

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

RENDICONTI DELLA CLASSE
DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Complementi al metodo di Gräffe
per la risoluzione delle equazioni algebriche

Estratto dai fascicoli 3-4 e 5, Serie VIII, vol. I, 1946

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1946

Matematica. — *Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche* ⁽¹⁾. Nota I ⁽²⁾ di JOSÉ SEBASTIÃO e SILVA, presentata dal Corrisp. M. PICONE.

1. V'è ancora chi concepisce la Matematica come un'attività spirituale diretta soprattutto a fini estetici, contemplativi, senza alcun legame con la vita materiale. È tuttavia un fatto generalmente riconosciuto che, isolata a lungo nel mondo delle pure idee platoniche, la Matemática tende a esaurirsi in un groviglio di cogitazioni morbose. Essa deve, al contrario, rendersi sempre più atta a risolvere le questioni, talvolta difficilissime, che le sono poste dalla Tecnica, e, a questo scopo, non deve neanche racchiudersi in un basso e miope utilitarismo, giacchè il progresso scientifico nasce da un'equilibrata cooperazione della *teoria* con la *pratica*, e non sarebbe possibile senza uno sforzo di crescente astrazione.

Ora l'Istituto per le Applicazioni del Calcolo ha, per l'appunto, l'ufficio pregevolissimo di stabilire un contatto fecondante tra la Matematica e la Tecnica, favorendone i reciproci influssi. In particolare, l'attività svolta in

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. L'autore fruisce di una borsa di studio dell'« Instituto para a Alta Cultura » di Lisbona, presso l'Istituto di Alta Matematica di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 febbraio 1946. Presentata nella seduta del 18 aprile 1946.

questo Istituto, come in altri dello stesso genere, ha messo in piena luce questo fatto rilevante: che i matematici hanno troppo trascurato le questioni di calcolo numerico, accontentandosi, in genere, di *eleganti* dimostrazioni di esistenza, che non forniscono nessun metodo di costruzione eseguibile nella pratica.

Uno dei generi di questioni che attendono tuttora indagini accurate, tendenti a diminuire la fatica dei calcolatori, è precisamente quello della risoluzione di equazioni algebriche. Una parte importante dei problemi che si presentano all'Istituto per le Applicazioni del Calcolo (specialmente questioni riguardanti l'integrazione di equazioni lineari ordinarie e a derivate parziali) richiedono, in ultima analisi, il calcolo delle radici di equazioni algebriche di grado elevato. Così, per esempio, lo studio di una rete di circuiti elettrici è sostanzialmente legato alla risoluzione di un'equazione algebrica, detta l'*equazione caratteristica* della rete stessa, ed il fatto più notevole è che, di tale equazione, vanno determinate *tutte le radici, reali e complesse* ⁽³⁾.

I metodi tradizionali che fanno dipendere il calcolo delle radici complesse di un'equazione algebrica dall'approssimazione delle radici reali di un'equazione risolvente, valgono soltanto in teoria: la pratica li ha assolutamente condannati. Un metodo che, invece, si è dimostrato particolarmente utile in tale caso è il cosiddetto *metodo di Gräffe*, il quale, però, richiede ancora perfezionamenti, soprattutto in quel che riguarda la determinazione degli argomenti e la valutazione degli errori. La presente Nota tende, precisamente, ad introdurre alcuni di questi perfezionamenti.

2. Per la perfetta intelligenza di ciò che segue, è conveniente fare qui un'esposizione riassuntiva del metodo di Gräffe, nella sua forma originale.

Supponiamo data un'equazione

$$F(x) \equiv x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

i cui coefficienti siano numeri complessi qualsivogliano. Le radici di quest'equazione si trovano, naturalmente, distribuite in gruppi di radici equimodulari; più precisamente: vi sarà un certo numero v_1 di radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v_1}$ di modulo ρ_1 massimo; un certo numero v_2 di radici $\alpha_{v_1+1}, \alpha_{v_1+2}, \dots, \alpha_{v_1+v_2}$ di modulo ρ_2 immediatamente inferiore a ρ_1 ; \dots ; un certo numero v_r di radici $\alpha_{n-v_r-1}, \alpha_{n-v_r-2}, \dots, \alpha_n$ di modulo ρ_r minimo. Per maggiore comodità di esposizione poniamo ancora $m_1 = v_1, m_2 = v_1 + v_2, \dots, m_r = v_1 + v_2 + \dots + v_r = n$.

