Esta operação reduz-se às anteriores, de acordo com qualquer das fórmulas seguintes:

$$\begin{aligned} (a \leftrightarrow b) &= (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) \\ (a \leftrightarrow b) &= (a \wedge b) \vee (\sim a \wedge \sim b) \end{aligned}$$

Tratando-se de proposições, a última fórmula traduz-se do seguinte modo:

Dizer que as proposições a e b são equivalentes equivale a dizer que são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Esta é, aliás, a definição de equivalência que demos inicialmente. Registe-se ainda a fórmula

$$(a \leftrightarrow b) = (\sim a \leftrightarrow \sim b),$$

que também podemos escrever

$$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (\sim a \leftrightarrow \sim b)$$

isto é: *a equivalência de duas proposições equivale à equivalência das suas negações.*

Assim, a equivalência $a \leftrightarrow b$ fornece quatro formas correctas de silogismos: podemos deduzir b de a , a de b , $\sim b$ de $\sim a$ ou $\sim a$ de $\sim b$. Exemplos:

‘Este triângulo tem dois ângulos iguais, se, e só se, tem dois lados iguais. Este triângulo tem dois ângulos iguais. Logo tem dois lados iguais’.

‘Este triângulo tem dois ângulos iguais, se, e só se, tem dois lados iguais. Este triângulo não tem dois ângulos iguais. Logo não tem dois lados iguais’.

NOTA. Já estudámos cinco operações binárias definidas no conjunto $\{0, 1\}$. É fácil ver que, neste conjunto, se podem definir ao todo $2^4 = 16$ operações binárias distintas: trata-se de um simples problema de arranjos com repetição. Confrontando a tabuada da equivalência com a da disjunção exclusiva (§ 10), vê-se que uma é a negação da outra, isto é, tem-se sempre:

$$(a \leftrightarrow b) = \sim (a \vee b).$$

OBSERVAÇÕES SOBRE AS NOTAÇÕES. Infelizmente ainda se está longe da uniformidade de notações, em lógica matemática. Muitos autores, antigos e modernos, usam para a implicação o sinal ‘ \supset ’; mas este, além de sugerir a relação inversa de ‘ \leq ’, tem ainda o inconveniente de estar em desacordo com o sinal ‘ \subset ’, (*‘contido em’*), usado para a relação de inclusão entre os conjuntos, que descende, por assim dizer directamente, da relação de implicação material.

Mas também o sinal ‘ \rightarrow ’, que temos adoptado para a implicação material, apresenta os seus inconvenientes. Na verdade, o mesmo sinal é usado, correntemente, para exprimir *convergência*, na teoria dos limites, e *correspondência*, na teoria geral das funções. Estes inconvenientes levaram certos autores (como por exemplo o grupo BOURBAKI), a substituir a seta simples ‘ \rightarrow ’ pelo sinal ‘ \implies ’ (ou por outras modificações do primeiro sinal), para exprimir implicação.

Porém, estas notações, além de menos simples, têm o inconveniente de não se encontrarem com facilidade em todas as tipografias. *Por isso adoptámos provisòriamente a seta simples como sinal de implicação, aconselhando porém a sua substituição em todos os casos em que possa dar origem a equívoco.*

Como símbolo de equivalência, muitos autores usam ainda o sinal ' \equiv ', outros o sinal ' \sim ' (que adoptámos aqui para a negação), etc. etc.

§ 14. INTRODUÇÃO DAS VARIÁVEIS

Foi o simbolismo algébrico que, com o uso de letras no papel de incógnitas e de variáveis, forneceu à matemática um dos seus mais potentes recursos de expressão exacta, tornando possível o desenvolvimento prodigioso da análise matemática e da física a partir do século XVII. Não é portanto de estranhar que a primeira tentativa séria de criação da lógica simbólica, devida a LEIBNIZ, apareça justamente nessa época. A ideia de LEIBNIZ era fundar uma espécie de *álgebra universal*, que estendesse ao domínio de todo o pensamento a nova linguagem de símbolos, de maravilhosa precisão e maleabilidade. A ideia não se realizou exactamente como a concebera o seu autor, mas, na verdade, foi o emprego sistemático das variáveis que permitiu à lógica simbólica refundir e superar, essencialmente, a lógica formal de ARISTÓTELES, paralisada durante séculos.

Note-se que já na linguagem corrente se apresentam por vezes variáveis, de maneira mais ou menos disfarçada. Consideremos por exemplo a frase '*Pedro é agrónomo*'. É verdadeira ou falsa esta afirmação? Sem mais esclarecimentos, nada podemos responder. Como há vários indivíduos com o nome 'Pedro', esta palavra não chega a ser uma designação: é, a bem dizer, uma *variável*, cujo *campo de variação* é o conjunto de todos os indivíduos que têm esse nome; e a referida afirmação será verdadeira ou falsa, conforme o indivíduo a que o nome (ou antes, a variável) se aplicar. Se considerarmos agora, por exemplo, a expressão '*Fulano é daltónico*', torna-se ainda mais evidente que o sujeito da oração é *indeterminado*, como se diz em gramática, ou uma *variável*, como diremos em lógica; variável essa que tem agora por campo de variação o conjunto de todos os seres humanos⁽¹⁾. Seria até mais cómodo usar neste caso a expressão '*X é daltónico*', que permite formular factos gerais, como por exemplo o seguinte:

'Se X é daltónico, X não pode conduzir automóvel'.

⁽¹⁾ — Um dos inconvenientes da linguagem comum em lógica é a distinção das palavras em géneros. Neste exemplo, como em muitos outros, supõe-se que não é feita distinção de sexos, embora as palavras estejam no masculino.

Agora a variável já é uma letra, tal como na linguagem simbólica da matemática, e escusado será dizer que, para o efeito, tanto se pode usar a letra X como qualquer outra.

Outro exemplo ainda. Seja a definição matemática:

‘Diz-se que um número inteiro é divisível por outro, quando existe um terceiro que multiplicado pelo segundo dá o primeiro’.

É visível que, neste enunciado, as expressões ‘um número inteiro’, ‘outro’, ‘um terceiro’, ‘o segundo’, ‘o primeiro’ funcionam, de maneira tosca e imprecisa, como variáveis que têm por campo de variação o conjunto dos números inteiros. Veja-se agora como o uso das letras, no papel de variáveis, aumenta consideravelmente a clareza e a precisão da linguagem:

‘Sendo a e b números inteiros, diz-se que a é divisível por b, se (e só se) existe um número inteiro c tal que $a = bc$ ’ ⁽¹⁾.

E o progresso será bem maior ainda, se substituirmos totalmente a linguagem comum pelos símbolos da lógica matemática, como faremos mais adiante.

De um modo geral, em matemática e em lógica simbólica, chamam-se *variáveis* certos símbolos, geralmente letras (ou ainda letras munidas de índices, plicas, asteriscos, barras, etc.), que desempenham o papel de designações, sem serem propriamente designações: cada variável pode ter como valor *qualquer* elemento de um conjunto, denominado o *campo de variação* dessa variável. Por oposição, dá-se o nome de *constantes* às designações propriamente ditas, isto é, aos símbolos ou expressões que têm um único valor (o designado). Por exemplo, na fórmula

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

que exprime o volume (V) de um cone de revolução como função do raio (r) da base e da altura (h) do cone, as letras V, h, r são variáveis, que têm por campo de variação o conjunto dos números reais positivos, enquanto os símbolos π , $\frac{1}{3}$ e 2 são constantes.

As variáveis assemelham-se, de certo modo, a espaços em branco de um impresso a preencher, mas com a diferença de que o

(1) — Recordemos que, em vez de ‘a é divisível por b’, também se diz ‘a é múltiplo de b’, ‘b divide (ou é divisor) de a’, etc. sempre com o mesmo significado. Note-se como é vantajoso o uso das variáveis até para indicar estas equivalências de expressões.

seu uso é estritamente regulado pelas duas seguintes normas, relativas à substituição de variáveis por constantes:

I. *Se uma variável figura em mais de um lugar na mesma expressão, só podemos atribuir-lhe de cada vez um mesmo valor, em todos os lugares em que a variável figura na expressão.*

II. *A variáveis diferentes é lícito atribuir um mesmo valor, desde que as variáveis tenham o mesmo campo de variação.*

Aqui, a expressão ‘atribuir um valor a uma variável’ significa concretamente: ‘substituir a variável por uma constante (que tenha esse valor)’.

Por exemplo, na expressão ‘ $x^2 + x \cdot y - y^2$ ’ podemos substituir ‘ x ’ por ‘3’ (nos dois lugares onde figura) e ‘ y ’ por ‘7’ (nos dois lugares onde figura), o que dá a expressão ‘ $3^2 + 3 \cdot 7 - 7^2$ ’; mas também podemos substituir ambas as variáveis por uma mesma constante, etc.

NOTA SOBRE O USO DAS ASPAS. Como já se esclareceu no § 2, as aspas são usadas para designar expressões. Todavia, na prática, para não sobrecarregar as notações, pode-se dispensar o uso das aspas, desde que não haja perigo de confusão. Assim podemos escrever ‘substituir x por 3’ em vez de ‘substituir ‘ x ’ por ‘3’’, depois de explicado o que isso quer dizer. Note-se que ‘ x ’ nada designa, visto ser uma variável, ao passo que ‘3’ designa um ente — um número.

§ 15. TIPOS DE EXPRESSÕES COM VARIÁVEIS

As duas espécies principais de expressões consideradas no § 2 (*designações e proposições*), correspondem, naturalmente, duas espécies de expressões com variáveis:

- 1) *expressões designatórias* — que se transformam em designações, quando as variáveis são substituídas por constantes;
- 2) *expressões proposicionais* — mais vulgarmente chamadas *funções proposicionais* — que se transformam em proposições, ao substituir as variáveis por constantes.

Considere-se por exemplo a expressão ‘triplo de x ’, sendo x uma variável numérica. Visto que x é uma variável e não uma designação, também ‘triplo de x ’ não é uma designação, mas sim uma variável — *variável dependente de x* . Esta porém converte-se numa designação, todas as vezes que substituirmos x por constantes; assim, substituindo x por 5, obtém-se a designação ‘triplo de 5’ equivalente a ‘15’, etc. Portanto, a expressão ‘triplo de x ’ (em símbolos ‘ $3x$ ’) é uma expressão designatória com a variável x . Análogamente, a expressão ‘soma de a com b ’ (em símbolos ‘ $a + b$ ’) é uma expressão

designatória com as variáveis a e b ; 'pai de X ' é uma expressão designatória com X , etc. São ainda expressões designatórias com variáveis as seguintes:

$$3x^2 - y, \quad \log x, \quad e^{ixy}, \quad \operatorname{sen} x, \quad \text{m.d.c.}(m, n), \quad \text{etc, etc.}$$

(aqui os símbolos e , i são constantes, e outro tanto se pode dizer dos símbolos \log , sen , m.d.c., embora os valores destes não sejam números, mas sim *operações* ou *funções*).

