

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

RENDICONTI DELLA CLASSE
DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Complementi al metodo di Gräffe
per la risoluzione delle equazioni algebriche

Estratto dai fascicoli 3-4 e 5, Serie VIII, vol. I, 1946

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1946

Matematica. — *Complementi al metodo di Gräffe per la risoluzione delle equazioni algebriche*⁽¹⁾. Nota II, di JOSÉ SEBASTIÃO e SILVA, presentata⁽²⁾ dal Corrisp. M. PICONE.

I risultati contenuti in questa Nota si collegano ad un mio lavoro dallo stesso titolo pubblicato nel fascicolo precedente.

1. Per la valutazione degli errori con cui vengono calcolate le radici mediante il metodo di Gräffe, sono già stati proposti alcuni procedimenti. Non ho potuto però accertare se quello che presento in seguito costituisce o non un progresso rispetto a tutto ciò che si è trovato finora su questo argomento.

Ricordando quanto si è detto nella nota 1, e ponendo, per comodità, $2^p = s$, è facile vedere come si abbia, qualunque sia $k = m_1, m_2, \dots, m_r$:

$$|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k| \sqrt[s]{1 - (h-1)\lambda_k^s} \leq |\sqrt[s]{A_{k,p}}| < |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k| \sqrt[s]{h},$$

o ancora

$$(5) \quad |\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{s}} < |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k| \leq |\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot [1 - (h-1)\lambda_k^s]^{-\frac{1}{s}},$$

dove h rappresenta il massimo di $\binom{n}{i}$ per $i = 1, 2, \dots, n$, e

$$\lambda_k = \begin{cases} 0 & , \text{ per } k = n \\ \left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| & , \text{ per } k < n \end{cases}$$

(ammettendo, naturalmente, che il valore di p sia già abbastanza elevato perchè si abbia $1 - (h-1)\lambda_k^s < 1$).

Osserviamo inoltre che la diseuguaglianza $|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k| > |\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{s}}$ sussiste qualunque sia $k = 1, 2, \dots, n$.

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. L'autore fruisce di una borsa di studio dell'« Instituto para a Alta Cultura » di Lisbona, presso l'Istituto di Alta Matematica di Roma.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1946.

Supponiamo allora che si abbia, per un determinato valore di k :

$$(6) \quad \left| \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \right| > h^{-\frac{1}{s}} \quad (i = 2, 3, \dots, k) \quad ; \quad \lambda_k < h^{-\frac{1}{s}}.$$

Allora, tenendo conto della (5) e dell'ultima delle condizioni (6), verrà

$$(7) \quad [1 - (h - 1) \lambda_k^s]^{-\frac{1}{s}} < [1 - (h - 1)/h]^{-\frac{1}{s}} = h^{\frac{1}{s}},$$

$$|\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{s}} < |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k| < |\sqrt[s]{A_{k,p}}| \cdot h^{\frac{1}{s}}.$$

D'altra parte, tenendo conto delle prime condizioni (6), si avrà

$$|\alpha_1|^k \cdot h^{-\frac{1}{s}} \cdot h^{-\frac{2}{s}} \dots h^{-\frac{k-1}{s}} < |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k| < |\alpha_1|^k,$$

ossia

$$|\alpha_1|^k \cdot h^{\frac{k(k-1)}{2s}} < |\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k| < |\alpha_1|^k,$$

donde

$$|\sqrt[s]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}| < |\alpha_1| < h^{\frac{k-1}{2s}} |\sqrt[s]{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}|,$$

e finalmente, badando a (7):

$$|\sqrt[ks]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{ks}} < |\alpha_1| < |\sqrt[ks]{A_{k,p}}| \cdot h^{\frac{k-1}{2s} + \frac{1}{ks}}.$$

Però, non si sa *a priori* quale è il valore di k che soddisfa le condizioni (6); ma si sa che, nella peggiore delle ipotesi, sarà $k = n$. Allora è facile vedere come il modulo di $|\alpha_1|$, stia sempre compreso tra il massimo valore di $|\sqrt[ks]{A_{k,p}}| \cdot h^{-\frac{1}{ks}}$ ed il massimo valore di $|\sqrt[ks]{A_{k,p}}| \cdot h^{\frac{k-1}{2s} + \frac{1}{ks}}$, per $k = 1, 2, \dots, n$ (3).