In particolare, può avvenire che le radici abbiano tutte moduli distinti, ed allora sarà $v_1 = v_2 = \dots = v_r = 1, r = n$. Ciò posto, sia

$$F_p(x) = x^n + A_{1,p} + \dots + A_{n-1,p} x + A_{n,p} = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

(3) V. ALDO GHIZZETTI, *La trasformazione di Laplace ed il calcolo simbolico degli elettrotecnici*. Zanichelli, Bologna, 1943, p. 136.

l'equazione che ha come radici le potenze $\alpha_1^{2^p}, \alpha_2^{2^p}, \dots, \alpha_n^{2^p}$ delle radici dell'equazione $F(x) = 0$, essendo naturalmente $F_0(x) = F(x)$. Il passaggio da ciascuna di queste equazioni $F_p(x) = 0$, all'equazione successiva $F_{p+1}(x) = 0$, si può effettuare secondo le note formule di ricorrenza

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} -A_{1,p+1} = A_{1,p}^2 - 2A_{2,p} \\ A_{2,p+1} = A_{2,p}^2 - 2A_{1,p}A_{3,p} + 2A_{4,p} \\ -A_{3,p+1} = A_{3,p}^2 - 2A_{2,p}A_{4,p} + 2A_{1,p}A_{5,p} - 2A_{6,p} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ (-1)^n A_{n,p+1} = A_{n,p}^2 \end{array} \right.$$

Ora, è da osservare che ciascuno dei coefficienti $A_{k,p}$, moltiplicato per $(-1)^k$, non è altro che la somma di tutti i possibili prodotti dei numeri $\alpha_1^{2^p}, \alpha_2^{2^p}, \dots, \alpha_n^{2^p}$, presi a k a k , senza ripetizione ($k = 1, 2, \dots, n$). Possiamo allora scrivere

$$(-1)^k A_{k,p} = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)^{2^p} + \Sigma^* (\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k})^{2^p},$$

dove il sommatorio Σ^* si estende a tutti i detti prodotti, escluso quello delle k prime radici: $(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k)^{2^p}$. E verrà dunque

$$\left| \sqrt[2^p]{A_{k,p}} \right| = \left| \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \right| \cdot \left| \sqrt[2^p]{1 + \Sigma^* \left(\frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \right)^{2^p}} \right|.$$

Allora, se diamo a k soltanto i valori notevoli m_1, m_2, \dots, m_r , i termini $\left(\frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \right)^{2^p}$, cui si riferisce il sommatorio Σ^* , avranno certamente modulo inferiore ad 1 (saranno tutt'al più uguali, in valore assoluto, a $\left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right|$), il che vuol dire che tenderanno a zero, quando p cresce indefinitamente. Quindi sarà

$$(2) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \left| \sqrt[2^p]{A_{k,p}} \right| = \left| \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \right| \quad (k = m_1, m_2, \dots, m_r).$$

D'altra parte, se si tiene conto anche delle relazioni

$$\left| \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{m_i} \right| = \rho_1^{v_1} \rho_2^{v_2} \dots \rho_i^{v_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

verrà

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left| \sqrt[2^p]{A_{v_1,p}} \right| \\ \rho_i = \lim_{p \rightarrow \infty} \left| \sqrt[2^p]{A_{m_i,p} / A_{m_{i-1},p}} \right| \quad (i = 2, 3, \dots, r). \end{array} \right.$$

3. Le formule (3) consentono di calcolare, per approssimazioni successive, i moduli delle radici della $F(x) = 0$. Rimangono però da determinare gli argomenti (o le parti reali) delle stesse radici e, per questo complemento, sono stati suggeriti parecchi metodi, i quali si possono elencare nei seguenti gruppi ⁽⁴⁾.

A) *Metodi delle funzioni razionali*. – Supponiamo che l'equazione proposta $F(x) = 0$, abbia tutti i coefficienti reali. Allora, il quadrato del modulo di una sua radice complessa, α , è uguale al prodotto $\alpha \bar{\alpha}$ di questa radice per la coniugata, $\bar{\alpha}$. Se, d'altra parte, non esiste nessun'altra coppia di radici della $F(x) = 0$ che abbia lo stesso prodotto, un noto teorema di Lagrange ci insegna che la somma $\alpha + \bar{\alpha}$, ossia il doppio della parte reale delle due radici considerate, si può esprimere nel prodotto $\alpha \bar{\alpha}$, mediante una funzione razionale, i cui coefficienti sono a loro volta combinazioni razionali dei coefficienti dell'equazione proposta. Anzi, vi saranno infinite funzioni razionali, calcolabili in modi diversi, soddisfacenti le dette condizioni. In particolare, Encke, nei suoi complementi al metodo di Gräffe, ha indicato un modo di costruire siffatte funzioni.

