

PORTUGALIAE MATHEMATICA

Revista editada
por
ANTÓNIO MONTEIRO
com
a cooperação de
HUGO RIBEIRO, J. PAULO, M. ZALUAR NUNES

VOLUME 1
1937-1940

FACULDADE DE CIÊNCIAS
LISBOA — PORTUGAL

Publicação subsidiada pelo Instituto para a Alta Cultura

Da resolução numérica de equações algébricas

por

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA ⁽¹⁾

(Lisboa)

Introdução. — Sabe-se como, antes dos trabalhos de CAUCHY, eram deficientes, mesmo grosseiros, os processos de investigação adoptados em análise infinitesimal, não permitindo um exame aprofundado das questões, nem uma crítica segura dos resultados.

Da imperfeição dos métodos primeiramente usados é exemplo bem conhecido a arbitrariedade com que, nesses tempos, era feito o uso das séries, empregadas um pouco aventurosamente, sem garantias de êxito, em muitos cálculos importantes, nomeadamente em questões de mecânica celeste. Particularmente significativo é o facto de, por longo tempo, se admitir que fôsse convergente tódá a série cujo têrmo geral tendesse para zero.

Hoje ainda, em certas questões de ordem prática, se dispensa um pouco o rigor, que, em assuntos de feição especulativa, se considera imprescindível. É o que sucede, por exemplo, com alguns métodos de aproximações sucessivas usados

⁽¹⁾ Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura.

na prática, para os quais o estudo, por vezes difícil, das condições da convergência, é tido como supérfluo. Outro exemplo é fornecido pelo método de NEWTON-FOURIER, também denominado *da tangente*, destinado à resolução numérica de equações algébricas. Em muitas obras didáticas (uma exceção é o tratado de WEBER), é aquele método exposto sem grandes preocupações de rigor, fazendo apoiar na intuição o reconhecimento da sua validade. Em particular, não se demonstra que a série, por meio da qual é feito o cálculo duma raiz, tenha por soma, precisamente, essa raiz.

Ora uma parte deste trabalho é consagrado a uma nova justificação analítica do algoritmo de NEWTON-FOURIER. A-fim-de provar que a série utilizada para o cálculo duma raiz tem, na verdade, por soma, essa raiz, fomos levado a estabelecer um teorema, que pode ainda aplicar-se a outros processos de cálculo, e de que é um caso particular aquele em que se funda o método da exaustão, usado pelos gregos. Nos dois primeiros parágrafos, ocupamo-nos desenvolvidamente desse teorema, e duma consequência do mesmo, que mais comodamente se pode aplicar, em certos casos.

Intervém essa proposição numa classe particular de métodos, que resultam da modificação de outros, baseados em considerações de natureza muito diferente. Sabe-se, por exemplo que a raiz quadrada dum número positivo a , pôsto sob a forma $a = u_1^2 - x_1$, sendo $u_1^2 > a$, pode ser calculada (aplicando a fórmula de NEWTON), por meio da série

$$\sqrt{a} = u_1 - \frac{x_1}{2u_1} - \frac{x_1^2}{8u_1^3} - \dots$$

Porém, se nos limitarmos aos dois primeiros termos, ficaremos com um valor aproximado da raiz, $u_2 = u_1 - \frac{x_1}{2u_1}$, que se reconhece estar mais próximo de \sqrt{a} , sem deixar de ser maior do que este número; isto é, em símbolos, $\sqrt{a} < u_2 < u_1$. Como u_1 é arbitrário, contanto que satisfaça à

condição $u_1^2 > a$ — pode, com u_2 , que verifica a mesma condição, repetir-se o que se fez com u_1 : é-se, dêste modo, conduzido a determinar um terceiro valor aproximado u_3 , tal que $\sqrt{a} < u_3 < u_2$; e, assim, sucessivamente. Resta provar que se tem $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{a}$, representando por

u_n o t rmo geral da sucessão obtida por êste processo: essa demonstração pode fazer-se, aplicando o teorema a que nos temos referido. Deve notar-se, por último, que o processo agora indicado para o cálculo \sqrt{a} , não é mais do que o método de NEWTON-FOURIER, aplicado   equação $x^2 - a = 0$.

É uma modificação análoga do método de GR EFFE⁽¹⁾, que apresentamos no parágrafo 3; o processo que obtivemos são  , porém, aplicável a equações que não tenham raízes imaginárias.