Consideremos agora a expressão ' x é menor que y ' (em símbolos ' $x < y$ '), sendo x e y variáveis numéricas reais. Esta expressão converte-se numa proposição, verdadeira ou falsa, todas as vezes que substituímos as variáveis por constantes; assim, substituindo x por 3 e y por 7 obtém-se a proposição verdadeira $3 < 7$, etc. Trata-se pois de uma *expressão proposicional* ou *função proposicional*. São ainda funções proposicionais as seguintes expressões:

$$A \text{ é filho de } B, \quad p \text{ é divisor de } q \quad (\text{em símbolos, } p|q)$$

$$x^2 - 4y^2 \leq 0, \quad x = \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta, \quad \text{etc. etc.}$$

Em matemática, as equações e as inequações fornecem inúmeros exemplos de funções proposicionais. Mas note-se que o conceito de função proposicional é muito mais amplo que o de equação ou inequação; assim, as expressões ' $a|b$ ' (' a divide b ') ' a é primo com b ', ' x é filho de y ', etc. etc. são funções proposicionais, sem serem equações nem inequações.

Como se vê, as expressões proposicionais com variáveis não são afirmações, mas apenas fórmulas convertíveis em proposições. Exprimem geralmente perguntas, problemas ou condições; assim, a fórmula ' $x^2 = 5$ ' traduz o problema 'Qual é o número cujo quadrado é 5?', a fórmula ' $x^2 - 4y^2 \leq 0$ ' traduz uma condição imposta aos valores de x e y , etc. Por isso, às funções proposicionais chamaremos também *condições* ⁽¹⁾. Em matemática é habitual chamar *fórmulas* às funções proposicionais e *expressões* (simplesmente) às expressões designatórias.

DISTINÇÃO ENTRE 'VARIÁVEL' E 'INCÓGNITA'. Historicamente, as variáveis apareceram primeiro sob a forma de *incógnitas*, isto é, como designações de entes desconhecidos (quantidades incógnitas), na resolução de problemas. Segundo este ponto de vista, a letra x na equação

$$3x + 4 = 5x$$

(¹) — BURALI FORTI chamava *proposições condicionais* (por analogia com 'igualdade condicional', sinónimo de 'equação') às funções proposicionais, e *proposições categóricas* às proposições propriamente ditas. Mas estas designações prestam-se a confusões.

não é uma variável, mas sim uma constante, isto é a designação do número que verifica a igualdade (depois se reconhece ser $x=2$). Mas então trata-se apenas de uma designação provisória, pois que, por exemplo, na equação $1-2x=4x+5$ o valor de x já é outro. Por sua vez, na equação $x^2-4x+3=0$, a incógnita não tem um só valor, mas dois: 1 e 3. E assim vamos cair, inevitavelmente, no conceito de variável, que é na verdade o mais apto a interpretar correctamente situações deste género. A atitude que leva a denominar *incógnitas* certas variáveis tem apenas interesse psicológico, numa fase de iniciação.

§ 16. CONCEITO DE UNIVERSO LÓGICO. UNIVERSOS NUMÉRICOS MAIS IMPORTANTES

Já atrás observámos que uma expressão com variáveis é comparável a um impresso com espaços em branco a preencher. Mas, como vimos, toda a variável pressupõe um conjunto, que é o campo de variação dessa variável. Aliás, convém desde já salientar o seguinte:

Uma determinada teoria matemática pressupõe sempre a existência de um conjunto fundamental, constituído por todos os entes que nessa teoria são considerados os *indivíduos*. Tal conjunto é chamado o *universo lógico*, *universo do discurso* ou simplesmente *universo* da teoria considerada; certos autores (por exemplo HILBERT) usam, no mesmo sentido, a expressão ‘domínio de indivíduos’.

O universo lógico varia de teoria para teoria. Assim, na aritmética elementar o universo lógico é o conjunto dos números naturais, 1, 2, 3, ..., conjunto que depois, num estudo mais avançado, é substituído pelo dos números racionais. Na análise clássica o universo lógico é o conjunto dos números reais (*análise real*) ou o dos números complexos (*análise complexa*). Na geometria elementar o universo varia com a axiomática adoptada: assim, na primeira axiomática de HILBERT, os indivíduos são os pontos, as rectas e os planos; mas já nos ‘Grundlagen der Mathematik’ o mesmo autor toma para indivíduos unicamente os pontos, considerando as rectas e os planos como conjuntos de pontos (o que é, sem dúvida, uma orientação mais natural e intuitiva).

Para interpretar uma expressão com variáveis, é essencial saber qual o universo lógico a que está referida. Assim, por exemplo, a fórmula ‘sen $x=7$ ’, que, no universo dos números reais, é uma equação impossível, tem sentido e admite uma infinidade de soluções no universo dos números complexos. Anàlogamente, a expressão ‘ a é múltiplo de b ’, que não tem significado útil no universo dos números reais, já o tem, por exemplo, no universo dos números inteiros ou no dos polinómios com uma ou mais variáveis (de coeficientes num dado corpo ou anel). Por sua vez, a expressão ‘ x tem vér-

tebras' é desprovida de significado num campo numérico, mas tem sentido no universo dos animais ⁽¹⁾).

Qualquer conjunto não vazio pode ser tomado para universo lógico de uma teoria. Por vezes, também é cómodo admitir a existência de mais de um universo na mesma teoria, usando símbolos de tipos diferentes para variáveis em universos distintos. Assim, por exemplo, na geometria elementar poderíamos considerar três universos — o dos pontos, o das rectas e o dos planos — usando, como é hábito, letras latinas maiúsculas para pontos, letras latinas minúsculas para rectas e letras gregas minúsculas para planos.

Convém ainda registar, desde já, as notações geralmente adoptadas na matemática contemporânea, para designar os universos numéricos mais importantes:

- N** — Conjunto dos números inteiros naturais (1, 2,)
- Z** — Conjunto dos inteiros relativos (0, 1, -1, 2, -2)
- Q** — Conjunto dos números racionais (inteiros ou fraccionários)
- Q⁺** — Conjunto dos números racionais positivos
- R** — Conjunto dos números reais (inteiros, fraccionários, irracionais)
- R⁺** — Conjunto dos números reais positivos
- C** — Conjunto dos números complexos (reais ou imaginários)

Convencionaremos ainda designar por **N₀** o conjunto dos *números inteiros absolutos* (0, 1, 2,), que se obtém juntando a **N** o elemento 0; e por **R₀⁺** o conjunto dos *números reais absolutos* (isto é, não negativos), que se obtém juntando a **R⁺** o zero.

§ 17. POSSIBILIDADE E UNIVERSALIDADE. EQUIVALÊNCIA FORMAL

Diz-se que uma função proposicional é *verificada* ou *satisfeita* por um dado valor da variável (ou sistema de valores das variáveis), quando se transforma numa proposição verdadeira ao ser atribuído esse valor à variável (ou esse sistema de valores às variáveis). Também poderemos dizer, por analogia com as equações, que esse valor ou sistema de valores é uma *solução* da função proposicional considerada. Por exemplo, a condição '*x* é a capital de *y*' é verificada quando substituímos '*x*' por 'Lisboa' e '*y*' por 'Portugal'; assim o par ordenado (Lisboa, Portugal) constitui uma solução dessa função proposicional.

Uma condição diz-se *possível*, quando admite pelo menos uma solução; caso contrário, diz-se *impossível*. Assim, por exemplo, a con-

(¹) — Por exemplo, a expressão 'o número 3 tem vértebras' não é verdadeira nem falsa, mas apenas desprovida de significado. Não é portanto, propriamente, uma proposição, mas antes um agrupamento de palavras sem nexos.

dição ' x é um número ímpar divisível por 6' é manifestamente impossível; o mesmo se pode dizer da condição ' x é um filho de y mais velho que y '; por sua vez, a condição $x^2 = -1$ (aliás equação) é impossível no universo \mathbf{R} dos números reais, mas possível no universo \mathbf{C} dos números complexos (cf. § 16); a condição $x + 1 = x$ é impossível em \mathbf{C} , mas possível no universo $\{0, 1\}$ dos valores lógicos (cf. § 7); etc. etc.

Pode ainda acontecer que uma condição seja verificada por todos os possíveis valores da variável (ou sistemas de valores das variáveis); diz-se então *universal* ou *absoluta*. É universal por exemplo a condição ' x é mortal' no universo dos seres humanos; a condição $x^2 \neq -1$ é universal em \mathbf{R} , mas não em \mathbf{C} ; a condição $x + 1 \neq x$ é universal em \mathbf{C} , mas não no universo dos valores lógicos; etc. etc.

Como se vê pelos exemplos anteriores, a aplicação dos atributos 'possível' e 'universal' a funções proposicionais depende do universo lógico adoptado.

Diz-se que duas funções proposicionais são *formalmente equivalentes*, quando se transformam em proposições equivalentes (isto é, ambas verdadeiras ou ambas falsas), todas as vezes que a variável ou as variáveis são substituídas por constantes; de igual modo, em ambas as expressões ⁽¹⁾.

Para indicar que duas condições são formalmente equivalentes, escreveremos entre ambas o sinal ' \leftrightarrow ', que podemos ler '*se e só se*' (veremos que o conceito de equivalência formal corresponde ao conceito usual de equivalência de proposições). Poderíamos também usar, para o mesmo fim, o sinal ' \equiv '. Por exemplo, são formalmente equivalentes as condições ' x é múltiplo de y ' e ' y é divisor de x ', e assim, poderemos escrever:

$$x \text{ é múltiplo de } y \leftrightarrow y \text{ é divisor de } x$$

Analogamente se verifica a equivalência:

$$X \text{ é daltónico} \leftrightarrow X \text{ não distingue cores}$$

(que constitui, precisamente, a definição de 'daltónico').

Outro exemplo ainda:

$$x^2 \geq 4y^2 \leftrightarrow (x - 2y)(x + 4y) \geq 0, \text{ etc. etc.}$$

§ 18. CÁLCULO PROPOSICIONAL COM VARIÁVEIS

As operações lógicas que no § 5 definimos para proposições

⁽¹⁾ — Aqui a expressão 'de igual modo' significa que uma mesma variável só pode tomar, de cada vez, um mesmo valor, em ambas as expressões.