Abbiamo così, per il modulo di $|\alpha_1|$, una *prima* limitazione, la quale non richiede calcoli supplementari troppo faticosi, purchè si faccia uso di logaritmi. Se il massimo valore di k così raggiunto è superiore a 1, ciò significa che le k radici di modulo massimo sono *approssimativamente* equimodulari (cioè, costituiscono un *grappolo* di radici, entro il grado di approssimazione raggiunto).

Per le altre radici dello stesso grappolo possono utilizzarsi ancora le condizioni (6). Allora, divisi i coefficienti $A_{k+1,p}, A_{k+2,p}, \dots, A_{n,p}$ per il valore approssimato di $|\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k|$, si procederà per i risultati in modo analogo al precedente; e così via.

(3) È facile anche vedere come la differenza tra gli estremi di questa limitazione tenda a zero per $p \rightarrow \infty$.

La maggiorazione degli errori effettuata in questa *prima fase* è, naturalmente, poco economica, dato che ci siamo collocati nell'ipotesi più sfavorevole. I grappoli di radici non si presentano con tanta frequenza nella pratica, e, una volta ottenuti i primi valori approssimati dei moduli $|\alpha_1|, \dots, |\alpha_n|$, si potrà migliorare grandemente la valutazione degli errori, badando alle relazioni

$$|\sqrt[s]{A_{k,p}}| = |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k| \cdot \left| \sqrt[1 + \sum^* \left(\frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \right)^s} \right|,$$

per i valori critici di k , e calcolando, tutt'al più con una cifra, i valori dei quozienti $\left| \frac{\alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} \right|$, mediante i primi valori approssimati di $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_n|$. *E si potrà ancora procedere in modo analogo, relativamente alla valutazione degli errori con cui vengono calcolate le parti reali delle radici, quando a questo scopo sono usate le formule (4) della nota precedente.*

Non bisogna tuttavia dimenticare che, se esistono radici approssimativamente equimodulari (non coniugate), le rispettive parti reali vengono mal determinate, ed allora sarà necessario, o spingere più in su il procedimento di Gräffe, o ricorrere a perfezionamenti del metodo che abbiamo descritto nel numero precedente (a meno che non si rinunci addirittura a questo metodo, in tale ipotesi) (4).

In ogni modo, non mi sembra che l'applicazione del processo qui indicato per la valutazione degli errori comporti un sovraccarico eccessivo di lavoro — *purché usato da un abile calcolatore che sappia sfruttare il metodo sino in fondo, senza sprecare energia. Molte possibilità di semplificazione possono essere suggerite dalla pratica. Siamo arrivati al punto in cui soltanto l'esperienza può decidere e chiarire.*

Tuttavia, per farci un'idea sull'economia di questo metodo di maggiorazione, supponiamo che la $F(x) = 0$ sia di grado sesto, e che si abbia $\left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| > 0,99$ per $k = 1, 2, \dots, n-1$. Ora per accorgerci di questo ultimo fatto, nel corso del procedimento di Gräffe, ci vorrà un numero p di trasformazioni, tale che

$$h^{\frac{k-1}{2^{p+1}} - \frac{1}{2^p}} < 0,01, \quad \text{con } k = 6, \quad h = \binom{6}{3} = 20,$$

(4) L'approssimazione ottenuta ogni volta per i moduli è sempre molto superiore a quella corrispondente ottenuta per le parti reali. Ma questo fatto non ha tanta importanza, se ricordiamo che, in generale, calcolati i moduli con k cifre esatte, non ci vuole molto lavoro in più per raddoppiare questo numero di cifre (eccettuati i casi di uguaglianza approssimata). D'altra parte, non bisogna dimenticare che le macchine calcolatrici consentono di fare i calcoli con almeno sette cifre significative.

ossia

$$p > 10.$$

Ma non dimentichiamo che un tal caso è un infortunio che raramente capiterà ad un calcolatore.

