

SEGUNDA SEMANA DA MATEMÁTICA

1958-59

N.os 15-16

ciência



revista da
associação de estudantes da
faculdade de ciências de lisboa

COMO NASCEU A TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES. SUAS RELAÇÕES COM A FÍSICA E A TÉCNICA

PROF. DOUTOR J. SEBASTIÃO E SILVA
(Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa)

A teoria das distribuições, criada em 1945 pelo matemático francês LAURENT SCHWARTZ, é um dos mais sugestivos exemplos de como a matemática, longe de ser uma ciência cristalizada em moldes definitivos, segue um processo vital de evolução, em que novas, ilimitadas perspectivas se abrem a cada momento, conduzindo a mudanças de rumo e de cenário, por vezes completamente inesperadas. Está aqui, precisamente, a marca inconfundível do espírito criador, no seu diálogo perpétuo com a natureza, que a um tempo o condiciona e lhe dá meios para progredir, libertando-o desses mesmos condicionalismos naturais.

No caso concreto das distribuições, a evolução foi determinada não só pelas solicitações externas, mas também pelas próprias necessidades intrínsecas da matemática. Na verdade, vários ramos da matemática, da física e da técnica conspiraram para a gestação desta teoria. Durante cerca de meio século, electrotécnicos, físicos teóricos e alguns matemáticos usaram correntemente as distribuições como M. JOURDAIN fazia prosa, isto é: sem o saber. Até que, no momento oportuno, L. SCHWARTZ, num golpe de génio, soube congraçar todas essas intuições dispersas num corpo lógico e eficiente de doutrina. Mais uma vez a intuição, vaga e contraditória, mas fecunda, cedeu o lugar à ideia — lúcida, precisa, coerente.

A situação é singularmente semelhante à génese do cálculo infinitesimal. Este, na sua fase embrionária, não era mais do que o *método dos indivisíveis*, usado por vários matemáticos (a começar por ARQUIMEDES) como meio cómodo de descoberta, não obstante a sua manifesta incoerência. Na verdade, o que eram os indivisíveis? Seres absurdos, impossíveis: «grandezas infinitamente pequenas», que não deviam ser nulas, mas também não podiam ser diferentes de zero, visto serem inferiores a

qualquer submúltiplo da unidade... E contudo esses entes contraditórios permitiam de maneira simples, e com impressionante fecundidade, *descobrir* fórmulas de áreas e volumes, e resolver problemas de mecânica, que de outro modo pareciam inabordáveis. Depois, com NEWTON e LEIBNITZ, a intuição tornou-se ideia: o método heurístico dos indivisíveis, alvo de críticas e troças demolidoras, converteu-se em ciência racional, alicerçada no conceito de limite, e assim nasceu a análise matemática, instrumento básico da ciência moderna, que vemos hoje lançada nas mais audaciosas aventuras (1).

Porém, como L. SCHWARTZ insiste muitas vezes em salientar, não foi partindo de considerações físicas, mas sim de um problema de matemática pura que chegou à sua teoria. Assim o afirmou publicamente, quando esteve entre nós, há dois anos (2):

«A teoria das distribuições nasceu em 1945, a propósito de um pequeno problema, sem ligação com as aplicações que esta teoria tem actualmente. Está aqui uma das melhores provas de uma afirmação muitas vezes repetida entre homens de ciência: a investigação científica deve ser desinteressada; uma teoria que tem aplicações pode muitas vezes nascer de pesquisas teóricas aparentemente sem aplicação.»

Quando procurava determinar a classe das funções contínuas que verificam uma certa condição, SCHWARTZ foi conduzido a uma equação diferencial que restringia a amplitude do problema, obrigando as funções a terem derivada até certa ordem. Como se sabe, é corrente em matemática, pura ou aplicada, utilizar funções contínuas que não admitem derivada em alguns pontos; e pode mesmo acontecer que uma função seja contínua em todos os pontos, sem ter derivada em nenhum: um primeiro exemplo foi dado por WEIERSTRASS. Porém, o facto de uma função $f(x)$ não ter derivada $f'(x)$, *no sentido usual*, definida em todo o seu domínio de existência, não impede que a venha a ter, *num outro sentido* que se atribua ao termo «derivada». Também os números negativos não tinham raiz quadrada *no sentido usual* e passaram a tê-la *num outro sentido*, quando, em 1572, BOMBELLI introduziu os números imaginários. Assim,

(1) Não esqueçamos porém que, só no século passado, a análise matemática atingiu uma fase de estruturação lógica que se pode considerar satisfatória. Lembremos, por outro lado, que os físicos ainda hoje usam a cada passo, por comodidade, o método heurístico dos infinitamente pequenos, considerando-os porém como «quantidades muito pequenas» e desprezando, explicita ou implicitamente, «infinitésimos de ordem superior».

Note-se que o método heurístico (ou de redescoberta) pode e deve ser usado no ensino, como fase preliminar intuitiva, mas sempre com as devidas precauções.

(2) Numa entrevista concedida ao «Diário Popular», em 7 de Março de 1957.

ou de modo semelhante, pensou SCHWARTZ — e a partir desse momento, para resolver o referido problema particular de matemática pura, ia ter existência a teoria das distribuições, que hoje intervém, de maneira essencial, em vários ramos da matemática e da física ⁽¹⁾.

Portanto, o conceito de distribuição está para o de função, de certo modo, como o conceito de número imaginário está para o de número real ou como o conceito de número negativo está para o de número positivo ou ainda como o de número fraccionário está para o de número inteiro. As sucessivas generalizações do conceito de número visaram a tornar sempre possíveis certas operações (divisão, subtracção, extracção de raiz), introduzindo entes abstractos de nova espécie que continuaram a chamar-se números. *Do mesmo modo, a operação de derivação, que não era possível para todas as funções contínuas, passou a sê-lo com a introdução dos novos entes chamados «distribuições».* Por exemplo, a função de WEIERSTRASS, que não tem derivada no sentido usual, passou a ter derivadas *de todas as ordens*, que não são funções, mas sim *distribuições* ⁽²⁾.

Não vamos agora precisar como SCHWARTZ definiu as novas entidades, tanto mais que, como veremos, há vários modos de as conceber. O que interessa desde já salientar é que uma situação semelhante a esta se tinha já apresentado em certos campos da matemática, especialmente no domínio das equações em derivadas parciais. Seja por exemplo a *equação das cordas vibrantes*

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Costuma dizer-se que o seu integral geral é

$$(2) \quad u = f(x - vt) + g(x + vt),$$

⁽¹⁾ Um matemático mais reverenciador da «ciência oficial» teria renunciado, julgando-se num beco sem saída.