(e no § 6 para valores lógicos) estendem-se automaticamente a funções proposicionais:

1) Por exemplo, se ligarmos as duas condições 'X é médico' e 'X é professor' pelo sinal ' \wedge ' ('e') obtém-se a nova condição (ou função proposicional):

$$X \text{ é médico } \wedge X \text{ é professor},$$

que é verificada por todos os indivíduos que verificam *simultaneamente as duas* condições dadas, e só por esses indivíduos. É natural chamar à condição assim obtida *conjunção* das duas primeiras.

Analogamente, a condição $x > 3 \wedge x < 7$ é a conjunção das condições $x > 3$ e $x < 7$, que se costuma também escrever sob a forma $3 < x < 7$. Aliás é sabido que esta condição equivale formalmente à inequação $x^2 - 10x + 21 < 0$ (no universo \mathbf{R}) e assim poderemos escrever

$$x^2 - 10x + 21 < 0 \leftrightarrow x > 3 \wedge x < 7$$

Um exemplo no universo das figuras geométricas é o seguinte:

$$X \text{ é um losango } \wedge X \text{ é um rectângulo } \leftrightarrow X \text{ é um quadrado}$$

Outros exemplos (em \mathbf{N}):

$$x \mid y \wedge y \mid x \leftrightarrow x = y$$

$$x \mid 24 \wedge x \mid 36 \leftrightarrow x \mid 12 \text{ (o sinal '}' \text{ lê-se 'divide'), etc. etc.}$$

2) Se ligarmos agora as duas condições 'X é médico' e 'X é professor' pelo sinal ' \vee ' ('ou') obtemos a nova condição:

$$X \text{ é médico } \vee X \text{ é professor},$$

que é verificada por todo o indivíduo X que verifique *uma pelo menos* das condições dadas, e só por esses indivíduos. É natural chamar à condição assim obtida *disjunção* das primeiras.

Analogamente, a condição $x < 3 \vee x > 7$ é a disjunção das condições $x < 3$ e $x > 7$, e sabemos que equivale à inequação $x^2 - 10x - 21 > 0$. Podemos pois escrever (em \mathbf{R}):

$$x^2 - 10x - 21 > 0 \leftrightarrow x < 3 \vee x > 7$$

Outros exemplos em \mathbf{R} :

$$x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y,$$

$$x^2 - y^2 = 0 \leftrightarrow y = x \vee y = -x, \text{ etc. etc.}$$

3) Antepondo o sinal ‘ \sim ’ (‘não é verdade que’) à condição ‘X é médico’, obtém-se a condição ‘ \sim X é médico’, que também se pode escrever ‘X não é médico’ e que é natural chamar a *negação* da primeira. Outros exemplos (no universo **R**):

$$\begin{aligned} \sim x < y &\leftrightarrow x \geq y, \\ \sim x = y &\leftrightarrow x \neq y \leftrightarrow x > y \vee x < y, \text{ etc. etc.} \end{aligned}$$

Duas condições dizem-se *compatíveis*, quando a sua conjunção é condição possível; caso contrário serão *incompatíveis*. Duas condições dizem-se *complementares*, quando uma é a negação da outra. É evidente que duas condições serão complementares, se e só se verificam os dois seguintes requisitos: 1) a sua conjunção é condição impossível; 2) a sua disjunção é condição universal. Assim, duas condições complementares são sempre incompatíveis, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, as condições ‘X é casado’ e ‘X é solteiro’ são incompatíveis, mas não complementares, visto que a sua disjunção não é universal: há indivíduos que não são casados nem solteiros. Análogamente, as condições $x < \sqrt{3}$ e $x > \sqrt{3}$ são incompatíveis mas não complementares no universo **R** (mas são complementares no universo **Q** dos números racionais).

Das propriedades das operações lógicas resulta imediatamente que:

- 1) *A conjunção de uma condição impossível com outra qualquer é ainda condição impossível.*
- 2) *A conjunção de uma condição qualquer com uma condição universal é equivalente à primeira.*

Por dualidade, substituindo ‘conjunção’ por ‘disjunção’, ‘impossível’ por ‘universal’ e ‘universal’ por ‘impossível’, deduzem-se daqui duas regras análogas, ainda verdadeiras.

Exemplos no universo **R**:

$$\begin{aligned} x^2 - 1 > 0 \wedge x^2 + 1 = 0 &\leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \text{ (impossível)} \\ x^2 - 1 > 0 \wedge x^2 + 1 > 0 &\leftrightarrow x^2 - 1 > 0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

OBSERVAÇÕES DE ORDEM DIDÁCTICA. Alguns dos exemplos anteriores começam já a mostrar o papel esclarecedor da lógica simbólica, mesmo em assuntos de matemática elementar. Note-se que as noções *essenciais* da lógica simbólica podem ser transmitidas em poucas lições (três ou quatro) a um aluno liceal de 15 a 17 anos, que, em regra, as assimila rapidamente. Entre os assuntos que se prestam particularmente à aplicação da lógica simbólica figuram o estudo das equações e das inequações (como é natural), a geometria analítica e a aritmética racional.

Vejamos alguns exemplos nestes campos, além dos que já foram dados. Seja o sistema de inequações:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ \frac{x}{x-2} > 0 \end{cases}$$

Como é sabido, as soluções do sistema são os valores de x que verificam *simultaneamente* as duas inequações; tal sistema é portanto a *conjunção* ⁽¹⁾

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad \wedge \quad \frac{x}{x-2} > 0,$$

expressa em forma diferente (e outro tanto se pode dizer para todos os sistemas de equações ou inequações). Ora, como é fácil ver, tem-se:

$$x^2 - 2x - 3 < 0 \quad \leftrightarrow \quad -1 < x < 3,$$

e, por outro lado:

$$\frac{x}{x-2} > 0 \quad \leftrightarrow \quad x < 0 \quad \vee \quad x > 2$$

Finalmente, pela distributividade da conjunção a respeito da disjunção, vem

$$-1 < x < 3 \quad \wedge \quad (x < 0 \quad \vee \quad x > 2) \quad \leftrightarrow \quad -1 < x < 0 \quad \vee \quad 2 < x < 3,$$

Esta última expressão indica as soluções do sistema: todos os números compreendidos entre -1 e 0 e todos os compreendidos entre 2 e 3 .

Vejamos agora um exemplo de aritmética racional. Já atrás demos como exemplo a equivalência $x|24 \wedge x|36 \leftrightarrow x|12$. Ora este facto resulta de uma propriedade mais geral, característica do máximo divisor comum (no universo \mathbf{N} , por exemplo):

Um número x é divisor comum de dois números a e b , se e só se divide o máximo divisor comum de a e b .

Em escrita simbólica este enunciado traduz-se do seguinte modo:

$$x | a \quad \wedge \quad x | b \quad \leftrightarrow \quad x | \text{m. d. c. } (a, b)$$

⁽¹⁾ — Em casos como este, para evitar o uso de sinais muito semelhantes entre si, seria talvez preferível usar o sinal ‘&’ em vez de ‘ \wedge ’ para a conjunção.

Seria de grande interesse que o aluno liceal se habituassem a traduzir na linguagem da lógica simbólica proposições matemáticas (axiomas, teoremas e definições), assim como problemas. Aliás é isso já em parte o que se faz ao pôr problemas em equação e ao definir lugares geométricos por equações em geometria analítica. Tratava-se pois de levar mais longe esse processo de formalização, para dar ao aluno a ideia de que toda a teoria dedutiva pode ser formalizada. Em países estrangeiros considera-se como objectivo primacial do ensino da álgebra, nos primeiros três anos, habilitar o aluno a pôr problemas em equação: não conseguido este objectivo, o ensino pode considerar-se falhado. Na verdade, a matemática é essencialmente uma linguagem de tipo especial, que, como qualquer idioma estrangeiro, se adquire, usando-a e fazendo traduções, assim como retroversões.

§ 19. QUANTIFICADORES

Além das operações lógicas atrás consideradas, apresentam-se ainda, no cálculo proposicional com variáveis, duas operações de importância capital, que são exclusivas deste cálculo, isto é, que se aplicam unicamente a expressões proposicionais com variáveis. Estas duas operações desempenham agora um papel correspondente ao das noções de ‘todo’ e de ‘algum’ da lógica tradicional (baseada na linguagem comum), mas com possibilidades muito mais amplas, como veremos.

a) *Quantificador universal.* Já no § 16 falámos de *condições possíveis* e de *condições universais*. Consideremos uma função proposicional com uma só variável (por exemplo x), e suponhamos que essa condição é universal. Para indicar este facto, isto é, para indicar que a condição é verificada por *todo* o indivíduo x do universo lógico adoptado, escreve-se antes da condição o símbolo ‘ \forall_x ’, que se lê ‘*qualquer que seja x* ’ ou ‘*para todo o x* ’. Por exemplo a expressão:

$$\forall_x x \text{ é mortal}$$

lê-se ‘*Qualquer que seja x , x é mortal*’, o que é uma proposição verdadeira no universo dos seres humanos e, mais geralmente ainda, no universo dos seres vivos ⁽¹⁾. Anàlogamente, a expressão

$$\forall_x x^2 - 1 = (x + 1) (x - 1)$$

(1) — A expressão ‘qualquer que seja x ’ também se pode ler no final da proposição, dizendo: ‘ x é mortal, qualquer que seja x ’.

é uma proposição verdadeira, não só nos universos numéricos, mas em qualquer universo que seja um anel comutativo (§ 8). Por sua vez, a expressão $\forall_x x \geq 1$ é uma proposição verdadeira se o universo é \mathbf{N} , mas falsa se o universo é, por exemplo, \mathbf{Z} (cf. § 15).

Deste modo, o símbolo ' \forall_x ' representa uma operação (ou um *operador*) que transforma toda a condição em x numa proposição que pode ser verdadeira ou falsa, consoante o universo fixado: a este operador dá-se o nome de *quantificador universal* (as considerações são obviamente análogas, se, em vez de x , a variável for outro símbolo qualquer).

b) *Quantificador de existência*. Consideremos agora uma condição em x que seja possível. Para indicar este facto, isto é, para indicar que existe pelo menos um indivíduo, no universo considerado, que verifica tal condição, escreve-se antes desta o símbolo ' \exists_x ' que se lê '*existe pelo menos um (elemento) x tal que*'.