Bisogna intanto tener presente che, nel passaggio da una trasformata a quella successiva, si introducono quasi sempre errori, dovuti al fatto che, crescendo molto rapidamente i coefficienti, diventa presto impossibile conservarne tutte le cifre: i metodi di maggiorazione dovrebbero quindi essere perfezionati, tenendo conto anche di questo fatto. Osserviamo inoltre che tali errori sono più notevoli nei coefficienti *irregolari*, cioè, in quei coeffi-

cienti $A_{k,p}$ tali che il valore di $|\sqrt[p]{A_{k,p}}|$ non tende a nessun limite con $p \rightarrow \infty$; se ricordiamo che, nel metodo dello spezzamento (n. 3), il calcolo delle parti reali poggia proprio sui coefficienti di questo genere, si vede qui un inconveniente di tale metodo.

Osserviamo da ultimo che il riconoscere, nel corso dei calcoli, un dato coefficiente $A_{k,p}$ come irregolare, ha molto interesse per il problema della maggiorazione, poichè, a tale termine, corrisponderà (nel caso dei coefficienti reali) una coppia α_k, α_{k+1} di radici coniugate, ed allora si saprà che è esattamente $\left| \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} \right| = 1$. D'altra parte, il detto coefficiente non dovrà più essere tenuto in conto nei calcoli della maggiorazione.

2. Il metodo dello spezzamento della trasformata suggerisce naturalmente questa domanda: Non sarebbe possibile fare qualche cosa di simile, proprio sull'equazione proposta?

Supponiamo allora che le m prime radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ della $F(x) = 0$ abbiano moduli superiori a quelli delle altre radici $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$, e siano $\varphi_{m,p}(x), \psi_{m,p}(x)$ due polinomi di gradi rispettivamente $n - m$ ed $m - 1$, tali che

$$\varphi_{m,p}(\alpha_i) + \alpha_i^p \psi_{m,p}(\alpha_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

essendo p un intero positivo qualunque.

Due polinomi siffatti esistono sempre e sono generalmente determinati a meno di una costante moltiplicativa. In tal caso, il polinomio $\varphi_{m,p}(x)$ non è altro che l' m -esimo resto che si ottiene, applicando l'algoritmo di Euclide (delle divisioni successive) ai polinomi $x^p, F(x)$.

Orbene: in un mio lavoro precedente⁽⁵⁾, ho dimostrato che, se la $F(x) = 0$ non ha radici multiple, le radici dell'equazione $\varphi_{m,p}(x) = 0$ tendono, per $p \rightarrow \infty$, alle $n - m$ radici di modulo minimo della $F(x) = 0$.

(5) *Sur une méthode d'approximation semblable à celle de Gräffe*. « Port. Math. », vol. 2 (1941), pp. 271-279.

Se, invece, sono le $m - 1$ radici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$ che hanno moduli superiori a quelli delle rimanenti, si può anche dimostrare che *le radici della $\psi_{m,p}(x) = 0$ tendono, per $p \rightarrow \infty$, alle $m - 1$ radici di modulo massimo della $F(x) = 0$.*

Si ha così un metodo di *approssimazione razionale* per il calcolo delle radici. La costruzione dei polinomi $\varphi_{1,p}(x)$ può essere facilmente effettuata, per $p = 2, 2^2, 2^3, \dots$, con un processo d'iterazione simile a quello di Gräffe. Dai polinomi $\varphi_{1,p}(x)$ si può in seguito passare ai polinomi $\varphi_{2,p}(x), \varphi_{3,p}(x), \dots$ per ogni valore di p ; ma qui si presentano difficoltà di calcolo, derivate dall'impossibilità pratica di operare con più di un certo numero di cifre.

Supponiamo che sia $|\alpha_1| > |\alpha_i|$ ($i = 2, 3, \dots, n$). Allora possiamo anche dire che, prendendo una data radice α_i^* della $\varphi_{1,p}(x) = 0$, come valore approssimato della radice corrispondente α_i della $F(x) = 0$, si commette un errore inferiore, in valore assoluto, a $\left| \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \right|^p$.

Questo metodo, che è stato provato all'I. A. C., con risultati incoraggianti, dal dott. Enzo Aparo, va ancora studiato e approfondito ⁽⁶⁾.

Tuttavia, non bisogna dimenticare la seguente norma: *Non sempre il metodo più interessante dal punto di vista estetico è quello che poi trionfa nella pratica.*

(6) L'APARO l'ha perfezionato dal punto di vista pratico e i suoi risultati sono raccolti in un lavoro che si trova in corso di pubblicazione nella rivista «Portugalia e Mathematica».