⁽²⁾ Não foram só as funções contínuas que passaram a ter sempre derivadas de todas as ordens (distribuições): o mesmo sucedeu com as funções descontínuas que são integráveis em qualquer domínio finito e que, por isso, se podem identificar a derivadas de certas funções contínuas. Convém desde já salientar que, *em geral*, não faz sentido falar de valor de distribuição num dado ponto x ; na verdade, o que se generaliza não é o conceito de *derivada num ponto*, mas sim o de *função derivada*, concebida como um todo.

sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções *arbitrárias* ⁽¹⁾. Mas é desde logo evidente que tais funções não podem ser *inteiramente arbitrárias*, pois devem, pelo menos, admitir derivadas até à segunda ordem, para que existam, no *sentido usual*, as derivadas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - vt) + g''(x + vt)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = [f''(x - vt) + g''(x + vt)] v^2$$

que intervêm na equação (1). Anàlogamente, a solução do problema de CAUCHY para a equação (1) com as condições iniciais

$$(3) \quad u(x, 0) \equiv \Phi(x), \quad u'_t(x, 0) \equiv \Psi(x),$$

será

$$(4) \quad u(x, t) = \frac{\Phi(x + vt) + \Phi(x - vt)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-vt}^{x+vt}$$

Mas esta fórmula só dá, para a equação (1), uma solução no *sentido usual*, se $\Phi(x)$ tiver derivada (usual) pelo menos até à segunda ordem, e se $\Psi(x)$ tiver derivada de primeira ordem. Recordemos porém o *significado físico* destas duas funções, no problema das cordas vibrantes: a função incógnita

$$y = u(x, t)$$

representa, em cada instante t , a configuração da corda vibrante, em coordenadas cartesianas x, y ; logo, segundo (3), a função $\Phi(x)$ representa a configuração (conhecida) da corda no instante $t = 0$, enquanto $\Psi(x)$ representa, para cada valor de x , a velocidade do ponto de abscissa x da corda, naquele mesmo instante. *Deste modo, obrigar as funções Φ e Ψ a terem as referidas derivadas é restringir inutilmente o*

(1) Recordemos que x representa a abscissa e u a ordenada de cada ponto da corda no instante t ; as funções $f(x - vt)$ e $g(x + vt)$, de x e t , representam então duas *ondas*, que se propagam ao longo do fio, em sentidos contrários, com a velocidade v .

É curioso lembrar que foi o problema das cordas vibrantes, ligado ao estudo dos instrumentos musicais de corda, que levou os matemáticos, no século passado, a admitirem o conceito geral de função, como correspondência arbitrária entre dois conjuntos de números. E são ainda problemas concretos do mesmo tipo que conduzem, inevitavelmente, ao conceito de distribuição, que generaliza o de função.

problema físico, porquanto a fórmula (4) resolve este problema em qualquer hipótese, contanto que tais funções sejam contínuas.

Situações como esta levaram diversos autores a procurar definir matematicamente «soluções generalizadas» de equações diferenciais, de modo a poder englobar todos os casos possíveis dos problemas físicos. Assim, o matemático russo S. L. SOBOLEV convencionou chamar *solução generalizada* de uma equação diferencial a toda a função u , que seja limite de uma sucessão de soluções *usuais* u_n da equação, uniformemente convergente para u em todo o domínio limitado. Por exemplo, a função definida por (4) é sempre uma solução generalizada de (1), segundo SOBOLEV, nos casos em que Φ e Ψ , sendo contínuas, não admitem as referidas derivadas; basta lembrar que toda a função contínua se pode exprimir como limite de uma sucessão de funções indefinidamente deriváveis, uniformemente convergente em qualquer domínio limitado. Ora esta atitude de SOBOLEV equivale já, no fundo, a admitir a existência de distribuições, que são *derivadas generalizadas* Φ' , Φ'' , Ψ' daquelas funções contínuas. Na realidade, este matemático, ao estudar as equações hiperbólicas, de que a anterior é um exemplo, chegou a introduzir em 1936 o conceito de distribuição, sem contudo usar tal designação e sem desenvolver a respectiva teoria.

Recordemos ainda que a equação (1) (das cordas vibrantes) não é senão um caso particular, para $n = 1$, da *equação das ondas*:

$$(5) \quad \Delta u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

em que Δ é o conhecido operador laplaciano, em relação às variáveis x_1, \dots, x_n :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Como é sabido, os fenómenos de propagação do som, da luz, dos campos electromagnéticos, etc., em meios homogéneos, isotrópos e não absorventes, são regidos por equações deste tipo.

Suponhamos, para fixar ideias, $n = 3$, e ponhamos $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Geralmente, nos problemas de propagação, além duma equação do tipo (5) costuma ser dado um domínio D do espaço, no qual se estuda a propagação das ondas: a função incógnita $u(x, y, z, t)$, que representa o *perfil da onda* em cada instante t , deve então verificar, não só *condições iniciais*, do tipo das anteriores (3), mas também *condições nos limites*, isto é, sobre a *fronteira do domínio* D (sendo obrigada,

por exemplo, a tomar certos valores limites, dados «a priori», na fronteira desse domínio) (1).

Ora os físicos conheciam um processo heurístico, bastante simples e eficaz, para determinar soluções de problemas deste tipo, mediante certas expressões denominadas «funções de GREEN» (2). Porém, o que os físicos chamavam (e geralmente ainda chamam) «funções de GREEN para a equação das ondas», não são muitas vezes funções, mas sim distribuições. Nelas intervém com frequência aquilo a que os físicos têm chamado imprópriamente «função δ de DIRAC», em homenagem ao célebre físico inglês que utilizou este conceito, na sua sistematização da mecânica ondulatória. Trata-se de uma «função» $\delta(x, y, z)$ (ou abreviadamente $\delta(P)$, sendo P o ponto de coordenadas x, y, z), função essa que deve satisfazer às seguintes condições:

$$1 \quad \delta(P) = \begin{cases} \infty, & \text{se } P \text{ é a origem dos eixos.} \\ 0, & \text{se } P \text{ é qualquer outro ponto.} \end{cases}$$

$$2) \quad \text{O integral de } \delta \text{ em qualquer domínio } D \text{ que contenha a origem é igual a 1, isto é: } \iiint_D \delta(P) dv = 1$$

Ora não existe nenhuma função que satisfaça a estas duas condições! Mesmo admitindo uma nova generalização do conceito de integral que conservasse as propriedades mais elementares da integração — por exemplo a de conduzir sempre a um valor único e a de permutar com as constantes — as referidas condições seriam incompatíveis. Com efeito, segundo a condição 1), deveria ser $2\delta = \delta$, visto que $2 \times 0 = 0$ e $2 \times \infty = \infty$, e portanto o integral de 2δ estendido a D deveria ser igual ao de δ ; porém a condição 2) exige que esses integrais sejam diferentes, um igual a 1 e o outro igual a 2. *Chega-se pois assim a uma contradição, que só pode evitar-se, considerando $2\delta \neq \delta$ e admitindo portanto que δ é, não uma função definida pela condição 1), mas sim uma entidade de nova espécie.*

Só mais adiante indicaremos como se pode definir correctamente esta entidade δ , a que os físicos têm chamado função e que é na reali-

(1) Recordemos que, além da equação escalar das ondas, se apresenta também a equação *vectorial* análoga, em que a função incógnita é um vector, função de x, y, z, t (por exemplo, um campo eléctrico ou um campo magnético).