Por exemplo, a expressão:

$$\exists_x x \text{ é daltónico}$$

lê-se '*Existe pelo menos um indivíduo x tal que x é daltónico*' (ou '*Existe pelo menos um indivíduo x que é daltónico*') o que é uma proposição verdadeira no universo dos seres humanos. Anàlogamente, a expressão

$$\exists_x x^2 = -1$$

lê-se '*Existe pelo menos um x tal que $x^2 = -1$* ', o que é falso se o universo é \mathbf{R} , mas verdadeiro se o universo é \mathbf{C} , pois aí a equação $x^2 = -1$ é possível, admitindo *duas* soluções (i e $-i$).

O símbolo ' \exists_x ' representa pois um novo operador que transforma funções proposicionais em proposições: esse operador é chamado *quantificador de existência* ou *quantificador existencial*.

Assim, antepondo a uma condição em x um qualquer dos símbolos ' \forall_x ', ' \exists_x ', obtém-se uma proposição, cujo valor lógico não depende de x . Exprime-se este facto dizendo que a variável está *quantificada* ou ainda que é uma variável *ligada*, *aparente* ou *muda* (comparável aos índices mudos dos somatórios ou às variáveis de integração nos integrais); por oposição, dizem-se *livres* as variáveis sobre

as quais não incide nenhum quantificador. *Podem pois apresentar-se — e apresentam-se a cada passo — expressões com variáveis que são proposições e não apenas condições; porém, nesse caso, as variáveis são necessariamente quantificadas.*

Por exemplo, a expressão ‘ x é daltónico’, atrás considerada, não é uma proposição, mas apenas uma função proposicional, isto é, uma condição relativa a x . Mas já as expressões:

$$\forall_x x \text{ é daltónico} \quad , \quad \exists_x x \text{ é daltónico},$$

são proposições, a primeira falsa e a segunda verdadeira, no universo dos seres humanos. Também a expressão

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

não é uma proposição, pois que, na realidade, é apenas uma condição imposta a x (neste caso uma *equação*). Só depois de termos demonstrado que todos os indivíduos a verificam (num universo numérico ou, mais geralmente, num *anel comutativo*) é que podemos afirmar:

$$\forall_x x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

e assim já se tem uma proposição (verdadeira), que pode escrever-se mais simplesmente, segundo convenções usuais:

$$x^2 - 1 =_x (x + 1)(x - 1) \quad \text{ou ainda} \quad x^2 - 1 \equiv (x + 1)(x - 1),$$

em que o sinal ‘ $=$ ’ se lê ‘igual qualquer que seja x ’ e o sinal ‘ \equiv ’ ‘sempre igual a’. Trata-se agora de uma *identidade* (como se diz em matemática), ao passo que antes se tratava apenas de uma *equação*.

Uma equação é pois uma condição (ou função proposicional), enquanto uma identidade é uma proposição.

Análogas considerações se podem fazer a respeito das desigualdades. Por exemplo, sabemos que a condição $x^2 + 3 > 0$ (inequação) é universal em \mathbf{R} . Logo tem-se

$$\forall_x x^2 + 3 > 0 \quad (\text{no universo } \mathbf{R}),$$

o que também se exprime escrevendo $x^2 + 3 >_x 0$ (em que o sinal ‘ $>$ ’ se pode ler ‘é maior que... qualquer que seja x ’ ou ainda ‘é sempre

maior que') e é essa afirmação que se deve chamar *desigualdade incondicional* (ou *absoluta*).

Assim, como se vê por estes exemplos, o quantificador universal é indicado muitas vezes, escrevendo simplesmente a variável sob um sinal de relação.

Outras vezes, o quantificador universal é apenas subentendido. Sucede isto, por exemplo, nas identidades, sobretudo quando se usam letras iniciais do alfabeto, latino ou grego; exemplos:

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1), \quad \text{sen } 2\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cos \alpha, \quad \text{etc.}$$

§ 20. ALGUMAS PROPRIEDADES DOS QUANTIFICADORES

Os quantificadores podem combinar-se com a negação, dando lugar a novos operadores de quantificação. Assim, para indicar que uma condição em x é impossível, basta antepôr-lhe o símbolo composto ' $\sim \exists_x$ ' ('*não existe nenhum x tal que*'); análogamente, o símbolo ' $\sim \forall_x$ ' indicará que a condição não é universal. Assim, por exemplo, no universo dos seres humanos, as expressões simbólicas:

$$\begin{aligned} \forall_x \text{ } x \text{ é mortal} & \quad , & \quad \sim \forall_x \text{ } x \text{ fala inglês,} \\ \exists_x \text{ } x \text{ é daltónico} & \quad , & \quad \sim \exists_x \text{ } x \text{ foi à Lua,} \end{aligned}$$

são proposições que, em linguagem comum, se podem enunciar, respectivamente: 'Todo o homem é mortal', 'Nem todo o homem fala inglês', 'Algum homem é daltónico', 'Nenhum homem foi à Lua' ⁽¹⁾.

É fácil agora reconhecer os seguintes factos:

A negação transforma o quantificador universal em quantificador existencial e vice-versa; isto é, em símbolos:

$$\sim \forall_x = \exists_x \sim \quad , \quad \sim \exists_x = \forall_x \sim$$

Estas duas propriedades são conhecidas por *segundas leis de DE MORGAN*.

(¹) — Aqui 'homem' é tomado em sentido lato, sem distinção de sexo ou idade, isto é, como sinónimo de 'ser humano'. Um dos inconvenientes da linguagem comum em lógica, além da distinção em géneros, está na ambiguidade de certos termos, isto é, na existência de mais de um significado para um mesmo termo.

Por exemplo, num universo constituído por um grupo de pessoas sujeitas a exame médico, são com certeza equivalentes as duas seguintes proposições:

$$\sim \forall_x x \text{ é daltónico} \quad , \quad \exists_x \sim x \text{ é daltónico}$$

que se podem ler, respectivamente: ‘Nem todos os indivíduos são daltónicos’ e ‘Existe pelo menos um que não é daltónico’. Análogamente, ter-se-á:

$$\sim \exists_x x \text{ é daltónico} \quad \leftrightarrow \quad \forall_x \sim x \text{ é daltónico}$$

(‘Não existe nenhum x que seja daltónico’ e ‘Qualquer que seja x , x não é daltónico’). Ambas as proposições se traduzem usualmente dizendo: ‘Nenhum indivíduo é daltónico’.

Outro exemplo. As duas proposições

$$\sim \exists_x x^2 = -1 \quad , \quad \forall_x x^2 \neq -1$$

são equivalentes em qualquer anel com elemento unidade: por exemplo, são ambas verdadeiras em \mathbf{R} e ambas falsas em \mathbf{C} . Análogamente, são equivalentes as proposições

$$\sim \forall_x (x + 1)^2 = x^2 + 1 \quad , \quad \exists_x (x + 1)^2 \neq x^2 + 1$$

que se podem ler, respectivamente: ‘Não é verdade que $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ qualquer que seja x ’ e ‘Existe pelo menos um x tal que $(x + 1)^2 \neq x^2 + 1$ ’. Por exemplo, são ambas verdadeiras nos campos numéricos usuais e ambas falsas no anel das classes 0 e 1 de congruência para o módulo 2.

NOTAS IMPORTANTES. As segundas leis de DE MORGAN traduzem um prolongamento do PRINCÍPIO DA DUALIDADE LÓGICA e revelam uma notável analogia entre os quantificadores e as operações de conjunção e disjunção. Para reconhecer que esta analogia não é apenas accidental, basta notar que, num universo finito, o quantificador universal equivale a conjunções sucessivas e o quantificador existencial a disjunção sucessivas; isto é, designando por x_1, x_2, \dots, x_n os indivíduos ⁽¹⁾ desse universo:

$$\forall_x p(x) = p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \dots \wedge p(x_n) \quad ,$$

$$\exists_x p(x) = p(x_1) \vee p(x_2) \vee \dots \vee p(x_n) \quad ,$$

⁽¹⁾ — É claro que a *conjunção sucessiva* e a *disjunção sucessiva* se podem definir, *mutatis mutandis*, como a adição sucessiva e a multiplicação sucessiva. Assim $a \wedge b \wedge c$ será o mesmo que $(a \wedge b) \wedge c$, etc.

sendo $p(x)$ uma condição qualquer em x . Esta circunstância leva alguns autores a adoptarem os símbolos ' \bigwedge_x ' e ' \bigvee_x ' para indicar, respectivamente, os quantificadores universal e existencial (sobre a variável x). Estas notações têm ainda a vantagem de salientar a dualidade lógica:

$$\sim \bigwedge_x = \bigvee_x \sim \quad , \quad \sim \bigvee_x = \bigwedge_x \sim$$

Usam-se também, para os quantificadores universal e existencial, respectivamente, os símbolos ' Π ' e ' Σ ', quando a conjunção (ou *multiplicação lógica*) e a disjunção (ou *adição lógica*) são indicadas com os sinais ' \cdot ' e '+'.
Convém ainda notar que, muitas vezes, o quantificador universal é indicado com o símbolo ' (x) '.

Até aqui, para comodidade de exposição, temos referido sistematicamente os quantificadores à variável x . Mas é óbvio que às considerações mantêm qualquer que seja o símbolo tomado para variável. Aliás uma das propriedades importantes dos quantificadores é o

PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO DAS VARIÁVEIS APARENTES. *Quando numa proposição figura uma variável quantificada, não se altera o valor da proposição substituindo essa variável por outra qualquer, em todos os lugares em que aparece na proposição, inclusive como índice do quantificador respectivo.*

Por exemplo, se, na proposição

$$\exists_x x^2 + x + 1 = 0 \quad ,$$

substituírmos x por u em todos os lugares, obtemos a proposição equivalente

$$\exists_u u^2 + u + 1 = 0$$

(verdadeiras ambas em **C**, falsas ambas em **R**). É contudo evidente que as condições $x^2 + x + 1 = 0$ e $u^2 + u + 1 = 0$ não são formalmente equivalentes, isto é, não podemos escrever

$$x^2 + x + 1 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad u^2 + u + 1 = 0$$

visto que as variáveis x e u não tomam necessariamente os mesmos valores: são *variáveis independentes entre si*.

