

J. SEBASTIÃO E SILVA
DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

As séries de multipolos em física e em matemática

Comunicação apresentada à Classe de Ciências
na sessão de 10 de Maio de 1962



LISBOA
1962

Separata do Boletim da Academia das Ciências de Lisboa
—Volume XXXIV—Maio a Julho de 1962

Desnecessário será acentuar a importância da acção recíproca que, entre a matemática e a física, se tem vindo a exercer desde os primórdios do cálculo infinitesimal, com Galileu e Newton. Todavia, não raros são hoje os matemáticos e os físicos que, fechando os olhos à evidência de um exemplo histórico, cuja validade persiste há cerca de três séculos, se entreolham com mal disfarçado desdém, receando uns que a essência etérea da matemática possa macular-se no simples contacto com as realidades materiais, e pensando os outros que a física deya desvincular-se inteiramente de tudo o que consideram, tantas vezes injustamente, como «inúteis subtilidades matemáticas de tipo escolástico». E, enquanto os segundos proclamam a independência da física com o vigor persuasivo da bomba atómica, os primeiros, encerrados cada vez mais num esplêndido isolamento, sorriem com ironia à espécie de benefícios que a física está oferecendo à humanidade.

Nem uns nem outros estão, ao que parece, no bom caminho. O espírito do Renascimento foi, neste e em outros sentidos, bem mais aberto, desempoeirado e construtivo — numa palavra, mais humano — preceituando que o progresso científico assenta na harmonia da razão com a experiência, e evitando toda a forma de *parti pris* nos métodos de investigação. Muitos dos grandes matemáticos de outrora foram ao mesmo tempo grandes físicos, e reciprocamente. Hoje, é a divisão do trabalho, a necessidade de especialização imposta pelo desenvolvimento, de certo modo mons-

truoso, da ciência, que gera as desinteligências referidas. Desinteligências que não se verificam apenas, aí de nós, entre matemáticos e físicos.

* * *

É bem sabido como grande parte das noções e das teorias matemáticas são a contrapartida de intuições físicas. Os vectores, as matrizes, os tensores, os espinores, as geometrias de Riemann, etc. etc. são exemplos conhecidos desse facto. A dura disciplina dos formalismos matemáticos torna-se indispensável, não só para economia de pensamento, mas ainda, e principalmente, como armadura lógica que permita livrar o espírito de um emaranhado de especulações confusas e contraditórias, em que a intuição física, sem mais recursos, acabaria por soçobrar.

Há cerca de 18 anos surgiu uma nova teoria matemática — a teoria das distribuições de L. Schwartz — para dar conta de certos processos do cálculo e de raciocínio, que antes disso eram usados correntemente por físicos e por técnicos, de modo mais ou menos aventuroso, sem qualquer fundamento racional. Um exemplo elementar de distribuição é a entidade a que, imprópriamente, se chamou «função de Dirac». A função de Dirac relativa a um ponto a do espaço R^n seria a função $\delta(x - a)$ igual a $+\infty$ para $x = a$, igual a 0 para $x \neq a$ e cujo integral numa vizinhança qualquer de a fosse igual a 1 (para fixar ideias, vamos supor que é 3 o número n de dimensões do espaço considerado). Um exemplo típico concreto de função de Dirac seria a função densidade da distribuição de matéria constituída por um único ponto material de massa 1, isolado no espaço.

Não tiveram grande dificuldade os matemáticos em provar que não existe nenhuma função nestas condições. A teoria das medidas de Radon e do integral de Lebesgue - Stieltjes permitiram interpretar correctamente esta e outras intuições análogas que se apresentam não só em física (mecânica, electromagnetismo, etc.) como ainda no cálculo das probabilidades. A chamada «função de Dirac» vem a ser, precisamente, uma medida de Radon e não uma função.

Porém, os físicos consideram, além destas, outras entidades que já não é possível interpretar como medidas: os dipolos ou, mais geralmente, os multipolos, eléctricos ou magnéticos, os sistemas constituídos por cargas distribuídas em folhetos de duas ou mais camadas, etc. Tais distribuições de cargas, concebidas de modo intuitivo, sem base racional, só puderam encontrar uma interpretação matemática correcta, no conceito de distribuição de L. Schwartz.

Por exemplo, segundo os físicos, um dipolo eléctrico seria, por assim dizer, o limite do sistema constituído por duas cargas eléctricas pontuais simétricas, $+q$ e $-q$, que, sobre uma recta, tendem para um mesmo ponto, enquanto a sua intensidade q tende para ∞ , de tal modo que o produto ql de q pela distância l das cargas tende para um limite finito p (momento escalar); o *momento vectorial* do dipolo seria então o limite do produto de q pelo vector com origem na carga negativa e extremidade na carga positiva. Porém, tal limite não existe *como medida*; para ter uma ideia da sua interpretação como distribuição, suponhamos a carga $-q$ situada na origem das coordenadas e a carga q no ponto definido pelo vector de posição lv , sendo v um vector unitário constante; nestas condições, o sistema das suas cargas é representado pela medida $q \delta(x-lv) - q \delta(x)$; então, supondo que o pro-

duto $q l$ tende para um limite finito p quando $l \rightarrow 0$, pode afirmar-se, com base na teoria das distribuições, que a medida

$$q \delta(x - l v) - q \delta(x) = q l \frac{\delta(x - l v) - \delta(x)}{l},$$

quando $l v$ tende para uma distribuição, que é precisamente o produto de p pela derivada direccional de $\delta(x)$ segundo o vector $-v$; isto é, em símbolos:

$$\lim_{l \rightarrow 0} q l \frac{\delta(x - l v) - \delta(x)}{l} = -p \frac{\partial \delta(x)}{\partial v}$$