(2) Por analogia com as funções de GREEN, que permitem resolver problemas nos limites relativos a equações do tipo elíptico, tais como a de LAPLACE ou de POISSON. Mas essas, sim, são autênticas funções.

dade uma distribuição. Vejamos por enquanto como se é conduzido, por considerações físicas intuitivas, à pseudo-função δ :

Imaginemos primeiramente o domínio D cheio de matéria, distribuída de maneira contínua, com a *massa específica* $\mu(P)$ em cada ponto P de D ; então a *massa total* m contida em D será

$$(6) \quad m = \iiint_D \mu(P) dv.$$

Suponhamos agora que, em vez de uma distribuição contínua, se tem toda a matéria concentrada num único ponto (por exemplo a origem), sendo aí a massa igual a 1 e sendo nula em toda a parte restante de D . Neste caso, a distribuição de matéria considerada reduz-se a um *ponto material* de massa 1 colocado na origem (a noção abstracta de ponto material não é de modo nenhum nova: sabe-se que toda a mecânica racional está baseada nesta noção). Nestas condições, poderíamos dizer que a *massa específica* μ é nula em todos os pontos de D , excepto na origem, onde é igual a $\frac{m}{v} = \frac{1}{0} = \infty$, pois que o volume v de um ponto é nulo; e somos tentados a fazer ainda uso (embora indevidamente) da fórmula (6), escrevendo neste caso

$$\iiint_D \mu(P) dv = 1,$$

continuando a supor que o domínio D contém a origem.

Teríamos pois assim uma concretização intuitiva da «função» δ (aliás distribuição) de DIRAC, visto que são *aparentemente* verificadas as referidas condições 1) e 2). Mais geralmente ainda, costuma considerar-se a «função» de DIRAC relativa a um ponto A qualquer do espaço (em vez da origem); essa «função» é definida de modo análogo ao anterior, correspondendo à noção de massa unitária colocada em A . Designemo-la pelo símbolo δ_A : deste modo, se no ponto A estiver colocada a massa m , corresponder-lhe-á a distribuição de massa específica representada por $m \delta_A$.

Exemplos análogos nos são fornecidos pela teoria do electro-magnetismo. Uma das funções escalares consideradas nessa teoria é a função *densidade de carga eléctrica*, habitualmente representada por $\rho(x, y, z)$, $\rho(P)$ ou apenas ρ ; então a carga eléctrica q contida num domínio D qualquer será dada pelo integral da função ρ estendido a D . Porém, se, em vez de uma distribuição contínua de carga eléctrica, se

tem apenas uma *carga pontual* q colocada no ponto A , não podemos falar de função densidade no sentido usual: trata-se agora da *distribuição «densidade de carga eléctrica»*, representada por $q\delta_A$, em que δ_A é a já referida pseudo-função de DIRAC relativa ao ponto A .

Mas a distribuição de DIRAC é apenas um exemplo elementar, entre muitos outros mais complexos, que o electromagnetismo nos apresenta, de distribuição. Aliás, convém observar que o termo «distribuição» foi sugerido a SCHWARTZ, precisamente, pelas distribuições de cargas.

Um dos casos mais simples é o da distribuição das cargas eléctricas num condutor C , em regime electrostático. Como é sabido, toda a carga se distribui então sobre a superfície do condutor, com uma *densidade superficial* $\sigma(P)$, função do ponto P , sendo nula a carga, e portanto o campo eléctrico, no interior de C . Supondo que no exterior de C também não existem cargas livres, teremos assim uma *distribuição* de densidade *espacial* ou *volúmica* ρ , que é nula no interior e no exterior de C , infinita na superfície de C e tal que, dado um domínio D que contenha uma porção qualquer S dessa superfície, se tem

$$\iiint_D \rho \, dv = \iint_S \sigma \, d\alpha.$$

Ainda neste caso, $\rho(x, y, z)$ será uma distribuição que não é uma função.

Nos tratados de electromagnetismo, costuma salientar-se que a validade das equações dos campos, a começar pelas equações de MAXWELL, só é postulada para os pontos «ordinários» do espaço, isto é, para aqueles pontos em cujas vizinhanças as propriedades físicas do meio variam continuamente (consideradas, evidentemente, numa escala macroscópica simplificadora da realidade concreta, que, como sabemos, só aproximadamente se pode descrever). Deste modo, os casos porventura mais interessantes, que são os dos pontos de descontinuidade dos campos (por exemplo, na superfície de separação de dois meios, onde se verificam fenómenos de refacção, reflexão, etc.), requerem um tratamento especial, nem sempre satisfatório do ponto de vista matemático. Ora bem, a teoria das distribuições oferece um meio — o único existente — de unificação e racionalização desses métodos.

Por exemplo, a equação do campo eléctrico E no vazio

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho$$

(em unidades electrostáticas C. G. S.), que só era válida nos pontos ordi-

nários, em que a densidade ρ tinha sentido, passa a ser agora sempre aplicável, juntamente com a equação que dela se deduz

$$(7) \quad \Delta V = -4\pi\rho,$$

em que V é o potencial (escalar) do campo eléctrico, isto é: $E = -\text{grad } V$ (recordemos que $\text{div grad} = \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$). Como se sabe, a equação diferencial (7) em V , chamada *equação de POISSON* (ou de LAPLACE, se $\rho = 0$ no domínio considerado) é básica na teoria do potencial.