Outro exemplo. A identidade $x^2 - 1 \equiv (x + 1)(x - 1)$ pode escrever-se de muitos modos diversos e equivalentes entre si:

$$t^2 - 1 \equiv (t + 1)(t - 1) \quad , \quad \alpha^2 - 1 \equiv (\alpha + 1)(\alpha - 1), \text{ etc.}$$

atendendo a que se trata de uma igualdade precedida do quantificador \forall_x . Análogamente, a identidade trigonométrica $\sin 2x \equiv 2 \sin x \cos x$, poderá escrever-se, sem alteração de significado:

$$\sin 2\alpha \equiv 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad , \quad \sin 2\theta \equiv 2 \sin \theta \cos \theta, \text{ etc.}$$

É fácil ver que os quantificadores podem também ser aplicados a expressões proposicionais com mais de uma variável. Antepondo por exemplo o símbolo ' \exists_x ' à expressão ' x é filho de y ' obtém-se a nova expressão ⁽¹⁾:

$$\exists_x x \text{ é filho de } y$$

Esta, que se pode ler 'Existe pelo menos um indivíduo x que é filho de y ', ainda não é uma proposição, visto que o seu valor lógico, embora não dependa de x (*variável aparente*), depende ainda de y (*variável livre*). É pois uma condição em y , que também se pode exprimir dizendo ' y tem pelo menos um filho', isto é:

$$\exists_x x \text{ é filho de } y \leftrightarrow y \text{ tem pelo menos um filho}$$

Outro exemplo. O valor lógico da expressão:

$$\exists_x a = bx \text{ ('Existe pelo menos um } x \text{ tal que } a = bx')$$

depende de a e de b (mas não de x); trata-se pois de uma condição em a e b que, no caso de o universo ser por exemplo \mathbf{N} , equivale à condição ' b divide a ' (em símbolos ' $b|a$ '). Podemos assim escrever:

$$\exists_x a = bx \leftrightarrow b|a,$$

o que é aliás a definição usual do termo 'divide' (§ 14).

Como se vê por estes exemplos, quando se aplica um quantificador a uma condição com mais de uma variável, obtém-se ainda uma condição na variável ou nas variáveis que ficam livres. É claro que sobre estas se podem efectuar novas quantificações: daqui resultará uma *quantificação múltipla*, que, no caso de atingir todas as variáveis, transforma a condição inicial numa proposição, verdadeira ou falsa. Por exemplo, a expressão ' $\exists_x x^2 = a$ ' é uma condição em a , que no campo real equivale à condição ' $a \geq 0$ ', mas que no campo complexo é universal; é pois verdadeira em \mathbf{C} a proposição:

$$\forall_a \exists_x x^2 = a,$$

que, em linguagem corrente, se lê: 'Qualquer que seja o número a , existe pelo menos um número x , tal que $x^2 = a$ '. Anàlogamente, para indicar que a condição em y :

⁽¹⁾ — Aqui o termo 'filho' é usado em sentido lato, sem distinção de sexo ('filho ou filha').

$\exists_y x$ é filho de y

é universal na classe dos seres humanos, escreve-se:

$\forall_x \exists_y x$ é filho de y

e lê-se, em linguagem comum: 'Para todo o indivíduo x , existe pelo menos um indivíduo y , de quem x é filho'. Deixamos ao cuidado do leitor averiguar se é ou não verdadeira esta proposição ⁽¹⁾.

Note-se que os *quantificadores de tipo diferente não são permutáveis*: não é indiferente, em geral, escrever $\forall_x \exists_y$ ou $\exists_y \forall_x$. Por exemplo, no universo dos números naturais é verdadeira a expressão:

$\forall_x \exists_y y$ é sucessor de x ,

que equivale a dizer: 'Todo o número tem um sucessor' (axioma de PEANO); mas é falsa a proposição

$\exists_y \forall_x y$ é sucessor de x ,

que diz: 'Existe pelo menos um número y tal que, qualquer que seja o número x , y é sucessor de x '.

Pelo contrário, *quantificadores do mesmo tipo são sempre permutáveis*. Até, para simplificar a linguagem, usaremos o símbolo

$\forall_{x,y}$ (ler: '*quaisquer que sejam x e y*'),

em vez de ' $\forall_x \forall_y$ ' ou ' $\forall_y \forall_x$ '. Anàlogamente, usaremos o símbolo

$\exists_{x,y}$ (ler: '*existem pelo menos um x e um y tais que*')

em vez de ' $\exists_x \exists_y$ ' ou ' $\exists_y \exists_x$ '. E assim por diante.

Por exemplo, tem-se nos campos numéricos usuais (e mais geralmente em qualquer *anel comutativo*; ver § 8):

$$\forall_{x,y} (x+y)^2 = x^2 + 2x y + y^2$$

⁽¹⁾ — Aqui 'existe' é tomado em sentido intemporal, incluindo portanto os seres humanos existentes no passado.

o que também se pode escrever sob a forma

$$(x+y)^2 = x^2 + 2 \underset{x,y}{x} y + y^2$$

ou ainda

$$(x+y)^2 \equiv x^2 + 2 \underset{x,y}{x} y + y^2$$

tratando-se neste caso de uma identidade nas duas variáveis x, y (cf. § 19, final). Anàlogamente, tem-se em \mathbf{R} :

$$\exists_{x,y} x^2 + y^2 = 1 \wedge x = y$$

o que é a maneira simbólica de dizer que o sistema de equações $x^2 + y^2 = 1 \wedge x = y$ é possível (tem duas soluções, que representam os pontos de intersecção da recta $x = y$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$).

Outro exemplo ainda. A expressão

$$\forall_{a,b} \exists_x a + x = b$$

que se lê: '*Quaisquer que sejam a e b existe pelo menos um x tal que $a + x = b$* ' é uma proposição verdadeira em \mathbf{Z} , \mathbf{R} , \mathbf{C} , etc. (mais geralmente em qualquer grupo aditivo).

OBSERVAÇÕES DE ORDEM CRÍTICA E DIDÁCTICA. Os exemplos anteriores dão já uma ideia do papel que os quantificadores desempenham na linguagem matemática. Na verdade, toda a proposição geral da matemática (axioma, teorema ou definição) faz intervir um ou mais quantificadores, muitas vezes de tipos diferentes (universal e existencial). Até nas proposições mais elementares isto se verifica; assim, quando em geometria enunciamos o axioma: '*Quaisquer que sejam os pontos A e B , sendo $A \neq B$, existe uma recta r (e uma só) que contém A e B* ', estamos a fazer uso de vários quantificadores.

Por aqui se vê até que ponto a lógica tradicional é ultrapassada pela lógica matemática: *a lógica formal de ARISTÓTELES é insuficiente para dar conta do raciocínio matemático, especialmente quando entram em jogo proposições de estrutura lógica complexa, com diferentes variáveis quantificadas.*

Na verdade, a estrutura lógica de uma proposição é tanto mais complicada quanto mais quantificadores de tipos diferentes nela se acumulam. Assim, a dificuldade típica que os alunos do ensino liceal costumam ter na apreensão do conceito de limite e nas demonstrações dos respectivos teoremas está principalmente em que a definição desse conceito envolve vários quantificadores de tipos diferentes (universal e existencial).

Igualmente típica é a dificuldade, que encontramos nos alunos, em formularem correctamente a negação de certas proposições, nas demonstrações por redução ao absurdo. Isso resulta da necessidade de aplicar as leis de DE MORGAN, por vezes a vários quantificadores.

Destes factos daremos exemplos oportunamente.

Já no § 18 tratámos da aplicação das operações lógicas elementares, definidas no § 5, a funções proposicionais. Resta-nos agora fazer o mesmo estudo para a implicação e para a equivalência, definidas nos §§ 11 e 12. Por exemplo, se ligarmos as condições ' x é português' e ' x nasceu em Portugal' pelo sinal ' \rightarrow ' (de implicação material) obtém-se a nova *condição* em x :

$$x \text{ é português} \rightarrow x \text{ nasceu em Portugal}$$

que não é certamente universal (tomando para universo o conjunto dos seres humanos), visto que nem todos os portugueses têm nascido em Portugal.

Consideremos agora as duas condições ' x é um peixe' e ' x tem vértebras', no universo dos seres vivos. Como sabemos, todo o indivíduo x que verifique a primeira condição, também verifica a segunda. Por outro lado, todo o indivíduo que não verifique a primeira condição, dá a esta um valor lógico inferior ou igual ao da segunda. Logo, segundo o estabelecido no § 11, todo os indivíduos do universo considerado tornam verdadeira a implicação material:

$$x \text{ é um peixe} \rightarrow x \text{ tem vértebras}$$

Esta é pois uma condição universal, o que se exprime escrevendo:

$$\forall_x (x \text{ é um peixe} \rightarrow x \text{ tem vértebras})$$

Para simplificar a escrita, em casos como este, indica-se o quantificador universal, escrevendo simplesmente a variável x sob o sinal ' \rightarrow '.

Assim teremos:

$$x \text{ é um peixe} \xrightarrow{x} x \text{ tem vértebras}$$

O sinal composto ' \xrightarrow{x} ' lê-se '*implica qualquer que seja x* ' ou '*implica necessariamente*'. A anterior proposição pode ainda ler-se:

'Se x é um peixe, x tem vértebras, qualquer que seja x ',

podendo omitir-se a expressão 'qualquer que seja x ', se não houver perigo de confusão.

Outro exemplo. No universo \mathbf{N} (ou em \mathbf{Z}), a expressão ' n divide $6 \rightarrow n$ divide 12 ' é uma condição em n universal. Com efeito, todo o número que divide 6 também divide 12; e todo o número que não divide 6 verifica a implicação, visto que a condição ' n di-

vide 6' toma nesse caso o valor lógico zero, inferior ou igual ao que toma a condição ' n divide 12'.

Podemos pois escrever, indiferentemente:

$$\forall_n (n|6 \rightarrow n|12) \quad \text{ou} \quad n|6 \xrightarrow[n]{} n|12$$

Anàlogamente, em \mathbf{R} :

$$x > 7 \xrightarrow{x} x > 3, \quad x - 1 = 0 \xrightarrow{x} (x - 1)(x + 2) = 0, \quad \text{etc.}$$

Os sinais ' \xrightarrow{x} ', ' $\xrightarrow[n]{}n$ ', etc. podem ainda escrever-se entre expressões com mais de uma variável; mas então obtém-se uma condição na variável ou nas variáveis que ficam livres. Por exemplo, a expressão

$$x > a \xrightarrow{x} x > b$$

é uma condição em a e b que, no universo \mathbf{R} , equivale obviamente à condição ' $a \geq b$ ', isto é:

$$(x > a \xrightarrow{x} x > b) \leftrightarrow a \geq b$$

Seja agora a seguinte expressão, no universo dos seres humanos: ' x é filho de $y \wedge y$ é irmão de $z \rightarrow x$ é sobrinho de z '. Imediatamente se reconhece que esta condição em x, y, z é universal, (por definição de 'sobrinho'), o que se exprime escrevendo:

$$\forall_{x,y,z} (x \text{ é filho de } y \wedge y \text{ é irmão de } z \rightarrow x \text{ é sobrinho de } z)$$

Tal como no caso de uma só variável, podemos agora indicar a quantificação universal, escrevendo as variáveis sob sinal ' \rightarrow ':

$$x \text{ é filho de } y \wedge y \text{ é irmão de } z \xrightarrow{x,y,z} x \text{ é sobrinho de } z$$

Porém, neste caso como no primeiro, todas as variáveis que intervêm nas expressões figuram sob o sinal da implicação. Ora, para simplificar ainda mais a escrita e a linguagem, em casos tais, substituiremos as variáveis por um ponto, sob o sinal ' \rightarrow '. Diremos então que a primeira condição (à esquerda do sinal) *implica formalmente* a segunda.