Pondo $x = (x^1, x^2, x^3)$ e $v = (v^1, v^2, v^3)$ o dipolo será representado, mais explicitamente, por

$$-p (v^1 D_1 + v^2 D_2 + v^3 D_3),$$

onde $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ para $i = 1, 2, 3$.

Dum modo geral, o dipolo de momento vectorial $p v$, que tem por *suporte* um ponto a qualquer do espaço, será a distribuição

$$-p \frac{\partial}{\partial v} \delta(x - a) = -p \sum_1^3 v^i D_i \delta(x - a)$$

Anàlogamente se interpretam os quadrupolos, os octupolos, etc. Por definição, o *multipolo de ordem* m , de *suporte* a e *momento escalar* p , segundo m , *vectores unitários* v_1, \dots, v_m , será a distribuição.

$$(-1)^m \frac{p}{m!} \frac{\partial^m}{\partial v_1 \partial v_2 \dots \partial v_m} \delta(x - a)$$

O emprego dos multipolos é particularmente útil na teoria do potencial, em problemas de radiação, em física nuclear, etc. Por exemplo, dois casos elementares típicos de emissão de ondas electromagnéticas, aos quais outros casos mais complexos se podem reduzir, são o do dipolo eléctrico e o do dipolo magnético, de momento escalar variável com o tempo.

Até aqui a teoria das distribuições é apta a racionalizar completamente as considerações intuitivas dos físicos dando origem a novos métodos de análise, de grande potência e comodidade.

Porém, os físicos vão mais longe, considerando séries de multipolos, isto é, expressões do tipo

$$P_0 + P_1 + \dots + P_m + \dots = \sum_1^{\infty} P_m$$

em que P_0 é o produto dum escalar por uma medida $\delta(x-a)$, e P_m , para $m=1, 2, \dots$, é, em geral, uma soma de multipolos de ordem m de suporte a . Assim, uma série de multipolos de suporte a será, mais explicitamente, toda a expressão do tipo

$$\sum_{i_1+i_2+i_3=0}^{\infty} c_{i_1, i_2, i_3} D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} \delta(x-a)$$

Ora, exceptuado o caso trivial em que os termos se anulam a partir de certa ordem, uma tal série nunca é convergente, segundo a teoria das distribuições. Portanto, para uma interpretação matemática correcta das séries de multipolos, torna-se indispensável introduzir novas entidades, além das distribuições.

Diversas generalizações do conceito de distribuição têm sido propostas, conforme o fim em vista. Às distribuições e entidades análogas dão os cientis-

tas russos Sobolev, Gelfand, Scilov, Bogoliubov e outros o nome genérico de *funções generalizadas*.

Pela minha parte, tive ocasião de apresentar em 1957 uma teoria de funções generalizadas a que dei o nome de *ultra-distribuições* (para o caso de uma só variável). Essa teoria, que foi estendida pelos japoneses Morisuki Hasumi e Yoshinaga ao caso de n variáveis, permite, em particular, fazer um estudo racional das séries de multipolos. Aliás, para este efeito, basta considerar as chamadas *ultra-distribuições de suporte limitada*, as quais são postas em correspondência biunívoca com os germes das funções analíticas $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ no ponto ∞ e que se anulam neste ponto (1). Designemos por $A_n(\infty)$ o espaço constituído pelos referidos *germes*. Então, cada elemento φ de $A_n(\infty)$ é dado, numa vizinhança de ∞ , por uma série múltipla de potências negativas das n variáveis complexas z_1, \dots, z_n :

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = 1}^{\infty} \alpha_{i_1 \dots i_n} z_1^{-i_1} \dots z_n^{-i_n}$$

(Agora n poderá ser um número natural qualquer). Primeiro que tudo é necessário indicar como se estabelece a correspondência entre as distribuições T de suporte limitado e os elementos φ de $A_n(\infty)$. Essa correspondência é dada por aquilo a que chamo «transformação de Stieltjes generalizada».

$$(1) \quad \varphi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{R^n} \frac{T(\xi)}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_n - z_n)} d\xi,$$

(1) Por comodidade designamos aqui por ∞ o ponto (∞, \dots, ∞) do espaço \hat{C}^n , sendo \hat{C} a esfera de Riemann—isto é, a reta projectiva complexa.

com $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, sendo o integral interpretado no sentido da teoria das distribuições. Escreve-se então

$$T = x_z \varphi(z) \quad \text{ou} \quad T = x \varphi$$

em que x é o operador que faz corresponder ao germe φ a distribuição T . Note-se porém que há elementos φ de $A_n(\infty)$ às quais não corresponde deste modo nenhuma distribuição; neste caso φ corresponde a uma *ultra-distribuição* (de suporte limitado), que se designa ainda pela notação $x\varphi$. Demonstra-se então o seguinte teorema:

Condição necessária e suficiente para que φ , com $\varphi \in A_n(\infty)$, seja uma distribuição é que φ seja prolongável ao complementar de R^n em C^n como função analítica de crescimento lento para R^n .