O parágrafo 5 é dedicado a um novo método, semelhante ao de NEWTON-FOURIER, com a diferença de que emprega, em vez de tangentes, parábolas, que têm, com a curva principal, um contacto de segunda ordem; ainda no mesmo parágrafo, expomos um processo de resolução derivado do primeiro e que está para êste, de certo modo, como o da corda está para o da tangente.

No final é estabelecida uma generalização, em que os dois métodos anteriores aparecem includos numa classe de métodos, entre os quais são os únicos vantajosos na prática. Para maior brevidade, pode ler-se, antes dos parágrafos 4 e 5, essa parte do trabalho, que torna dispensáveis demonstrações feitas anteriormente. Quisemos, todavia, adoptar, na exposição, a ordem que havíamos seguido na investigação: *do particular, para o geral*.

(1) Sôbre êste método redigiu o autor algumas notas, cuja publicação reserva para mais tarde.

§ 1 — Teorema fundamental

Seja α um número positivo qualquer, e $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \dots$, uma sucessão infinita de números tais que $0 < \theta_n < 1$, para todos os valores de n . Fazendo

$$u_1 = \theta_0 \alpha \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \alpha - u_1;$$

em seguida

$$u_2 = \theta_1 \alpha_1 \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \alpha_1 - u_2;$$

e, assim, sucessiva e indefinidamente, ficará determinada uma nova sucessão numerável, $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, cujo termo geral é da forma $u_n = \theta_{n-1} \alpha_{n-1}$, sendo $\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} - u_{n-1}$ e, em particular, $\alpha_0 = \alpha$. Como se tem: $\alpha = u_1 + \alpha_1, \alpha_1 = u_2 + \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} = u_n + \alpha_n$, virá, adicionando ordenadamente estas igualdades,

$$\alpha = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \alpha_n$$

ou, fazendo $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$,

$$\alpha = s_n + \alpha_n.$$

Por serem os valores de θ_n todos positivos e menores do que a unidade, e se ter $\alpha_n = \alpha_{n-1} - u_n$, será $\alpha_n > 0$, portanto $s_n < \alpha$, para qualquer valor de n . Por outro lado, s_n cresce com n , visto as parcelas u_n serem positivas. Logo, quando n aumenta indefinidamente, s_n tende para um limite, igual ou inferior a α , e, portanto, a série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente. Assim, é lícito escrever

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$$

ou, pondo $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \omega$,

$$\alpha = s + \omega,$$

tendo-se, conforme o que se viu, $s \leq \alpha$, portanto $\omega \geq 0$.

Ocorre, nesta altura, investigar em que circunstâncias se

verifica a igualdade $s = \alpha$, equivalente a $\omega = 0$. O problema foi por nós resolvido, e o resultado encontra-se na seguinte proposição, à qual se refere o título do parágrafo:

É condição necessária e suficiente para que se tenha $s = \alpha$ (portanto $\omega = 0$), que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ seja divergente.

A demonstração que, em seguida, apresentamos não é, seguramente, a mais breve, entre tôdas as possíveis; mas é, sem dúvida, e isto com um objectivo determinado, uma das que menor amplitude de conhecimentos prévios possam exigir.

1.^o — Suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ é divergente. Por ser α_n decrescente, virá $\alpha_n > \omega$, para todos os valores de n , visto que se tem $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \omega$. Dêste modo, a série $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, idêntica a $\theta_0 \alpha + \theta_1 \alpha_1 + \dots + \theta_{n-1} \alpha_{n-1} + \dots$, obtém-se da série $\theta_0 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \dots$, multiplicando os termos desta por números, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, todos maiores do que ω . Então, se fôsse $\omega > 0$, como a série $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ é divergente, teria de ser $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ também divergente, o que não é verdade, como sabemos. Logo tem de ser $\omega = 0$, e, por conseguinte, $s = \alpha$. A condição é, pois, suficiente.