Em particular, se a distribuição de carga se reduz à unidade positiva de carga eléctrica colocada na origem, virá

$$\Delta V = -4\pi\delta$$

e como, neste caso, o potencial V num ponto qualquer $P(x, y, z)$ é dado por $\frac{1}{r}$, sendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (distância de P à origem), segue-se que

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r}$$

Ora esta importante fórmula, que se relaciona intimamente com o uso das funções de GREEN para a resolução dos problemas nos limites relativos à equação de LAPLACE (ou de POISSON), era naturalmente interdita em análise clássica. Circunstâncias análogas se verificam com várias outras fórmulas, algumas das quais os físicos e os técnicos não hesitaram em utilizar heurísticamente, por lhes oferecerem processos bastante mais cómodos e intuitivos que os clássicos.

Todavia, nos exemplos apresentados da densidade ρ , a sistematização rigorosa já era possível, antes da teoria da distribuição, mediante a noção de medida, que intervém no integral de STIELTJES, e que tinha igualmente permitido uma estruturação racional da mecânica e do cálculo das probabilidades. Na verdade, trata-se aí apenas de distribuições muito especiais, chamadas *medidas*, de que é um exemplo típico a distribuição de DIRAC ⁽¹⁾. Assim, são medidas as *distribuições de massa* (ou de *matéria*),

⁽¹⁾ Na teoria das distribuições, uma medida sobre a recta R é toda a distribuição que se pode exprimir como derivada $f'(x)$ (generalizada) de uma função $f(x)$ de variação limitada em todo o intervalo finito. Esta definição estende-se facilmente a R^n .

consideradas em mecânica, e são medidas as *distribuições de probabilidade*.

Mas ainda na teoria electromagnética vamos encontrar exemplos concretos de distribuição que não são medidas: tal é por exemplo o caso dos dipolos, dos multipolos, dos folhetos magnéticos, etc.

Por exemplo, um dipolo eléctrico costuma ser definido como o sistema de duas cargas eléctricas q e $-q$, «infinitamente grandes», colocadas a uma distância d «infinitamente pequena», de tal modo que o momento eléctrico qd tenha um valor «finito» m . Para o físico, habituado a uma linguagem provisória de aproximação, e familiarizado com os modelos concretos a que se refere essa linguagem, esta «definição» e outras análogas não criam dificuldades. Porém, desde que se torne necessário um tratamento matemático rigoroso do assunto, a situação muda radicalmente de aspecto. Ora SCHWARTZ mostrou que os dipolos (eléctricos ou magnéticos), assim como os multipolos, só têm existência matemática, não contraditória, no quadro das distribuições, interpretados mediante derivadas da distribuição de DIRAC.

Para se avaliar o interesse destas noções, basta observar que as formas típicas elementares de emissão ou de recepção de ondas electromagnéticas são esquematizadas pelo *dipolo eléctrico variável*, chamado *oscilador de Hertz* (elemento de antena linear aberta) e pelo *dipolo magnético variável* (elemento de antena circular fechada). Assim se pode entrever o papel essencial da teoria das distribuições no estudo da equação das ondas, bem como de outros tipos de derivadas parciais.

Notemos ainda que o momento de um dipolo costuma ser definido, de preferência, como um vector \mathbf{m} , com determinada direcção e sentido. Assim se nos apresenta um primeiro exemplo de distribuição vectorial, para além do quadro das distribuições escalares até agora consideradas. Outro exemplo nos é dado, no electromagnetismo, pelo vector \mathbf{J} , *densidade de corrente*, nos casos em que se consideram condutores filiformes, ou ainda no caso limite de um condutor cilíndrico perfeito, em que, pelo *efeito pelicular*, em campos rapidamente alternados, toda a corrente se distribui à superfície. Mais ainda, a análise tensorial dos campos, em situações análogas, conduz a uma nova generalização do conceito da distribuição: a do conceito de *corrente* ou *forma diferencial-distribuição*, introduzido pelo matemático suíço GEORGE DE RHAM.

Note-se porém que não é nos domínios clássicos da física, nem mesmo talvez no da mecânica quântica, que a necessidade da teoria das distribuições se faz sentir de maneira imperiosa: é na teoria quântica dos campos, nomeadamente na electro-dinâmica quântica, em que surgem sérias dificuldades no tratamento analítico de entidades paradoxais, situadas inteiramente fora dos quadros clássicos da análise matemática.

Aí, sim, a teoria das distribuições é chamada a desempenhar um papel preponderante.

Mas seja qual for o êxito que esta teoria venha a ter nesse domínio (e ainda é cedo para formular juízos de valor), o que já não pode ser negada é a sua intervenção essencial no estudo das equações em derivadas parciais (lineares). Na verdade, como se pode depreender dos exemplos anteriores, *as distribuições estão de certo modo para as equações diferenciais lineares (e para outras equações funcionais) como os números imaginários estão para as equações algébricas*. Especialistas das equações diferenciais estão cada vez mais a apresentar os seus resultados em termos de distribuições, visto que, para evitar esse recurso, teriam de empregar rodeios cada vez mais incômodos e inúteis, fugindo à natureza da questão. E pode-se desde já considerar substancial e decisiva a contribuição de SCHWARTZ e dos seus discípulos (especialmente MALGRANGE e LIONS) para o progresso da teoria das equações em derivadas parciais, com o uso das distribuições.

Como é sabido, entre os instrumentos analíticos mais usados por matemáticos, físicos e engenheiros no estudo de equações diferenciais lineares, figuram a série e o integral de FOURIER e a transformação de LAPLACE. Mas trata-se aí de integrais impróprios, que os físicos e os técnicos costumam usar com um à-vontade e uma liberdade desconcertantes, em vivo contraste com o grau de subtileza e complexidade com que, em volumosos tratados, são estabelecidas matematicamente as respectivas condições de convergência e aplicabilidade, no quadro de uma análise mais ou menos clássica. Recordemos, por exemplo, uma das formas da transformação de FOURIER, para as funções $f(x)$ de uma só variável

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

Aqui f é a função dada e F a função que se obtém aplicando a f a transformação de FOURIER. Para que este integral impróprio seja convergente *no sentido usual*, é necessário (mas não suficiente) que a função $f(x)$ seja limitada sobre toda a recta. Ora acontece que, em questões de física teórica, se tem usado com frequência, e com êxito, o integral de FOURIER a funções $f(x)$ não limitadas, de crescimento polinomial, isto é, para as quais existem constantes positivas M e α tais que

$$|f(x)| < M|x|^\alpha, \text{ qualquer que seja } x.$$

Um dos vários aspectos da obra de SCHWARTZ em mostrar que, nesses casos, o integral de FOURIER converge, *num sentido generalizado*, para uma distribuição, e em determinar, exactamente a classe das distribuições às quais se aplica a transformação de FOURIER e a sua inversa, dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} F(t) dt.$$

Essa classe é constituída pelas distribuições que se exprimem como derivadas generalizadas, de ordem finita, das funções contínuas de crescimento polinomial. SCHWARTZ

crescimento lento ou distribuições temperadas.

