

J. SEBASTIÃO E SILVA  
DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

# Aspectos modernos do Cálculo Simbólico; suas relações com a Física e a Técnica

Comunicação à Classe de Ciências da Academia  
em sessão de 16 de Abril de 1959



LISBOA  
1959

**Separata do *Boletim da Academia das Ciências de Lisboa*  
—Volume XXXI— Março e Abril de 1959**

### Aspectos modernos do Cálculo Simbólico; suas relações com a Física e a Técnica <sup>(1)</sup>

As origens do *cálculo simbólico* ou *cálculo operacional* remontam a LEIBNIZ, que foi também, como é sabido, um dos precursores da moderna *lógica simbólica* ou *lógica matemática*. Porém, até fins do século passado, a história do cálculo simbólico reduz-se a aspectos episódicos, mais ou menos relacionados com o cálculo das diferenças finitas e com o estudo de equações diferenciais da Física Matemática. Recordaremos, de passagem, a célebre fórmula de LAGRANGE

$$(1) \quad \Delta_h f(x) = (e^{hD} - 1) f(x),$$

que relaciona o operador  $\Delta$  de diferença finita, definido por

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x),$$

com o operador  $D$  de derivação. A fórmula (1) de LAGRANGE, hoje tão familiar aos especialistas de cál-

---

(1) Nesta nota evitaram-se pormenores técnicos que a tornariam demasiado longa. O leitor interessado poderá recorrer à bibliografia indicada no final.

ções dadas e, principalmente, com a eliminação da célebre «função impulsiva»  $\delta$  e das suas derivadas. Esta «função»  $\delta$ , também utilizada por DIRAC na sua sistematização da mecânica quântica, era algo de contraditório — uma função que não era uma função; e, contudo, não se conseguia evitar essa noção estranha, sem privar o cálculo simbólico de uma das suas melhores armas. Vem a propósito citar estas palavras do grande matemático francês LAURENT SCHWARTZ : <sup>(1)</sup>

«Comment expliquer le succès de ces méthodes? Quand une telle situation contradictoire se présente, il est bien rare qu'il n'en résulte pas une théorie mathématique nouvelle qui justifie, sous une forme modifiée, le langage des physiciens; il y a même là une source importante de progrès des mathématiques et de la physique».

A nova teoria matemática que resultou desta e de outras situações contraditórias da física teórica é, como se sabe, a *teoria das distribuições* de L. SCHWARTZ, que lhe valeu a medalha de ouro no Congresso Internacional de Matemáticos 1950, efectuado em Cambridge, nos Estados Unidos. A pseudo-função  $\delta$  e suas derivadas são distribuições e não funções. Em particular, a teoria das distribuições permitiu estruturar logicamente, de maneira definitiva, o cálculo simbólico dos electrotécnicos, sem todavia o amputar, mas, pelo contrário, alargando extraordinariamente as suas possibilidades. Mas convém sublinhar que não se reduzem, de modo nenhum, ao cálculo operacional as aplicações desta teoria, criada em 1945, da qual se espera a resolução das sérias difi-

---

(1) Ver Bibliografia, [8], p. 3.

culdades matemáticas surgidas em física teórica, principalmente nas teorias quânticas dos campos electromagnético e gravitacional.

Acontece porém que, já anteriormente, LUIGI FANTAPPIÉ — com quem tivémos a feliz oportunidade de trabalhar em Roma nos anos de 1943 a 1946 — tinha aplicado a sua teoria dos funcionais analíticos à construção de um cálculo simbólico, baseado na fórmula integral de CAUCHY estendida a operadores :

$$\varphi(\Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \Theta} d\lambda$$

Nesta fórmula,  $\Theta$  é um operador linear que verifica certas condições (por exemplo, o operador de integração),  $\varphi$  uma função analítica pertencente a um espaço funcional  $\mathcal{H}$ , dependente do operador  $\Theta$ , e  $C$  um caminho de integração também dependente de  $\Theta$ . Ora este cálculo operacional, que FANTAPPIÉ generalizou ao caso de  $n$  variáveis, era por um lado muito mais geral e, por outro lado, muito mais restrito que o cálculo simbólico dos electrotécnicos, baseado na transformação de LAPLACE. Na verdade permitia, por exemplo, resolver o problema de CAUCHY para classes muito mais extensas de equações em derivadas parciais. Mas exigia, em compensação, que os dados fossem funções analíticas, lá onde, muitas vezes, o problema físico impunha funções não analíticas (por exemplo funções descontínuas ou mesmo distribuições), em casos onde o método simbólico dos electrotécnicos tinha pleno êxito. Era, além disso, mais laborioso e não permitia utilizar as tabelas da

transformação de LAPLACE, que tanta comodidade oferecem a matemáticos, físicos e técnicos.

Por isso mesmo, uma das preocupações máximas de FANTAPPIÉ durante a sua vida, infelizmente não muito longa, foi a de estabelecer a ligação entre o seu método e o cálculo simbólico dos electrotécnicos, baseado na transformação de LAPLACE. Para tanto necessitava FANTAPPIÉ de um instrumento — a teoria das distribuições (na opinião de SCHWARTZ, ele esteve bem perto de ser o criador dessa teoria).