2.^o — Suponhamos, agora, que se tem $s = \alpha$, e seja $\rho_n = \theta_n + \theta_{n+1} + \dots$. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ fôsse convergente, ter-se-ia $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$, e, portanto, seria possível achar um inteiro p , tal que se tivesse $\rho_n < 1$, para todos os valores de n que se verificassem a condição $n \geq p$. Como se tem $s = s_p + \theta_p \alpha_p + \theta_{p+1} \alpha_{p+1} + \dots$, e como, além disso, α_n é decrescente, pode escrever-se

$$s < s_p + \alpha_p (\theta_p + \theta_{p+1} + \dots)$$

ou, visto que é $\theta_p + \theta_{p+1} + \dots = \rho_p$,

$$s < s_p + \alpha_p \rho_p,$$

donde, atendendo ao modo como foi escolhido p ,

$$s < s_p + \alpha_p.$$

Mas, por ser $s_p + \alpha_p = \alpha$, ter-se-ia $s < \alpha$, resultado contrário à hipótese. Logo a série de termos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ não pode ser convergente, e, portanto, é divergente. Vê-se, pois, que a condição enunciada é também necessária.

Observações. I — A proposição que demonstrámos é equivalente a esta outra: *É condição necessária e suficiente para que se tenha $s < \alpha$, que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ seja convergente.* Demonstrada uma, pode considerar-se demonstrada a outra, visto que a condição necessária, num dos casos, equivale à condição suficiente, no outro caso. Todavia é interessante notar que a demonstração directa da segunda proposição não se faz, como a da primeira, pelo método de redução ao absurdo.

II — A série $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ é, em particular, divergente quando θ_n não tende para 0, ou porque não tenha limite algum, ou porque o seu limite seja diferente de 0. Um caso particular que se deve mencionar é aquêle em que θ_n se mantém constantemente superior ou igual a um número positivo fixo $m < 1$; então, se fôr $m = \frac{1}{2}$, recairemos no princípio em que se baseia o método de *exaustão*, utilizado pelos antigos.

Aplicação. — Provemos que a série harmónica é divergente. Para isso, pode tomar-se $\alpha = 1$ e fazer $\theta_n = \frac{1}{n+2}$.

Ter-se-á, então, $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ e, portanto, $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$,

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$, ou seja $s = \alpha$. Êste resultado esta-

belece a divergência da série harmónica.

Limites superiores de erros. Como adiante se verá, o teorema demonstrado pode, em certos casos, ser utilizado no cálculo, por aproximações, do número α . Então, além de α , serão desconhecidos os números θ_n , pois bastava o conhecimento dum só dêstes, para que se pudesse determinar α com

exactidão. Dêste modo, por mais longe que sejam conduzidos os cálculos, os valores que se obtêm para α virão sempre afectados de erros por defeito, de que seria conveniente saber determinar limites superiores. Ora a determinação de tais limites é possível, e dum modo muito satisfatório, nos casos em que se saiba de θ_n , *que é crescente com n* .

Suponhamos, pois, verificada esta última condição, e sejam u_k e u_{k+1} dois termos consecutivos da sucessão $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. Da relação já conhecida $u_k = \theta_{k-1} \alpha_{k-1}$, deduz-se

$$(a) \quad \alpha_{k-1} = \frac{u_k}{\theta_{k-1}}.$$

Tem-se, por outro lado, $u_{k+1} = \theta_k \alpha_k$, donde, visto ser θ_n crescente, por hipótese, $u_{k+1} > \theta_{k-1} \alpha_k$, e, portanto, $\alpha_k < \frac{u_{k+1}}{\theta_{k-1}}$. Mas, por ser $\alpha_{k-1} = u_k + \alpha_k$, virá

$$(b) \quad \alpha_{k-1} < u_k + \frac{u_{k+1}}{\theta_{k-1}}$$

ou

$$(c) \quad \alpha_{k-1} < u_k \left(1 + \frac{1}{\theta_{k-1}} \cdot \frac{u_{k+1}}{u_k} \right).$$

De (a) e de (c) resulta, então,

$$\frac{1}{\theta_{k-1}} < \frac{1}{1 - \frac{u_{k+1}}{u_k}} = \frac{u_k}{u_k - u_{k+1}};$$

isto é, $\frac{1}{\theta_{k-1}}$ é inferior à soma dos termos duma progressão geométrica ilimitada decrescente, da qual são dois termos consecutivos u_k e u_{k+1} . Poderá, em muitos casos, tomar-se, com suficiente aproximação, $\frac{u_k}{u_k - u_{k+1}} = 1 + \frac{u_{k+1}}{u_k}$.