Portanto, diz-se que uma condição *implica formalmente* outra, quando todo o valor ou sistema de valores que verifica a primeira também verifica a segunda. O sinal ' \rightarrow ' (de implicação formal) pode

ler-se ‘implica necessariamente’ ou ainda ‘Se ..., então necessariamente’. Por exemplo, a implicação formal

$$X \text{ é homem} \rightarrow X \text{ é mortal},$$

pode ler-se ‘Se X é homem, então necessariamente X é mortal’, podendo omitir-se a expressão ‘então necessariamente’, desde que não haja perigo de confusão. Observações análogas para as implicações:

$$X \text{ é um quadrado} \rightarrow X \text{ é um rectângulo}$$

$$x|y \wedge y|z \rightarrow x|z, \quad \text{etc.}$$

Em geral, quando se diz simplesmente que uma dada condição *implica* outra, subentende-se que a implicação é formal.

Note-se porém que a implicação *não é formal*, quando alguma, mas não todas as variáveis que intervêm nas condições ligadas pelo sinal de implicação, figura sob este sinal. É o que sucede, por exemplo, na *definição de número primo*:

$$p \text{ é primo} \leftrightarrow p \neq 1 \wedge (n|p \rightarrow_{n} n=1 \vee n=p)$$

(‘Um número p é primo, se e só se são verificadas as duas condições: $p \neq 1$; se um número n divide p , esse número ou é 1 ou é p ’). Aqui o sinal ‘ \rightarrow ’ _{n} liga duas condições em que, além da variável n , figura ainda a variável p : não se trata pois de uma implicação formal, e por isso não podemos substituir o sinal ‘ \rightarrow ’ _{n} por ‘ \rightarrow ’.

NOTA. Ao contrário do que sucede com a implicação material, o conceito de implicação formal concorda sempre com o conceito usual de implicação. Como observámos atrás, o conceito de implicação material tem o sentido usual, quando se ignora o valor lógico das proposições entre as quais se afirma a implicação. Ora, quando se afirma uma implicação entre duas condições, com uma ou mais variáveis, tudo se passa como se as variáveis fossem incógnitas e as condições fossem proposições cujo valor lógico se ignora. Assim, quando se afirma:

$$x \text{ é divisível por } 6 \rightarrow x \text{ é divisível por } 3,$$

é como se x designasse um número desconhecido qualquer; se depois esse número é, por exemplo, $2^{10} + 3^{10}$, podemos desde já afirmar antes de qualquer verificação, que, se $2^{10} + 3^{10}$ é divisível por 6, também é divisível por 3. Isto é pois uma consequência do facto geral ‘ x é divisível por 6 \rightarrow x é divisível por 3’, o qual por sua vez resulta do facto ainda mais geral:

$$x \text{ divisível por } y \wedge y \text{ é divisível por } z \rightarrow x \text{ é divisível por } z$$

‘CONDIÇÃO NECESSÁRIA’ E ‘CONDIÇÃO SUFICIENTE’. EQUIVALÊNCIA FORMAL. Quando uma condição implica formalmente outra, também se diz que a primeira é *condição suficiente* para que se verifique

a segunda ou que a segunda é *condição necessária* para que se verifique a primeira. Por exemplo, a implicação

$$'n \text{ é divisível por } 6 \rightarrow n \text{ é divisível por } 3'$$

pode ler-se das seguintes maneiras:

'Para que um número n seja divisível por 6 é necessário que n seja divisível por 3'.

'Para que um número n seja divisível por 3 é suficiente que n seja divisível por 6'.

O que se disse neste parágrafo para a implicação aplica-se, *mutatis mutandis*, à equivalência. Consideremos por exemplo a seguinte condição em p , a e b no universo \mathbf{N} (ou \mathbf{Z}):

$$p \mid a b \leftrightarrow p \mid a \vee p \mid b$$

É esta condição universal? Claro que não: por exemplo, 6 divide o produto 4×9 , sem dividir 4 nem 9. Mas sabemos que, *se p é um número primo, a condição é verificada quaisquer que sejam a e b* . Assim teremos, em símbolos:

$$p \text{ é primo} \rightarrow (p \mid a b \leftrightarrow_{a, b} p \mid a \vee p \mid b),$$

o que se traduz à letra deste modo: 'Se p é primo, então p divide $a b$, se e só se p divide a ou p divide b , quaisquer que sejam a e b '; ou ainda, em tradução mais livre: 'Um número primo divide o produto de dois números, se e só se divide pelo menos um desses números', teorema bem conhecido da aritmética.

Pode acontecer que, dadas duas condições p e q , se tenha ao mesmo tempo $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$. Ter-se-á então, evidentemente, $p \leftrightarrow q$ (as duas condições são formalmente equivalentes). Assim recaímos no conceito da equivalência formal, que tínhamos apresentado antecipadamente, no § 17, para comodidade de exposição; vemos agora que o ponto sob o sinal \leftrightarrow (de equivalência material) está a substituir todas as variáveis das condições consideradas, tal como se faz para a implicação. Assim o sinal ' \leftrightarrow ' também se poderá ler: '*equivale necessariamente a*'.

Sejam por exemplo as duas seguintes condições ⁽¹⁾:

$$'x \text{ é filho de } y \wedge y \text{ é irmão de } z' \quad \text{e} \quad 'x \text{ é sobrinho de } z'.$$

Já vimos que a primeira implica (formalmente) a segunda, mas é fácil ver que a segunda não implica a primeira. No entanto,

⁽¹⁾ — Aqui os termos 'filho', 'irmão' e 'sobrinho' são tomados em sentido lato, sem distinção de sexo.

se aplicarmos a esta o quantificador \exists_y , já se verifica implicação nos dois sentidos; e portanto equivalência (formal):

$$\exists_y x \text{ é filho de } y \wedge y \text{ é irmão de } z \leftrightarrow x \text{ é sobrinho de } z$$

Esta é, aliás, a definição lógica de 'sobrinho' a partir de 'filho' e 'irmão'. Note-se a propósito que também o termo 'irmão' se pode definir, de modo análogo, a partir de 'filho'. Para comodidade, tomemos a letra F como abreviatura de 'é filho de' e a letra H como abreviatura de 'é irmão de'; então virá, *por definição*:

$$x H y \leftrightarrow \exists_z x F z \wedge y F z \wedge x \neq y$$

Em virtude do que se disse há pouco, quando se tem $p \leftrightarrow q$, qualquer das condições p e q é ao mesmo tempo necessária e suficiente para que se verifique a outra. Assim, por exemplo, a equivalência:

$$n \text{ é divisível por } 15 \leftrightarrow n \text{ é divisível por } 3 \wedge n \text{ é divisível por } 5$$

pode ler-se dos seguintes modos:

'Condição necessária e suficiente para que um número seja divisível por 15 é que seja divisível por 3 e por 5';

'Para que um número seja divisível por 3 e por 5 é necessário e suficiente que seja divisível por 15'; etc.

Porém esta maneira de exprimir a equivalência formal é usada apenas em proposições que se apresentam como teoremas ou como axiomas. Quando se trata de uma definição sob a forma de equivalência, para a distinguir de teorema ou axioma, é costume, em linguagem comum, iniciá-la com a expressão 'Diz-se que', sendo a equivalência expressa simplesmente pela palavra 'se' ou 'quando', em vez da expressão 'se e só se' (para não sobrecarregar o enunciado).

Por exemplo, a anterior definição do termo 'irmão' pode formular-se, em linguagem comum, do seguinte modo:

'Diz-se que um indivíduo é irmão de outro, quando existe pelo menos um terceiro de quem ambos são filhos, sendo distintos entre si'.

Anàlogamente, a definição do termo 'divide' (a partir do conceito de produto):

$$a | b \leftrightarrow \exists_c b = a c,$$

pode assim formular-se:

'Diz-se que a divide b , quando existe pelo menos um c tal que $b = a c$ '.

(Aqui os indivíduos tanto podem ser números inteiros como polinómios, como outras entidades ainda).

PROPRIEDADES DA IMPLICAÇÃO FORMAL. É fácil ver que algumas das propriedades da implicação material se estendem à implicação formal. Entre essas indicaremos a *transitividade* e a *lei da conversão*:

Se $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow C$, também $A \rightarrow C$

Se $A \rightarrow B$, então $\sim B \rightarrow \sim A$

Por exemplo, da implicação:

x é um peixe $\rightarrow x$ tem vértebras,

resulta imediatamente:

x não tem vértebras $\rightarrow x$ não é um peixe

A conversão é menos trivial, quando se aplicam ao mesmo tempo outras regras da lógica. Seja por exemplo a proposição

$a \cdot b = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = 0$

(‘Se o produto de dois números é zero, um pelo menos desses números é zero’), válida não só nos campos numéricos usuais, mas, de um modo geral, nos domínios de integridade (ver § 8, NOTA). Aplicando àquela proposição a lei da conversão e, em seguida, as primeiras leis de DE MORGAN, obtém-se a proposição equivalente:

$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \rightarrow a \cdot b \neq 0$

(‘O produto de dois números diferentes de zero é diferente de zero’).

A transitividade da implicação dá origem a um tipo geral de silogismo. Exemplo:

‘Se X não distingue o azul do vermelho, X é daltónico. Se X é daltónico, X não pode conduzir automóvel. Logo, se X não distingue o azul do vermelho, X não pode conduzir automóvel’.

Aliás o raciocínio matemático é, em grande parte, uma cadeia de implicações, com jogo de variáveis.

REGRAS GERAIS SOBRE O USO DOS PARÊNTESSES. Dum modo geral, quando uma expressão composta é ligada a outra por um sinal de operação lógica, deve ser escrita entre parênteses. Todavia, para

evitar uma excessiva acumulação de parênteses, que dificultaria a leitura, convencionam-se dispensá-los em certos casos, de modo que não resulte daí qualquer perigo de confusão. As regras relativas ao uso dos parênteses variam com os autores ; nas presentes lições, convençionamos dispensá-los, em geral, nos seguintes casos :

1. Quando a expressão a ligar não contém sinais de operações lógicas.

2. Quando a expressão é ligada a uma outra por um sinal de implicação ou equivalência, a não ser que já contenha algum desses sinais.