Note-se que já a transformada de FOURIER da *função constante* 1 é a distribuição $2\pi\delta$ e que, de um modo geral, a transformada de FOURIER de x^k com k inteiro, é $2\pi(-i)^k \delta^{(k)}$.

Com esta ideia providencial de SCHWARTZ

de FOURIER simplificou-se de maneira surpreendente, ao mesmo tempo que se alargou consideravelmente o seu campo, de modo a permitir controlar os raciocínios temerários dos físicos, que causavam calafrios aos matemáticos circunspectos...

Destino análogo tiveram a série de FOURIER e a transformação de LAPLACE. Como é sabido, a transformação de LAPLACE intervém de modo essencial no *cálculo simbólico dos electrotécnicos*, que, desde HEAVISIDE, não hesitaram perante os mais heteróclitos métodos heurísticos de cálculo e de raciocínio, para a resolução das equações e dos sistemas de equações diferenciais que descrevem o regime dos circuitos eléctricos ⁽¹⁾. Entre esses métodos, figurava já o uso da distribuição δ e suas derivadas, às quais os electrotécnicos chamavam *funções impulsivas*, por esquematizarem impulsos de corrente com que estão bastante familiarizados, e *que vêem, positivamente, desenhar-se no mostrador de um oscilógrafo*. E assim, no uso da transformação de LAPLACE, deixaram a porta aberta a essas e outras entidades bizarras, que depois vieram a chamar-se distribuições ⁽²⁾.

(1) Aos matemáticos que lhe pediam uma teoria do seu cálculo simbólico, HEAVISIDE respondia que, para digerir o almoço, não precisava de conhecer a teoria da digestão... Mas a verdade é que o método, para poder ser usado e desenvolvido em condições de segurança, necessitava de uma fundamentação teórica, que só a transformação de LAPLACE e a teoria das distribuições lhe poderiam dar.

(2) Note-se que os electrotécnicos também usaram (e usam) a transformação de FOURIER, com idêntica liberdade. Assim, é frequente aplicarem esta transformação a fun-

Por diversas vezes temos aqui tomado para exemplo a distribuição δ e as suas derivadas. Não há sòmente razões históricas para isso: a pseudo-função de DIRAC desempenha um papel fundamental em toda a teoria das distribuições. Na verdade, quando DIRAC introduziu esta distribuição no seu trabalho «*The physical interpretation of the Quantum Dynamics*» foi para obter a seguinte fórmula de representação das funções (e distribuições), deduzida mediante audaciosas considerações intuitivas ⁽¹⁾:

$$(8) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-t) f(t) dt,$$

em que $\delta(x-t)$ é a distribuição de DIRAC relativa ao ponto t . Daqui deduziu ainda, com idêntica desenvoltura:

$$f^{(p)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(p)}(x-t) f(t) dt, \quad \text{para } p = 1, 2, \dots$$

Como é óbvio, estas fórmulas só podem ser legitimadas correctamente no âmbito da teoria das distribuições. *Mais ainda, veio a reconhecer-se que a fórmula integral (7) de DIRAC desempenha na teoria das distribuições um papel inteiramente análogo ao que é desempenhado, na teoria das funções analíticas, pela célebre fórmula integral de CAUCHY:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} d\lambda.$$

E assim, às muitas perspectivas fascinantes abertas pela teoria das distribuições, vem juntar-se esta outra: a das suas relações — que é de esperar venham a ser fecundas — com a teoria das funções analíticas, de uma ou mais variáveis complexas.

Este artigo já vai longo e ainda nos resta dizer algo sobre as diversas orientações que têm surgido, para desenvolver a teoria das dis-

ções periódicas, para as quais era interdito o uso de tal transformação. Neste caso, o resultado é uma distribuição do tipo $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta_n$, formada por massas discretas a_n , colocadas nos pontos $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sendo 1 o período da função dada e $a_0, a_1, a_2, \dots, \dots a_{-1}, \dots$ os coeficientes da sua série de FOURIER.

(1) Para maior simplicidade, limitámo-nos aqui ao caso das funções de uma só variável, embora esta fórmula se estenda, com aspecto análogo, às funções de n variáveis.

tribuições. Com efeito, há outras formas da teoria além da que foi escolhida pelo seu criador, a quem se deve, não só a ideia da primeira sistematização, mas também a maior parte dos resultados importantes conseguidos neste campo. Porém, na nossa opinião e na de outros autores, não é esta porventura a orientação mais acessível, ou pelo menos a mais recomendável para físicos e para técnicos, porquanto as intuições usadas por estes ficam ali semi-ocultas por métodos de análise funcional pouco elementares. É contudo evidente que isto em nada diminui o mérito da obra de SCHWARTZ, cuja preocupação dominante tem sido a de desenvolver o mais possível a teoria e não a de simplificar os seus fundamentos ⁽¹⁾.

Em 1953, o jovem matemático alemão H. KÖNIG propôs, na sua tese de doutoramento, uma nova forma da teoria das distribuições, que tem carácter mais elementar e directo, isto é, mais próximo das considerações heurísticas dos físicos e dos técnicos na sua pureza intuitiva, sem contudo deixar de ser impecável do ponto de vista do rigor lógico. A ideia essencial que orientou KÖNIG nesta sistematização é semelhante à que presidiu, historicamente, à introdução dos números imaginários:

Convencionando que as expressões do tipo $\sqrt{-a}$, em $a > 0$, representam novos entes a que se dá o nome de *números imaginários puros*, e submetendo estes, juntamente com os números reais, às regras de cálculo mais frequentes (propriedades formais das operações aritméticas), é-se conduzido a expressões do tipo $a + b\sqrt{-1}$, que se diz representarem *números complexos* (imaginários se $b \neq 0$, reais se $b = 0$). Ora estas convenções são logicamente aceitáveis, desde que o cálculo com as novas expressões, baseado na referida conservação de propriedades operatórias, *não conduza a contradição*; e consegue-se demonstrar que assim sucede, efectivamente, interpretando cada número complexo $a + bi$ como sendo, *por exemplo*, o par ordenado (a, b) de números reais. Verifica-se então que a extracção de raiz quadrada, que no campo real era *impossível* para os números negativos, passa a ser *sempre possível* no campo dos números complexos.