Inconvenienti di questi metodi: 1) Per $n > 6$, la costruzione delle funzioni razionali diventa troppo pesante; 2) Il grado di approssimazione con cui siano stati ottenuti i moduli delle radici verrà in gran parte sciupato nel calcolo delle rispettive parti reali.

B) *Metodo particolare basato sulle formule di Vieta*. – Nei casi in cui l'equazione, avendo tutti i coefficienti reali, non abbia più di due coppie di radici complesse, i coseni degli argomenti di queste radici possono determinarsi in modo molto semplice – risolvendo tutt'al più un sistema di due equazioni lineari – se si tiene conto delle note formule di Vieta, che relazionano le radici con i coefficienti dell'equazione proposta. Se questa ha invece tre coppie di radici complesse, l'impiego delle dette formule, per il calcolo degli argomenti, conduce alla risoluzione di un'equazione di secondo grado; e, nei casi in cui vi siano più di tre coppie di radici complesse, il metodo va decisamente abbandonato.

C) *Metodo dello spezzamento della trasformata* ⁽⁵⁾. – Questo metodo, che è forse il più elegante, si basa sul fatto seguente, dimostrato rigorosamente da Rey Pastor: *Se m radici dell'equazione $F(x) = 0$ hanno moduli superiori*

(4) Per i dettagli, vedi M. PICONE, *Lezioni di calcolo numerico*, « D. U. S. U. », Roma, Città Universitaria, 1940-41; e RUNGE und KÖNIG, *Vorlesungen ueber numerisches Rechnen*. Berlin, 1924.

(5) Su questo perfezionamento del metodo di GRÄFFE, v.: J. REY PASTOR, *Lecciones de Algebra*, 2ª ed. 1932, p. 101; R. SAN JUAN, *Complementos al metodo di Gräffe para a resolución de ecuaciones algebraicas*. « Rev. Mat. Hisp. Amer. », to. I, 1939; M. F. CARVALLO, *Extension de la méthode de Gräffe*. « Ann. Fac. Sc. Toulouse. – Sc. Math. et Ph. », to. III, 1889, Paris, Gauthier-Villars.

a quelli di tutte le altre radici, allora, per un valore di p abbastanza elevato, la trasformata $F_p(x) = 0$ si può spezzare nelle due equazioni

$$x^m + A_{1,p} x^{m-1} + \dots + A_{m-1,p} x + A_{m,p} = 0, \\ A_{m,p} x^{n-m} + A_{m+1,p} x^{n-m-1} + \dots + A_{n,p} = 0,$$

le radici delle quali costituiscono valori approssimati, rispettivamente, delle m radici di modulo massimo e delle $n - m$ radici di modulo minimo, dell'equazione trasformata $F_p(x) = 0$, con un errore relativo che tende a zero quando p cresce indefinitamente.

Quindi possiamo dire, secondo le convenzioni del numero precedente, che, per un conveniente valore di p , la trasformata $F_p(x) = 0$ si può spezzare in r equazioni ${}^1F_p(x) = 0, {}^2F_p(x) = 0, \dots, {}^rF_p(x) = 0$, di gradi rispettivamente v_1, v_2, \dots, v_r .

Osserviamo intanto che, se l'equazione proposta ha tutti i coefficienti reali, e se questi sono forniti empiricamente, senza dover soddisfare nessuna condizione teorica relativa alla natura particolare del problema, la probabilità che vi siano due radici equimodulari *non coniugate*, è praticamente nulla. Del resto, se vi fossero alcune radici in tali condizioni, basterebbe un semplice spostamento dell'origine per distruggere l'eguaglianza dei loro moduli⁽⁶⁾.