Em particular, da fórmula (1) deduz-se

$$\delta(x) = \delta(x_1, \dots, x_n) = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} x_z \frac{1}{z_1 \dots z_n}$$

e, mais geralmente,

$$D^p \delta(x - a) = \frac{(-1)^{n+|p|}}{(2\pi i)^n} x_z \frac{p_1! \dots p_n!}{(z_1 - a_1)^{1+p_1} \dots (z_n - a_n)^{1+p_n}}$$

com $p = (p_1, \dots, p_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Nesta ordem de ideias, a convergência das séries do tipo

$$(2) \sum_{|p|=0}^{\infty} c_p D^p \delta(x-a), \quad \text{com } |p| = p_1 + \dots + p_n$$

traduzir-se-á, mediante o conceito de convergência usualmente adoptado no espaço $A_n(\infty)$, na convergência da série

$$(3) \sum_{|p|=0}^{\infty} p_1! \dots p_n! c_p (z_1 - a_1)^{-p_1} \dots (z_n - a_n)^{-p_n}$$

Demonstra-se então o seguinte teorema:

Condição necessária e suficiente para que a série (2) seja convergente no espaço das ultra-distribuições de suporte limitado é que a série de potências de ξ_1, \dots, ξ_n

$$\sum_{|p|=1}^{\infty} p_1! \dots p_n! c_p \xi_1^{p_1} \dots \xi_n^{p_n}$$

seja convergente numa vizinhança da origem. Nesta hipótese, a soma da série (2) será a ultra-distribuição correspondente ao germe de função analítica definido por (3).

Pode acontecer, em particular, que a soma de série (2) seja uma distribuição, embora a série seja convergente apenas no sentido das ultra-distribuições. Assim sucede, por exemplo, no caso dos desenvolvimentos de distribuições de cargas em séries de multipolos, considerados pelos físicos na teoria do potencial e em problemas de radiação e de dispersão relativos à equação clássica das ondas. Mas, em geral, a soma da série não é uma distribuição, e é isto o que se verifica, correntemente, no estudo dos propagadores em teoria quântica dos campos.

Não me é possível nesta nota, necessariamente sucinta, entrar em pormenores. Devo no entanto salientar que o emprego das funções analíticas na manipulação de funções generalizadas é hoje correntemente adoptada por físicos que são ao mesmo tempo matemáticos ou colaboram com matemáticos, tais como N.N. Bogoliubov, que é um dos primeiros especialistas mundiais em teoria quântica dos campos. Este cientista, que tive ocasião de conhecer em Edimburgo por ocasião do Congresso Internacional de Matemáticos de 1958, apresentou na secção de Análise Funcional desse Congresso, juntamente com Vladimirov, uma comunicação sobre o prolongamento analítico de distribuições, relacionado com problemas de dispersão em física teórica. Na mesma secção desse Congresso apresentei uma comunicação sobre a teoria das ultra-distribuições, num momento em que ignorava ainda, em absoluto, as aplicações que esta teoria pode ter na física. Este é apenas um exemplo, entre muitos, de como a investigação fundamental, no campo da matemática pura, pode conduzir inesperadamente a resultados aplicáveis noutros campos. O que não quer dizer, de modo nenhum, que não seja indispensável estabelecer, de quando em quando, o diálogo entre matemáticos e físicos, e até, de um modo geral entre investigadores das mais diversas especialidades.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. N. BOGOLIUBOV — D. V. CHIRKOV — *Introduction à la théorie quantique des champs* (tradução). Dunod, Paris, 1960.
- [2] N. N. BOGOLIUBOV — VLADIMIROV. *On analytic continuation of generalised functions*. Congresso Internacional de Matemáticos, Edimburgo, 1958.
- [3] G. GOERTZEL — N. TRALLI. *Some mathematical methods of physics*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1960.
- [4] W. GUTTINGER. *Non local structure of field theories with non-renormalizable interaction* «II Nuovo Cimento», série X, vol. 10, p. 1-36.
- [5] M. HASUMI. *Note on the n -dimensional tempered ultra-distributions*. Tôhoku Mathematical Journal, 2.^a série, vol. 13, p. 94-104.
- [6] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*, L. 2.^a ed. Paris, Hermann, 1957.
- [7] J. SEBASTIÃO E SILVA. *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*. Mathematischen Annalen, 136 (1958) 58-96.
- [8] J. A. STRATTON. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, New York, 1941.

*Composto e impresso na
oficina «Ottoesgráfica, Ltd.ª»
Largo do Conde Barão, 50
Lisboa*