Consideremos agora, em vez de números, por exemplo, funções $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etc., definidas e contínuas em toda a recta R (para funções de mais de uma variável as considerações são análogas). Pode acontecer (e acontece geralmente) que não exista, no *sentido usual*, a primeira derivada de g , a segunda derivada de h , etc. Deste modo, expressões tais como g' , h'' , $f + g'$, $f + g' + h''$, etc., deixam de ter

⁽¹⁾ SCHWARTZ define as distribuições como *funcionais lineares contínuos* em certos espaços de funções indefinidamente deriváveis.

significado, *segundo as definições usuais*. Mas nada nos impede de convencionar que tais expressões representam novos entes, chamados *distribuições*, e torná-las objecto de um cálculo bem definido, baseado na conservação de regras fundamentais de derivação, tais como: *a derivada de uma soma é a soma das derivadas, se a derivada de uma função é nula a função reduz-se a uma constante*, etc. KÖNIG demonstrou, precisamente, que esse cálculo não conduz a contradição (por um processo semelhante ao da definição de números complexos por meio de pares) e demonstrou que a teoria assim construída é equivalente à teoria das distribuições de SCHWARTZ ⁽¹⁾.

Esta possibilidade de construir a teoria das distribuições de formas diferentes (embora equivalentes) não nos deve surpreender, porquanto o mesmo sucedeu com a teoria dos números. Por exemplo, os números reais podem ser definidos por meio de «cortes» ou classes contíguas complementares de números racionais (orientação de DEDEKIND), por meio de sucessões regulares de números racionais (orientação de CANTOR), como operadores ou medidas de grandezas contínuas (método sintético), ou ainda por outros processos, *todos eles equivalentes entre si*; e análogamente para os números complexos. Ora (como observou SCHWARTZ numa das suas conferências de Lisboa) uma vez definidos os números reais e estabelecidas as respectivas *regras fundamentais de cálculo* (isto é, as *propriedades formais das operações* neste campo), o que intervém depois sempre, nos cálculos e nos raciocínios, ao trabalhar com os números reais, não é a maneira particular como foram definidos, mas sim as referidas *regras de cálculo* — comparáveis às *regras de um jogo*, que são condição necessária e suficiente para que este possa ser jogado. Assim também, na teoria das distribuições, o que interessa essencialmente é conhecer um conjunto de *regras fundamentais de cálculo* (a que podemos chamar *axiomas*), das quais seja possível deduzir depois todas as outras regras (ou *teoremas*) da teoria. *Por conseguinte, a definição efectiva das entidades distribuições, por qualquer processo particular, serve unicamente para provar que tal conjunto de regras fundamentais (ou axiomas) não é contraditório.*

(1) Na realidade, KÖNIG considerou, em vez de funções contínuas f, g, \dots , funções localmente integráveis, mas isso é desnecessário, pois que, como se observou atrás, tais funções podem ser comodamente interpretadas como derivadas de funções contínuas.

Como também já se disse atrás, não faz sentido, em geral, falar de *valor de distribuição* num dado ponto x ; o que se pretende generalizar é o conceito de *função derivada* f' , considerada como um todo, e não o de *derivada num ponto*.

Restava porém saber qual o conjunto de regras que se podem assumir como fundamentais na teoria das distribuições, isto é, *restava definir axiomáticamente as distribuições*. Em 1954 foi dada em [17] ⁽¹⁾, pelo autor destas linhas, uma primeira definição axiomática das distribuições, que é portanto a síntese de todas as possíveis definições particulares, como a de SCHWARTZ, tar-se. Para se ter uma primeira ideia do que seja essa axiomática, enunciamos em seguida os axiomas num caso particular — o das distribuições de uma só variável x , definidas num intervalo limitado e fechado $J = [a, b]$ da recta:

AXIOMA 1

tínua no intervalo J, é uma distribuição ⁽²⁾.

AXIOMA 2 — *Dadas duas distribuições U e V definidas em J, existe sempre uma distribuição, chamada soma de U com V, que se representa por $U + V$, tal que: se U e V são funções contínuas, $U + V$ é a soma dessas funções no sentido usual.*

AXIOMA 3 — *Para toda a distribuição U definida no intervalo J, existe uma distribuição definida em J, que se chama derivada de U e se representa por DU (ou por U'), de tal modo que: I) se U é uma função que admite derivada contínua em J, no sentido usual, DU é essa função derivada; II) quaisquer que sejam as distribuições U e V em J, tem-se $D(U + V) = DU + DV$; III) se $DU = 0$, a distribuição U reduz-se necessariamente a uma constante no intervalo J.*

AXIOMA 4 — *Para toda a distribuição U em J, existe uma função f contínua em J e um número natural n, tais que $U = D^n f$, sendo $D^n f$ a derivada da ordem n de f, isto é, o resultado de aplicar n vezes sucessivas a operação D a f.*

Note-se como a própria axiomática sugere imediatamente uma representação (e portanto uma construção) dos entes distribuições. Com efeito, pelo axioma 4, toda a distribuição U se pode escrever sob a forma

(1) Os números entre colchetes referem-se às indicações bibliográficas, apresentadas no fim deste artigo.

(2) Para comodidade de linguagem, chama-se também distribuições às funções contínuas. Haverá por isso distribuições que são funções contínuas e outras que o não são; entre estas últimas, algumas são identificáveis a funções localmente somáveis (definidas a menos de um conjunto de medida nula).

$U = D^n f$, sendo f uma função contínua e n um número natural. Então, para achar a soma $U + V$ de duas distribuições $U = D^n f$ e $V = D^m g$, procede-se do seguinte modo:

1) Se $m = n$, bastará aplicar repetidas vezes a condição II do axioma 3, o que dá:

$$U + V = D^n f + D^n g = D^n (f + g).$$

2) Se $m \neq n$, sendo por exemplo $m > n$, podemos reduzir este caso ao anterior, escrevendo U sob a forma $U = D^m F$, em que F é uma primitiva da ordem $m - n$ de f (processo semelhante ao da redução de duas frações ao mesmo denominador).

A derivada de $U = D^n f$ será simplesmente a distribuição $DU = D^{n+1} f$.

Analogamente se deduz dos axiomas (usando em especial a condição III do axioma 3) o seguinte critério de igualdade: para que se tenha $D^n f = D^n g$ é necessário e suficiente que a diferença entre f e g seja um polinômio de grau inferior a n .

E assim se vai definindo progressivamente o cálculo das distribuições no intervalo J , sendo fácil ver que não conduz a contradição (1). Em particular, pode reconhecer-se que o conjunto das distribuições em J constitui um *módulo*, isto é, um grupo comutativo relativamente à adição assim definida.