3. Quando se aplica à expressão um quantificador, a não ser que a expressão esteja sob a forma de uma implicação ou de uma equivalência.

OBSERVAÇÕES DE ORDEM CRÍTICA E DIDÁCTICA. Escusado será salientar a importância da implicação formal. Basta lembrar que a maior parte das proposições gerais da matemática se apresentam sob a forma :

$$H \rightarrow T$$

em que, nos lugares de H e T, figuram condições com *variáveis*, denominadas, respectivamente, *hipótese* e *tese* da proposição. Até as leis das ciências experimentais assumem geralmente esta forma, sendo as condições H e T denominadas *causa* e *efeito*.

Por vezes, a hipótese H apresenta-se sob a forma de uma conjunção de várias condições H_1, H_2, \dots, H_n :

$$H = H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n$$

Neste caso, as condições H_1, \dots, H_n também se dizem *hipóteses* da proposição. Por exemplo, no teorema

$$p \text{ é primo } \wedge p \mid ab \rightarrow p \mid a \vee p \mid b,$$

as condições '*p é primo*' e '*p | ab*' são as *hipóteses* do teorema.

Análoga situação se pode apresentar na tese de uma proposição (mas é preciso que se trate de conjunção e não de disjunção).

A proposição $T \rightarrow H$ diz-se *recíproca* da proposição $H \rightarrow T$. Pode acontecer que tanto esta como a sua recíproca sejam verdadeiras ; nesse caso as duas proposições fundem-se numa só, com a forma de equivalência formal :

$$H \leftrightarrow T$$

(então H é *condição necessária e suficiente* para T).

Por outro lado, vimos que toda proposição $H \rightarrow T$ é equiva-

lente à proposição $\sim T \rightarrow \sim H$. A esta é costume chamar *contra-recíproca* ou *conversa* da primeira. A designação ‘contra-recíproca’ parece-nos inconveniente, por colocar de certo modo em pé de igualdade duas situações bem diversas. Com efeito, a recíproca de uma proposição verdadeira só ocasionalmente é verdadeira e, mesmo nesse caso, exige uma demonstração que, muitas vezes, está longe de ser imediata. Pelo contrário, a proposição conversa de uma outra é sempre equivalente a esta, de maneira imediata, segundo as leis da lógica: *trata-se de um mesmo facto enunciado de dois modos diversos, mas obviamente equivalentes*. Em vez de ‘proposição conversa de proposição dada’, poderíamos chamar-lhe ‘forma conversa da proposição dada’.

Assim, por exemplo, a proposição ‘ x é divisível por 6 $\rightarrow x$ é por 3’ é verdadeira em \mathbf{N} (ou \mathbf{Z}), mas não o é, evidentemente, a sua recíproca. Porém já sabemos *a priori* que a sua forma conversa:

‘ x não é divisível por 3 $\rightarrow x$ não é divisível por 6’

lhe é equivalente e portanto verdadeira.

É certo que se trata apenas de uma questão de terminologia; mas tais questões têm importância, porque uma terminologia mal escolhida pode insinuar no espírito do aluno ideias erróneas preconcebidas.

§ 23. NOVAS NOTAÇÕES. APLICAÇÕES DIDÁCTICAS

Já atrás observámos que, em certas teorias, é por vezes cómodo considerar mais de um universo ao mesmo tempo, usando símbolos de tipos diferentes para as variáveis relativas a esses diferentes universos. Assim, em geometria elementar, é costume usar letras latinas maiúsculas para pontos, letras latinas minúsculas para rectas e letras gregas minúsculas para planos. Deste modo, a expressão ⁽¹⁾

$$\forall_{r,P} \exists_s \text{ s contém P } \wedge \text{ s é paralela a } r$$

deverá ler-se: ‘Quaisquer que sejam a recta r e o ponto P , existe pelo menos uma recta s que contém P e é paralela a r ’, e análogamente em outros casos.

Também na análise matemática é costume distinguir as variáveis naturais (universo \mathbf{N}) das variáveis reais (universo \mathbf{R}) ou complexas (universo \mathbf{C}), usando para as variáveis naturais letras tais como m , n , p , q , etc. Mas muitas vezes pode haver dúvida quanto ao

⁽¹⁾ — Parece-nos de toda a conveniência que, já no ensino liceal, se defina o paralelismo das rectas de modo a incluir como caso particular o da coincidência.

campo de variação da variável, devendo então declarar-se explicitamente qual este é. Em lógica simbólica, podemos indicá-lo nos próprios símbolos dos quantificadores. Por exemplo, a expressão

$$\forall_{a > 0} \exists_{x > 0} x^2 = a$$

poderá ler-se: ‘Qualquer que seja $a > 0$, existe (pelo menos) um $x > 0$ tal que $x^2 = a$ ’. O mesmo facto poderia exprimir-se, segundo as convenções anteriores, do seguinte modo

$$a > 0 \rightarrow \exists_x x > 0 \wedge x^2 = a ,$$

mas a anterior expressão é mais breve e mais sugestiva.

Outro exemplo. Quando definimos ‘sucessão u_n limitada’ e dizemos ‘Existe um número L tal que $|u_n| \leq L$, qualquer que seja n ’, estamos a usar dois quantificadores, o que se traduz pela expressão simbólica

$$\exists_L \forall_n |u_n| \leq L ;$$

subentende-se aqui que n é uma variável natural, enquanto u_n e L são variáveis reais ; mas se houvesse lugar para dúvidas poderia indicar-se nos próprios quantificadores o campo de variação das variáveis, mediante certa convenção simbólica que estudaremos oportunamente.

Já atrás aludimos à dificuldade que os alunos encontram em formular a negação de certas proposições. A anterior expressão oferece precisamente um exemplo, em que a necessidade de aplicar duas vezes as segundas leis de DE MORGAN conduz facilmente a erro, em linguagem comum. Pelo contrário, a lógica simbólica permite *calcular* sem dificuldade a negação daquela expressão, conduzindo rapidamente ao resultado:

$$\forall_L \exists_n |u_n| > L$$

que exprime simbolicamente o facto de a sucessão u_n ser ilimitada.

Como é sabido, o conceito de ‘sucessão ilimitada’ aproxima-se do de ‘infinitamente grande’ ; mas a definição deste conceito é mais complicada, envolvendo três quantificadores e uma implicação:

$$\forall_L \exists_p (n > p \rightarrow |u_n| > L),$$

isto é: ‘Qualquer que seja L , existe pelo menos um p , tal que, para

todo o $n > p$, se tem $|u_n| > L$. A negação deste facto pode exprimir-se do seguinte modo ⁽¹⁾:

$$\exists_L \forall_p \exists_n n > p \wedge |u_n| \leq L,$$

isto é: 'Existe pelo menos um L tal que, para todo o p , existe um n que verifica as condições $n > p$ e $|u_n| \leq L$ ' (o que também se exprime dizendo: 'Existe um L tal que $|u_n|$ não se torna *definitivamente inferior a L* ').

Trata-se pois, como se vê, de expressões com estrutura lógica bastante complexa, o que justifica, em grande parte, as já referidas dificuldades dos alunos. Será isto uma prova de que teoria dos limites deva ser banida do ensino secundário? Mas de modo nenhum! Pelo contrário, achamos que deva manter-se, como óptimo meio de educação lógica, principalmente se, ao mesmo tempo, foram ministrados elementos de lógica simbólica.

Vejamos ainda a definição de limite para funções, segundo CAUCHY. Simbolicamente, esta pode formular-se do seguinte modo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \leftrightarrow \forall_{\delta > 0} \exists_{\varepsilon > 0} (|x - a| < \varepsilon \wedge x \neq a \rightarrow |f(x) - b| < \delta)$$

Anàlogamente, a expressão

$$\forall_{\delta > 0} \exists_{\varepsilon > 0} (|x - a| < \varepsilon \rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta)$$

traduza a propriedade que se costuma resumir dizendo que a função f é *contínua no ponto a* ; enquanto a expressão

$$\forall_{\delta > 0} \exists_{\varepsilon > 0} (|x - y| < \varepsilon \rightarrow_{y, x} |f(x) - f(y)| < \delta)$$

significa que a função f é *uniformemente contínua* (no universo considerado). Por sua vez a expressão

$$\exists_{\delta} (|x - a| < \delta \rightarrow_x f(x) \leq f(a))$$

resume-se dizendo que f tem um *máximo local* no ponto a , enquanto a expressão

$$\exists_L \exists_{\delta > 0} (|x - a| > \delta \rightarrow_x |f(x)| < L)$$

nos diz que f é *limitada numa vizinhança* de a .

⁽¹⁾ — Convém lembrar que a negação de ' $a \rightarrow b$ ' é ' $a \wedge \sim b$ '; e que a letra n sob o sinal de implicação indica o quantificador universal \forall_n .

A lista dos exemplos que se podem apresentar é interminável. Vê-se agora nitidamente como o jogo das variáveis e dos quantificadores, juntamente com as operações lógicas elementares, intervêm de maneira essencial e constante em todo o pensamento matemático.

§ 24. EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Suponhamos que, depois de se ter definido o conjunto \mathbf{R} dos números reais, se quer demonstrar o seguinte facto: ‘Não existe mais de um número x tal que $x^3=8$ ’. A demonstração pode fazer-se do seguinte modo, admitindo teoremas anteriores:

Sejam x e y dois números tais que $x^3=8$ e $y^3=8$. Segundo a *lei da tricotomia*, só podem dar-se três casos: ou $x > y$ ou $x < y$ ou $x=y$. Se $x > y$, também $x^3 > y^3$ (pela *lei da monotonia*), e então não pode ser $x^3=8$ e $y^3=8$, porque daí resultaria $x^3=y^3$. Se $x < y$, a conclusão é a mesma. Então só pode ser $x=y$, e portanto não pode existir mais de um número que verifique a condição $x^3=8$.