Ammettendo allora che tale coincidenza non sia verificata, ciascuna delle equazioni frammentarie sarà: o di primo grado (con una radice reale) o di secondo grado (con due radici complesse coniugate). Si possono quindi ottenere, in tale modo, valori approssimati delle radici $\alpha_1^{2^p}, \alpha_2^{2^p}, \dots, \alpha_n^{2^p}$ della $F_p(x) = 0$. Per passare da queste alle radici dell'equazione proposta, si potrebbe adottare il metodo seguente, suggerito da Carvallo:

Scrivendo il polinomio $F_{p-1}(x)$ sotto la forma $F_{p-1}(x) \equiv \varphi_{p-1}(x^2) + x\psi_{p-1}(x^2)$, verrà, naturalmente, $\alpha_i^{2^{p-1}} = -\frac{\varphi_{p-1}(\alpha_i^{2^p})}{\psi_{p-1}(\alpha_i^{2^p})} [i = 1, 2, \dots, n]$, e così, utilizzando successivamente i polinomi $F_{p-1}(x), F_{p-2}(x), \dots, F_1(x), F(x)$, si perviene finalmente alla determinazione approssimata delle $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Ma tale metodo presenta manifestamente uno degli inconvenienti che abbiamo indicato per i metodi del gruppo A): ogni radice della $F(x) = 0$ verrà determinata mediante una certa funzione razionale $\Phi_p(x)$ (la stessa per tutte le radici) e, perciò, l'approssimazione raggiunta nella prima parte della risoluzione potrà risultare grandemente ridotta in questi calcoli com-

(6) Anche per il caso della esistenza di radici equimodulari non coniugate, è stato indicato un modo di procedere. Bisogna tuttavia osservare che, tranne il caso delle radici coniugate, l'*uguaglianza rigorosa* dei moduli delle radici non ha propriamente un significato pratico, visto che, nello sviluppo del calcolo numerico, essa degenera in *uguaglianza soltanto approssimata*, producendosi allora uno di quei grappoli di radici che rendono così difficile l'applicazione di qualsiasi metodo risolutivo.

plementari. Anzi, non si è nemmeno dimostrato che, se $\alpha_{i,p}^*$ rappresenta il valore approssimato della α_i^p , si avrà necessariamente $\alpha_i = \lim_{p \rightarrow \infty} \Phi_p(\alpha_{i,p}^*)$ [$i = 1, 2, \dots, n$].

Molto più consigliabile sarà, allora, il metodo seguente: Si cominci con l'estrarre la radice quadrata al valore approssimato $\alpha_{i,p}^*$ di α_i^p [$i = 1, 2, \dots, n$] l'indeterminazione proveniente dall'esistenza di due radici quadrate per ogni valore approssimato si può togliere più facilmente, mediante una verifica diretta sulla $F_{p-1}(x)$ (utilizzando alcuni dei coefficienti $A_{i,p-1}$). Procedendo così via via, si arriva finalmente alla determinazione approssimata delle radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

D) *Metodo dello spostamento dell'origine.* - Questo metodo, sebbene poco elegante, è uno dei più indicati nella pratica, nei casi in cui non si possa applicare il metodo B): Preso comunque un numero λ , si costruiscano le trasformate $F(x - \lambda) = 0$, $F(x + \lambda) = 0$ dell'equazione proposta, $F(x) = 0$, e si applichi il metodo di Gräffe anche a quelle due equazioni; allora per ogni radice α_i della $F(x) = 0$, verranno calcolati i tre moduli $|\alpha_i|$, $|\alpha_i + \lambda|$, $|\alpha_i - \lambda|$, i quali consentiranno di completare la determinazione della radice, con l'approssimazione che si desidera. Resta però da eseguire la scelta dei gruppi di tre moduli, in guisa che ogni gruppo corrisponda ad una stessa radice dell'equazione proposta; per questa scelta, si può ricorrere ad una previa determinazione grafica delle radici, mediante circonferenze di centri $(0, 0)$, $(0, \lambda)$, $(0, -\lambda)$, ed aventi come raggi, rispettivamente, i moduli delle radici delle $F(x) = 0$, $F(x - \lambda) = 0$, $F(x + \lambda) = 0$; ed è evidente che solo i punti dove si incrociano tre di queste circonferenze corrispondono a radici della $F(x) = 0$ (7).