Aos anteriores axiomas juntam-se duas definições fundamentais: a de «produto duma função por uma distribuição» e a de «limite duma sucessão de distribuições».

A definição de produto de uma função φ (que admita derivada contínua até certa ordem) por uma distribuição U é dada de modo a conservar a regra de derivação do produto. Seja por exemplo $U = Df$ e suponhamos que φ admite derivada contínua de 1.^a ordem. Então, pela referida regra, tem-se

$$D(\varphi f) = \varphi \cdot Df + D\varphi \cdot f$$

donde

$$\varphi U = \varphi \cdot Df = D(\varphi f) - \varphi' f.$$

(1) Para isso basta seguir um caminho perfeitamente análogo ao da *teoria analítica dos números racionais*: cada distribuição U é interpretada como sendo uma classe de pares (n, f) , formados por um número natural n e por uma função contínua f , e as operações de adição e de derivação são definidas entre essas classes de tal modo que se verifica depois ser $U = D^n f$, tendo-se identificado f à classe dos pares a que pertence $(0, f)$.

Anàlogamente se reconhece que

$$\varphi D^2 f = D^2(\varphi f) - 2D(\varphi' f) + \varphi'' f$$

e assim por diante.

Consegue então demonstrar-se, por exemplo, que o conjunto das distribuições em J é um *módulo sobre o anel das funções φ indefinidamente deriváveis nesse intervalo*.

A definição de limite duma sucessão de distribuições (da qual se deduz, entre outras, uma definição de integral para distribuições) é dada de modo a englobar, como caso particular, a noção de limite de sucessões uniformemente convergentes de funções e de modo que se verifique a seguinte propriedade

$$D(\lim U_n) = \lim(DU_n),$$

(permutabilidade dos símbolos de limite e de derivação), *que não se verificava entre as funções*. Mais precisamente, diz-se que uma sucessão de distribuições U_n converge no intervalo J para uma distribuição V , quando todas as distribuições U_n sejam derivadas de uma mesma ordem, $U_n = D^p f_n$, de uma sucessão de funções f_n contínuas que convergem uniformemente em J para uma função g tal que $V = D^n g$.

Note-se que esta definição sugere um outro modo de introduzir as distribuições: como limites generalizados de certas sucessões de funções (do mesmo modo que os números irracionais se podem definir mediante certas sucessões de números racionais). Esta modalidade de construção das distribuições foi assinalada pelo autor destas linhas em [17] e, independentemente, por KOREVAAR e por MIKUSIŃSKI (para distribuições de uma só variável). Recentemente, foi publicado uma introdução à teoria das distribuições, baseada neste método, da autoria de MIKUSIŃSKI e SIKORSKI [11], que então ainda ignoravam e que na mesma direcção se tinha apresentado, com maior generalidade, em [17].

Todavia este método, embora mais intuitivo e mais agradável aos físicos (que diversas vezes o têm usado de maneira *empírica*) é menos cómodo e directo que o da simples representação das distribuições como derivadas formais de funções contínuas em intervalos limitados.

Para terminar, vamos ilustrar o que acaba de ser dito, mostrando como a distribuição δ de DIRAC pode ser representada pelos dois processos. Para maior simplicidade, limitar-nos-emos ao caso de uma só variável.

Costuma chamar-se *função de HEAVISIDE* à função $H(x)$ assim definida, *fora da origem*:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ 1, & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Trata-se, como se vê, de uma função descontínua na origem, onde apresenta o salto 1. Consideremos por exemplo um movimento em que a equação das velocidades seja precisamente

$$v = H(t).$$

Quer isto dizer que, antes do instante $t=0$, a velocidade é nula (repouso) e que, depois desse instante, o móvel entra bruscamente em movimento uniforme, com velocidade 1 (fig. 1). Supondo que a massa do móvel é também 1, a força f capaz de produzir esse movimento deveria ser, segundo a definição clássica

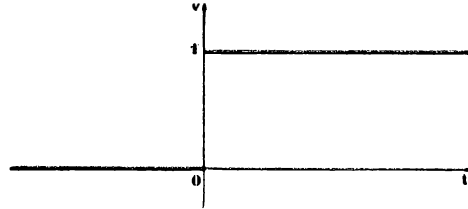


Fig. 1

$$f = \frac{dv}{dt} = H'(t),$$

devendo ter-se, por outro lado, para $a < 0 < b$:

$$\int_a^b H'(t) dt = H(b) - H(a) = 1 - 0 = 1.$$

Em conclusão: esta força, «função» do tempo, deveria ser *nula* para $t \neq 0$, mas *infinita* no instante $t=0$, de modo que o *impulso* da mesma entre um instante $a < 0$ e um instante $b > 0$ fosse igual a 1. Considerações intuitivas como esta levaram a admitir a igualdade

$$\delta = H' = DH,$$

como uma das possíveis definições da «função» (aliás distribuição) δ , no caso de uma só variável.

A função $H(x)$ não é contínua, mas é-o já a sua primitiva

$$G(x) = \int_0^x H(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

e, como $H = G'$, podemos apontar, como definição *correcta* de δ , a seguinte

$$\delta = G'' \quad \text{ou ainda} \quad \delta = D^2 G.$$

É fácil ver, atendendo à axiomática das distribuições, que se tem também

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} |x|,$$

visto que, como se pode reconhecer,

$$\frac{d}{dx} |x| = 2H(x) - 1.$$

A fig. 2 mostra o gráfico da função $cH(x-a)$, com a e c constantes; a sua derivada será então

$$\frac{d}{dx} [cH(x-a)] = c \frac{d}{dx} H(x-a) = cH'(x-a) = c\delta_a,$$

em que δ_a representa a *distribuição de DIRAC relativa ao ponto a*.

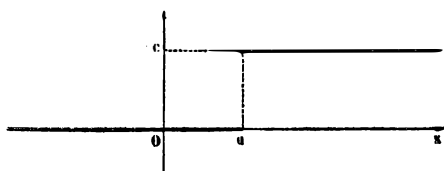


Fig. 2

Vejam agora de que modo a distribuição δ pode ser concebida como limite de uma sucessão de funções indefinidamente deriváveis.