O que se demonstrou directamente foi que ⁽¹⁾

$$x^3 = 8 \wedge y^3 = 8 \rightarrow x = y$$

e é este facto que se exprime dizendo ‘*Não existe mais de um x tal que $x^3=8$* ’. Mas sabe-se por outro lado que *existe pelo menos um x tal que $x^3=8$* , o que se exprime simbolicamente escrevendo:

$$\exists_x x^3 = 8.$$

Ora bem, a conjunção desses dois factos, exprime-se dizendo: ‘*Existe um e só um x tal que $x^3=8$* ’. Para traduzir esta situação simbolicamente, antepõe-se à condição $x^3=8$ o símbolo composto ‘ $\exists!$ ’ _{x} que se lê ‘*Existe um e um só x tal que*’ ou ‘*Existe um único x tal que*’. Assim a expressão

$$\exists!_x x^3 = 8$$

é pròpriamente uma abreviatura da expressão

$$(\exists_x x^3 = 8) \wedge (x_1^3 = 8 \wedge x_2^3 = 8 \rightarrow x_1 = x_2)$$

É claro que estas considerações se estendem a qualquer outra condição, com uma ou mais variáveis. Dum modo geral, sendo $\alpha(x)$ uma condição qualquer em x , tem-se, por convenção:

$$\exists!_x \alpha(x) \longleftrightarrow \left(\exists_x \alpha(x) \right) \wedge (\alpha(x) \wedge \alpha(y) \rightarrow_{x,y} x = y)$$

⁽¹⁾ — É claro que, em vez das variáveis x e y , podemos usar outras quaisquer, por exemplo, u e v , x_1 e x_2 , etc. visto que se trata de variáveis aparentes.

Tornando ao exemplo anterior, note-se que, mais geralmente, a condição:

$$\exists_x ! x^3 = a$$

é verificada em \mathbf{R} , qualquer que seja a , isto é:

$$(I) \quad \forall_a \exists_x ! x^3 = a,$$

o que exprime a *existência* e a *unicidade* em \mathbf{R} da raiz cúbica de a (isto é da solução da equação $x^3 = a$), para todo o número a . É curioso lembrar que esta proposição não é verdadeira em \mathbf{Q} (conjunto dos números racionais), embora seja aí verdadeira a afirmação de *unicidade*:

$$\forall_a (x^3 = a \wedge y^3 = a \rightarrow x = y)$$

(a solução de $x^3 = a$, quando existe em \mathbf{Q} , é única). Note-se que também não é verdadeira em \mathbf{C} a proposição (I), embora seja aí verdadeira a afirmação de *existência*:

$$\forall_a \exists_x x^3 = a$$

(com efeito, qualquer número complexo $a \neq 0$ tem *três* raízes cúbicas em \mathbf{C}). Assim, em \mathbf{Q} há apenas *unicidade*, em \mathbf{C} apenas *existência*, e em \mathbf{R} , *existência* e *unicidade*, da raiz cúbica de um número qualquer.

Em resumo, o símbolo ' $\exists_x !$ ' representa um operador lógico composto que sintetiza a conjunção de duas afirmações distintas: uma de existência e outra de unicidade. Anteposto a uma condição em x , indica que esta tem uma solução única.

Em matemática são numerosas as proposições de existência e de unicidade, quer sob a forma de axiomas, quer sob a forma de teoremas. Quando se diz, por exemplo, que uma operação é *sempre possível e uniforme*, está-se a afirmar que o resultado da operação *existe e é único*, quaisquer que sejam os dados. Anàlogamente, a *reversibilidade de uma operação* (§ 8) é uma propriedade de existência e unicidade; por exemplo, a reversibilidade da adição, suposta comutativa, traduz-se pela expressão simbólica

$$\forall_{a,b} \exists_x ! a + x = b,$$

o que só é verdade em certos universos. Aliás, a reversibilidade da adição equivale ao facto de a subtracção ser sempre possível e uniforme. Também atrás estabelecemos a reversibilidade, em \mathbf{R} , da elevação ao cubo, e o mesmo poderíamos fazer para qualquer expoente n ímpar.

Por sua vez a expressão:

$$a > 0 \wedge a \neq 1 \rightarrow \forall_{y>0} \exists_x ! y = a^x,$$

que se lê 'Se a é maior que zero e diferente de 1, então para todo

o $y > 0$ existe um e um só x tal que $y = a^x$, exprime a existência e a unicidade (em \mathbf{R}) do logaritmo de todo o número positivo, sendo a base > 0 e $\neq 1$.

Na geometria euclidiana encontramos desde logo axiomas que são proposições de existência e unicidade. Tal é por exemplo o axioma

$$A \neq B \rightarrow \exists ! r \text{ contém } A \wedge r \text{ contém } B$$

(‘Dados dois pontos distintos, existe sempre uma recta, e uma só, que os contém’); e ainda o famoso axioma de EUCLIDES:

$$\forall_{r,P} \exists ! s \text{ contém } P \wedge s \text{ é paralela a } r$$

Por sua vez a proposição:

$$A, B, C \text{ não são colineares} \rightarrow \exists ! \overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP}$$

é um teorema verdadeiro em geometria plana (o universo lógico é então o conjunto de pontos do plano); a proposição não é verdadeira em geometria do espaço, a não ser que se imponha ainda a P a condição de ser coplanar com A , B e C .

CONCEITO DE CORRESPONDÊNCIA. Em vários dos exemplos anteriores intervém o operador de existência e unicidade precedido do quantificador universal. Seja por exemplo a expressão

$$\forall_x \exists ! y^3 = x$$

sendo x e y variáveis reais. Temos aqui um símbolo composto que se lê: ‘Qualquer que seja x , existe um único y tal que...’, mas que também se pode ler:

‘A todo o valor de x *corresponde* um valor de y , e um só, tal que...’.

O referido símbolo composto está portanto a indicar uma *correspondência unívoca* entre os valores de x e os de y . As correspondências unívocas também são chamadas *funções*, *operações* ou *aplicações*, de que trataremos oportunamente.

Seja agora a proposição:

$$\forall_{x>0} \exists_y y^2 = x$$

também verdadeira em \mathbf{R} . Neste caso, o símbolo composto que precede a condição $y^2 = x$, pode ler-se:

‘A todo o $x > 0$ corresponde pelo menos um y tal que’.

Tal símbolo indica pois uma *correspondência não necessariamente unívoca* entre os valores de x e de y . Estas correspondências também são chamadas imprópriamente *funções* (não unívocas).

OBSERVAÇÕES SOBRE NOTAÇÕES. Como vimos, o operador de existência e unicidade serve para indicar que o número de soluções de uma dada condição é precisamente 1. Seria por isso talvez conveniente adoptar para esse operador um outro símbolo, que facilmente se generalizasse ao caso em que o número de soluções é finito, mas qualquer. Poderíamos por exemplo convencionar que o símbolo

$$\exists_x^n$$

anteposto a uma condição em x , indica que esta *tem exactamente* n soluções. Por exemplo, em \mathbf{R} , a expressão:

$$\exists_x^2 x^2 = 5$$

significa: 'Existem dois valores de x (e só dois) tais que $x^2=5$ ', o que é uma abreviatura da seguinte expressão

$$\exists_x^1 \exists_y x^2 = 5 \wedge y^2 = 5 \wedge x \neq y$$

Por outro lado, o símbolo \exists_x^0 seria equivalente a $\sim \exists_x$.

Registe-se ainda a seguinte proposição, relativa ao universo dos seres humanos:

$$\forall_x \exists_y^2 x \text{ é filho de } y$$

§ 25. CONSIDERAÇÕES ONTOLÓGICAS ACERCA DE CONCEITO DE VARIÁVEL

Há um facto que, embora trivial, passa muitas vezes despercebido: se desejamos obedecer ao princípio da não contradição lógica, não podemos falar de *entes variáveis* (número variável, ponto variável, mesa variável, pessoa variável, etc.); a expressão 'ente variável' é tão contraditória como 'constante variável', 'número par ímpar', etc. ⁽¹⁾. São as propriedades de um ser, e não o próprio ser, que podem variar, isto é: ser substituídas por *outras* propriedades. É bem conhecida a distinção da filosofia tradicional entre *seres* e *modos de ser*, ou ainda entre *substâncias* (a que correspondem os substantivos) e *acidentes* (a que correspondem os adjectivos). A substância seria

⁽¹⁾ — Recordemos que foi o receio de infringir o princípio da não contradição que impediu os antigos de construir uma ciência racional para além da geometria e da estática. Só no Renascimento o conceito matemático de variável permitiu vencer essa tremenda inibição.

aquilo que *está sob* os acidentes, aquilo que permanece idêntico a si mesmo sob as alterações superficiais, isto é, sob as mudanças de propriedades que são apenas *acidentais* e não *essenciais* (definidoras desse ente). Assim, uma pessoa pode mudar de peso ou de hábitos (isto é, passa a ter *outro* peso ou hábitos *diferentes*), sem deixar de ser a pessoa que é.

Mas as propriedades também podem ser concebidas como entes de novo tipo, que por sua vez têm propriedades de novo tipo, e assim por diante. Esta mudança de ponto de vista é marcada na linguagem comum pela conversão de adjectivos em substantivos abstractos ou adjectivos substantivados: ‘branco’ dá ‘brancura’, ‘denso’, ‘densidade’, etc. Por aqui se vê como é delicado o próprio conceito de ente — como é variável o significado da palavra ‘ente’, que procuramos esclarecer melhor quando tratarmos da teoria dos tipos de BERTRAND RUSSELL.

Por conseguinte, também não existem *propriedades variáveis*. Assim, dizer que o volume de um corpo é variável, é apenas um modo abreviado de dizer que esse corpo tem *vários* volumes no decorrer do tempo ; dizer que o significado de uma palavra é variável significa apenas que essa palavra tem *vários* significados, conforme as circunstâncias em que é usada. Trata-se pois aí, unicamente , de *abusos cómodos de linguagem*, que são úteis na medida em que deles temos consciência, para evitar equívocos.

Em particular, os entes matemáticos (números, figuras, posições, etc.) são seres abstractos, correspondentes a propriedades dos seres materiais (ou desses mesmos entes abstractos). Assim, por exemplo, não existem *números variáveis*: os números podem ser reais ou imaginários, inteiros, fraccionários ou irracionais, pares ou ímpares ; mas cada um deles é constante, é um *ente*; não existe pois nenhum número que seja variável. O que existem, sim, são *classes de números e variáveis numéricas*.

Na verdade, a palavra ‘variável’ é usada em matemática com um significado preciso (como substantivo e não como objectivo), que a põe ao abrigo de toda a contradição e de toda a polémica metafísica. Esse significado foi já esclarecido no § 14: em matemática as variáveis são apenas certos símbolos, utilizados para fins que já conhecemos. Seria portanto erro grave confundir uma variável com um conjunto (o seu campo de variação) ou mesmo *tomá-la como símbolo designativo desse conjunto*, como fazem alguns autores.

Seguidamente trataremos do conceito de conjunto, que, como acabamos de observar, é bem distinto do de variável.