4. Uno degli scopi principali di questa Nota è quello di indicare, per complemento del metodo di Gräffe, un nuovo metodo, suggerito dal precedente, ma forse meno faticoso di questo. *La sua idea generatrice consiste nel considerare, anziché due spostamenti di amplitudine λ determinata, uno spostamento unico, ma infinitesimo.* Questa idea si svolge naturalmente come segue:

Consideriamo un numero complesso $\alpha = a + bi$, qualunque, e poniamo $\rho = |\alpha|$, $\rho(t) = |\alpha + t|$, essendo t una variabile reale. Allora, verrà $\rho(t) = \frac{d}{dt} \sqrt{(a+t)^2 + b^2} = \frac{a+t}{\sqrt{(a+t)^2 + b^2}}$, e quindi $\rho'(0) = \frac{a}{\rho}$. Cioè, in parole: *La derivata del modulo, rispetto allo spostamento reale, t , coincide, per $t = 0$, col coseno dell'argomento.*

Per applicare questo risultato al problema che ci interessa, cominceremo col considerare soltanto equazioni a coefficienti reali, ed i cui gruppi

(7) Invece di due spostamenti, si potrebbe effettuarne uno solo; ma è chiaro che allora si avrebbe l'inconveniente dell'indeterminazione.

di radici equimodulari siano tutt'al più le coppie di radici coniugate. Conservando ancora ai simboli $v_1, v_2, \dots, v_r; m_1, m_2, \dots, m_r$ i significati loro attribuiti nel n. 2 (con la sola restrizione che, in questo caso, gli indici v_1, v_2, \dots, v_r possono prendere unicamente i valori 1, 2) consideriamo la trasformata $F(x+t) = 0$, con t indeterminato, e poniamo

$$\Phi_t(x) \equiv F(x+t) \equiv x^n + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} F^{(n-1)}(t) + \dots + x F'(t) + F(t),$$

e ancora:

$$\Phi_{t,p}(x) \equiv x^n + \varphi_{1,p}(t) \cdot x^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1,p}(t) \cdot x + \varphi_{n,p}(t),$$

rappresentando con $\Phi_{t,p}(x) = 0$ l'equazione che ha come radici le potenze di esponente 2^p delle radici della $\Phi_t(x) = 0$.

Allora, tenendo conto delle formule (3), non è difficile dimostrare che si ha

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{a_1}{\rho_1} &= \rho'_1(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dt} \left| \sqrt[n]{\varphi_{m_1,p}(t)} \right| \right]_0 \\ -\frac{a_{m_i}}{\rho_i} &= \rho'_i(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dt} \left| \sqrt[n]{\varphi_{m_i,p}(t)/\varphi_{m_i-1,p}(t)} \right| \right]_0 \quad (i=2,3,\dots,r), \end{aligned} \right.$$

formole queste che consentono di calcolare, per approssimazioni successive, i coseni degli argomenti di tutte le radici⁽⁸⁾.

Nel caso in cui vi fossero radici equimodulari non coniugate, si dovrebbe ricorrere a derivate seconde, terze, ecc. ed alla risoluzione di equazioni di secondo grado, terzo grado, ecc. Tuttavia, non bisogna dimenticare che, secondo quanto abbiamo detto nel n. 3, C), il caso cui ci siamo qui limitati è quello che più interessa nella pratica. Ma ne ripareremo più innanzi.

Occorre adesso aggiungere alcune osservazioni relative al modo di rendere pratico questo metodo. Osserviamo dapprima che i coefficienti delle equazioni $\Phi_{t,p}(x) = 0$ sono polinomi interi in t , dei quali basta calcolare, per lo scopo che ci interessa, *i termini indipendenti ed i coefficienti di t* . Poniamo $\varphi_{i,p}(t) \equiv A_{i,p} + B_{i,p}t + \dots$ [$i=1,2,\dots,n$]. Per la determinazione degli $A_{i,p}$ abbiamo già indicato le formule (1). Quanto alla determinazione dei $B_{i,p}$, servono ancora le stesse formule, mettendo dappertutto

(8) Si potrebbe anche fare il calcolo delle derivate $\rho'_i(0)$ secondo il teorema delle funzioni implicite, osservando che il quadrato del modulo è uguale al prodotto della radice per la sua coniugata. Basterebbe quindi utilizzare a questo scopo l'equazione che ha come radici i prodotti delle radici della $\Phi_t(x) = 0$, a due a due. Ma si ricadrebbe allora in un metodo del gruppo A). [V. Nota dell'Autore, *Problemas relativos a funções racionais das raízes duma equação algébrica*. «Port. Math.», vol. II (1940)].