Aplicando um «diferenciador» a impulsos rectangulares de corrente, do tipo da função de HEAVISIDE

(que se desenham com impressionante nitidez no mostrador dum oscilógrafo), vêem-se «nascer» distribuições de DIRAC, de maneira bem sugestiva, como *casos limites* de funções de tipo gaussiano afilado. É por isso que os *electrotécnicos se habituaram a considerar estas e outras distribuições como entidades naturais, que vêm aproximadamente realizadas no mundo físico.*

Vamos agora ver como estas intuições podem ser traduzidas em termos matemáticos rigorosos. Consideremos por exemplo a sucessão de funções

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Os gráficos destas funções são curvas em forma de sino (como a curva de GAUSS) que se alteiam e estreitam cada vez mais junto do eixo

dos y , tendendo a confundir-se com o eixo dos x nos outros pontos (fig. 3). Mais precisamente, tem-se, como é fácil ver:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{se } x=0 \\ 0, & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Além disso, também se pode reconhecer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = 1$, se $a < 0 < b$. Assim, quando n é bastante elevado (por exemplo $n = 10000$), a função $\varphi_n(x)$ parece aproximar-se bastante daquilo a que os físicos chamaram «função de DIRAC» — visto que, nesse caso, a função $\varphi_n(x)$ é praticamente infinita para $x=0$, praticamente nula para $x \neq 0$, e o seu integral num intervalo $[a, b]$, não demasiado pequeno, que contenha a origem, é sensivelmente igual a 1. Vamos ver que $\varphi_n(x)$ converge efectivamente para δ , em todo o intervalo limitado, segundo a definição rigorosa atrás formulada.

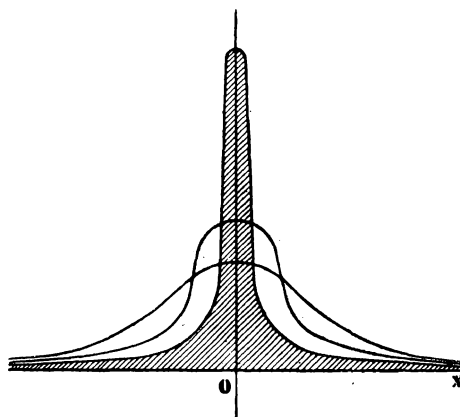


Fig. 3

Tem-se, como é fácil ver:

$$\int_{-\infty}^x \varphi_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \arctan nx + \frac{1}{2}.$$

Se representarmos por $\Phi_n(x)$ esta nova função, será evidentemente $\varphi_n = D\Phi_n$; no sentido usual, para todo o n , e tem-se

$$\lim \Phi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ 1/2, & \text{para } x = 0 \\ 1, & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Portanto, $\Phi_n(x)$ converge para a função de HEAVISIDE, $H(x)$, em todo o ponto x diferente de 0. Se pusermos ainda

$$F_n(x) = \int_0^x \Phi_n(t) dt$$

teremos, para todo o n , no sentido usual:

$$\Phi_n = D F_n, \quad \varphi_n = D \Phi_n = D^2 F_n$$

e prova-se facilmente que a sucessão de funções $F_n(x)$ converge uniformemente, em qualquer intervalo limitado, para a função $G(x)$ (atrás definida). E como $\Phi_n = D^2 F_n$ e $\delta = D^2 G$, segue-se que a sucessão de funções φ_n converge, em todo o intervalo limitado, para a distribuição δ , no sentido atrás precisado.

Assim, a distribuição δ aparece-nos representada, correctamente, como limite de funções φ_n não só contínuas, mas até indefinidamente deriváveis, tendo-se portanto representações análogas para todas as suas derivadas:

$$\delta' = \lim \varphi_n', \quad \delta'' = \lim \varphi_n'', \quad \text{etc.}$$

Como é natural prever, a distribuição δ pode ser representada como limite não só desta, mas de infinitas outras sucessões de funções.

As distribuições de mais de uma variável podem definir-se de maneira análoga, embora com maior dificuldade, considerando, em vez das derivadas totais, as derivadas parciais em relação às diversas variáveis.

A teoria das distribuições encontra-se hoje em plena fase de crescimento. É, como se vê, uma teoria jovem, situada na fronteira do conhecimento.

Para ela me é grato chamar a atenção dos jovens estudiosos portugueses, interessados em tentar fazer investigação no campo da matemática ou da física teórica, com aplicação dos mais modernos recursos da análise. Estou convencido de que esta teoria, com as variadas e amplas perspectivas que veio abrir, é um filão precioso, onde muito haverá ainda que explorar.

ALGUMAS INDICAÇÕES BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P. A. M. DIRAC — *Principles of quantum mechanics*. Oxford, 1930.
- [2] — *The physical interpretation of the quantum dynamics*. Proceedings of the Royal Society of London, ser. A, 113, pp. 621-641 (1926-27).
- [3] A. C. DE FREITAS — *Sur les distributions qui interviennent dans le calcul symbolique des électrotechniciens*. Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa, 2.^a série A. 1955.
- [4] — *A teoria das distribuições e o cálculo simbólico dos electro-técnicos no caso dos circuitos de constantes concentradas*. Dissertação. 1956.
- [5] H. G. GARNIR — *Les problèmes aux limites de la physique mathématique*. Birkhäuser Verlag, Basileia, 1958.

- [6] I. HALPERIN — *Introduction to the theory of distributions*. Toronto, 1952.
- [7] O. HEAVISIDE — *Electromagnetic theory*. Londres, 1922.
- [8] W. HEITLER — *The quantum theory of radiation*. Oxford, 1954.
- [9] H. KÖNIG — *Neue Begründung der Theorie der "Distributionen" von L. Schwartz*. Mathematische Nachrichten, 1953.
- [10] J. L. LIONS — *Problèmes aux limites en théorie des distributions*. Thèse. Acta Mathematica. 1955.
- [11] J. MIKUSINSKI — R. SIKORSKI — *The elementary theory of distributions* (I). Var-sóvia, 1957.
- [12] J. SANTOS GUERREIRO — *Les changements de variable en théorie des distribu-tions* I. Portugaliae Mathematica. 1957.
- [13] L. SCHWARTZ — *Théorie des distributions* I. Paris, 2.^a ed. 1957.
- [14] — *Théorie des distributions* II. Paris, 1951.
- [15] — *Méthodes mathématiques de la physique*. Cours de la Sorbonne. Paris, 1956.
- [16] — *Problèmes aux limites pour l'équation des ondes*. Séminaire Sch-wartz. 1956.
- [17] J. SEBASTIÃO E SILVA — *Sur une construction axiomatique de la théorie des dis-tributions*. Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa. 1954-1955.
- [18] — *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*. Portugaliae Mathematica. 1955.
- [19] — *Introdução à teoria das distribuições*. Centro de Estudos Matemáticos do Porto. 1956-1957.
- [20] — *Sur la définition et la structure des distributions vecto-rielles*. Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa. 1958.