Ora, em 1955, foi-nos possível, com o uso das distribuições, estabelecer a ligação entre os dois métodos, tão almejada por FANTAPPIÉ (ver Bibliografia [10]). Para esse efeito, o espaço  $\mathcal{H}$  das funções  $\varphi$  que entram na fórmula

$$(3) \quad \varphi(\Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \Theta} d\lambda$$

deverá ser, por exemplo, o espaço das funções  $\varphi(z)$  holomorfas em semi-planos direitos do plano da variável complexa e com crescimento polinomial nesses semi planos, sendo o espaço  $\mathcal{H}$  munido de uma topologia conveniente; a linha  $C$  será então uma recta vertical contida no domínio de  $\varphi$ . O operador  $\Theta$  pode ser, *em particular*, o operador  $D$  de derivação, *aplicado a distribuições nulas à esquerda da origem*; neste caso, a fórmula (3) conduz directamente, como era de esperar, à transformação inversa de LAPLACE, na sua forma complexa habitual, tendo-se, para toda a distribuição,  $f$ , nula à esquerda da origem :

$$\varphi(D)f = \int_0^{+\infty} \Phi(\hat{x}-t) f(t) dt,$$

em que  $\Phi$  é a imagem de  $\varphi$  pela transformação inversa de LAPLACE, isto é:

$$\Phi = \mathcal{L}^{-1} \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{\hat{x}\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda,$$

sendo  $k$  um número real dependente de  $\varphi$ .

Este resultado foi estendido depois ao caso de  $n$  variáveis por MIGUEL DA SILVEIRA [12].

Assim o cálculo simbólico dos electrotécnicos acabou por ficar englobado num cálculo operacional muito mais geral, aplicável a uma extensa classe de operadores lineares, tais como, por exemplo, operadores diferenciais de coeficientes variáveis, que intervêm correntemente em equações da Física Matemática e aos quais se não aplica a transformação de LAPLACE. <sup>(1)</sup>

Mas nem assim mesmo ficou esgotada a potencialidade do método de FANTAPPIÉ! Uma grande parte das equações a que esse método se applicava (embora com a restrição dos dados analíticos) continuava excluída da nossa sistematização, por conduzir a funções

---

<sup>(1)</sup> Este cálculo operacional só se aplica *directamente* a operadores diferenciais de 1.<sup>a</sup> ordem; mas pode ainda, mediante mudanças de variável convenientes, aplicar-se, por exemplo, a operadores diferenciais de 2.<sup>a</sup> ordem.

do operador  $D$ , tais como  $e^{iD}$ ,  $\sin D$ , etc. que não tinham qualquer significado no âmbito das distribuições. Um só caminho se nos deparou então: ampliar o quadro das distribuições com a introdução de novas entidades, a que depois convencionámos chamar *ultra-distribuições*. Para alcançar este objectivo, inspirámo-nos numa ideia de GOTTFRIED KOTHE, que, aplicando a teoria dos funcionais analíticos de FANTAPPIÉ, construiu uma primeira extensão do espaço das distribuições sobre o círculo (cf. [7]). Em 1957 foi-nos possível concluir uma memória sobre a teoria das ultra-distribuições, representadas por pares de funções analíticas. Dessa memória, recentemente publicada na revista alemã «Mathematischen Annalen», expusémos um resumo no último Congresso Internacional de Matemáticos em Edimburgo.

A teoria das ultra-distribuições permitiu-nos pois realizar a síntese final, que engloba os cálculos simbólicos de HEAVISIDE e de FANTAPPIÉ como casos particulares. A sua aplicação ao problema de CAUCHY para sistemas de equações em derivadas parciais está intimamente relacionada com o teorema, geral de existência e unicidade de CAUCHY-KOWALEWSKI ultrapassando porém o caso analítico. E, pormenor curioso, é no quadro das ultra-distribuições que, pela primeira vez, pode receber uma interpretação correcta o desenvolvimento de  $e^{hD}$  em série de potências, com o qual se procurava justificar aquela fórmula de LAGRANGE, a que, de começo, aludimos. Aliás, é só no âmbito das ultra-distribuições que se pode fazer o estudo geral das equações diferenciais de ordem infinita, o qual está interdito na teoria das distribuições.

Acontece porém ainda que, na resolução de problemas mistos para equações da Física Matemática,



como por exemplo a equação das ondas, SCHWARTZ e os seus discípulos tiveram de utilizar sistematicamente distribuições vectoriais, cuja teoria é bastante mais delicada que a das distribuições escalares. Ora, neste momento, um dos objectivos dos trabalhos em curso no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa é precisamente o de estender os nossos resultados ao caso das distribuições e das ultra-distribuições, com valores num espaço vectorial localmente convexo. E são prometedoras as perspectivas que nessa direcção se nos apresentam.