i coefficienti variabili $\varphi_{i,p}(t)$ al posto dei coefficienti costanti $A_{i,p}$ ed effettuando i debiti sviluppi, limitati ai due primi termini. Verrà quindi:

$$\begin{aligned} -B_{1,p+1} &= 2(A_{1,p}B_{1,p} - B_{2,p}) \\ B_{2,p+1} &= 2(A_{2,p}B_{2,p} - A_{1,p}B_{3,p} - A_{3,p}B_{1,p} + B_{4,p}) \\ &\dots\dots\dots \\ (-1)^n B_{n,p+1} &= 2A_{n,p}B_{n,p}. \end{aligned}$$

Abbiamo così, per il calcolo dei coseni degli argomenti, un processo d'iterazione molto simile a quello di Gräffe per il calcolo dei moduli. Per farsi un'idea chiara del modo con cui avviene la convergenza di questo processo, basta tenere conto delle relazioni che legano i coefficienti $B_{i,p}$ alle radici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Supponiamo, per fissare le idee, che tutte le radici della $F(x) = 0$ siano complesse. Allora, se poniamo $2^p = s$, verrà (9)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s} B_{2,p} &= \frac{1}{s} \varphi'_{2,p}(0) = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 \alpha_2)^{s-1} + \Sigma^* \beta_{i,k} (\alpha_i \alpha_k)^{s-1} \\ -\frac{1}{s} B_{4,p} &= (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{s-1} + \\ &\quad + \Sigma^* \beta_{i,j,k,l} (\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l)^{s-1} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

dove i sommatori Σ^* vanno intesi in modo analogo a quello convenuto nel n. 2, ed i coefficienti $\beta_{i,k} \beta_{i,j,k,l}$ rappresentano funzioni delle radici, indipendenti da p ($\beta_{i,k} = \alpha_i + \alpha_k$, $\beta_{i,j,k,l} = \alpha_i \alpha_j \alpha_k + \alpha_i \alpha_j \alpha_l + \alpha_i \alpha_k \alpha_l + \alpha_j \alpha_k \alpha_l, \dots$).

Ma d'altra parte si ha

$$\begin{aligned} A_{2,p} &= (\alpha_1 \alpha_2)^s + \Sigma^* (\alpha_i \alpha_k)^s \\ A_{4,p} &= (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^s + \Sigma^* (\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l)^s \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

donde, badando alle formule precedenti,

$$\begin{aligned} -\frac{B_{2,p}}{s A_{2,p}} &= \frac{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \Sigma^* \gamma_{ik} \left(\frac{\alpha_i \alpha_k}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^s}{1 + \Sigma^* \left(\frac{\alpha_i \alpha_k}{\alpha_1 \alpha_2} \right)^s}, \\ -\frac{B_{4,p}}{s A_{4,p}} &= \frac{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} + \Sigma^* \gamma_{i,j,k,l} \left(\frac{\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \right)^s}{1 + \Sigma^* \left(\frac{\alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} \right)^s}, \end{aligned}$$

(9) Conviene osservare che si ha $\varphi_{2,p}(t) = \sum_{i < k} [(\alpha_i - t)(\alpha_k - t)]^s$, $\varphi_{4,p}(t) = \sum_{i < j < k < l} [(\alpha_i - t)(\alpha_j - t)(\alpha_k - t)(\alpha_l - t)]^s, \dots$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} &= -\frac{1}{2^p} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{B_{2,p}}{A_{2,p}} \\ \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4} &= -\frac{1}{2^p} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{B_{4,p}}{A_{4,p}} \\ &\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

le quali consentono di calcolare le parti reali dei reciproci delle radici ⁽¹⁰⁾.

Più generalmente, ammettendo le convenzioni del n. 2, possiamo scrivere

$$(4) \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_k} = -\frac{1}{2^p} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{B_{k,p}}{A_{k,p}} \quad (k = m_1, m_2, \dots, m_r).$$

Finalmente, se rappresentiamo con $C_{i,p}$ il coefficiente di t^i nello sviluppo del polinomio $\varphi_{i,p}(t)$ [$i = 1, 2, \dots, n$], verrà

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_{k-1}} \cdot \frac{1}{\alpha_k} = \\ &= \frac{1}{2^{2p+1}} \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{2^p \cdot A_{k,p} C_{k,p} - (2^p - 1) B_{k,p}^2}{A_{k,p}^2} \end{aligned}$$

e analogamente per i coefficienti degli altri termini.