Tendo em vista (b), virá agora

$$\alpha_{k-1} < u_k + u_{k+1} + \frac{u_{k+1}^2}{u_k - u_{k+1}},$$

donde, por ser $\alpha = s_{k-1} + \alpha_{k-1}$ e $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$,

$$\alpha < s_{k+1} + \frac{u_{k+1}^2}{u_k - u_{k+1}}.$$

Como, por outro lado, se tem $s_{k+1} < \alpha$, conclue-se que o erro por defeito cometido ao tomar s_{k+1} como valor aproximado de α , é inferior a $\frac{u_{k+1}^2}{u_n - u_{k+1}}$.

§ 2 — Corolário do teorema fundamental

Suponhamos que, sendo $\theta(x)$ uma função definida no intervalo $(0, \alpha)$, tal que $0 < \theta(x) < 1$ para $0 \leq x < \alpha$, os números θ_n a que nos referimos no parágrafo precedente provêm de $\theta(x)$, segundo a lei de recorrência $\theta(s_n) = \theta_n$ ⁽¹⁾, válida para todos os valores de n , maiores do que zero, sendo $\theta(0) = \theta_0$, e conservando, aqui, s_n o significado que lhe havíamos atribuído no parágrafo anterior.

Nestes termos, para que a igualdade $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \alpha$ se verifique, é condição suficiente (mas não necessária) que, dado arbitrariamente um número δ compreendido entre 0 e α , exista um número $\mu(\delta) > 0$, fixo para cada valor de δ , tal que se tenha $\theta(x) > \mu(\delta)$, para todos os valores de x pertencentes ao intervalo $(0, \alpha - \delta)$.

Com efeito, no caso de ser $s < \alpha$, podia escrever-se $s = \alpha - \delta_1$, sendo δ_1 um número tal que $0 < \delta_1 < \alpha$. Mas s_n pertenceria, qualquer que fôsse n , ao intervalo $(0, \alpha - \delta_1)$, porque, sendo s_n positivo e crescente, e tendo-se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$, é $0 < s_n < s$. Então, uma vez verificada a condição do enunciado, ter-se-ia $\theta(s_n) \geq \mu(\delta_1)$, isto é, $\theta_n \geq \mu(\delta_1)$, para todos os valores de n ; portanto (Obs. II, § 1) a série $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$

(1) Mais desenvolvidamente: $\theta_0 = \theta(0)$, $\theta_1 = \theta(u_1)$, $\theta_2 = \theta(u_1 + u_2)$, $\theta_3 = \theta(u_1 + u_2 + u_3)$, \dots ; sendo, como se viu, $u_1 = \theta_0 \alpha$, $u_2 = \theta_1 (\alpha - u_1)$, $u_3 = \theta_2 \cdot [\alpha - (u_1 + u_2)]$, \dots

seria divergente, o que, segundo o teorema fundamental, implica a igualdade $s = \alpha$, incompatível com a hipótese de que partimos ($s < \alpha$). Terá de ser, pois, $s = \alpha$, como se pretendia demonstrar.

Caso das funções contínuas. — A condição imposta, no enunciado, à função $\theta(x)$ é, em particular, satisfeita, se $\theta(x)$ fôr uma função contínua no intervalo $(0, \alpha)$, podendo não o ser no extremo α .

Com efeito, suponhamos que $\theta(x)$ é contínua naquêles pontos; então, qualquer que seja o número δ , compreendido entre 0 e α , existe⁽¹⁾, necessariamente, um valor de x , situado no intervalo $(0, \alpha - \delta)$, para o qual a função $\theta(x)$ toma um valor $\mu(\delta)$, inferior, quando muito igual, aos valores da mesma função em todo o intervalo $(0, \alpha - \delta)$. Ora êsse mínimo terá de ser maior do que zero, visto que [1.^a condição a que sujeitámos a função $\theta(x)$] se tem $0 < \theta(x) < 1$ para $0 \leq x < \alpha$. Será, pois, $\theta(x) \geq \mu(\delta) > 0$ para $0 \leq x \leq \alpha - \delta$; isto é, a função $\theta(x)$ satisfaz à condição do enunciado.

Da condição $0 < \theta(x) < 1$ (para $0 \leq x < \alpha$), resulta, no caso de existir o limite à esquerda de α , $0 \leq \lim_{x \rightarrow \alpha-0} \theta(x) \leq 1$, donde $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \leq 1$. Façamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \tau$; o conhecimento de τ dá, por assim dizer, uma idéia da *rapidez* com que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge para α . O valor máximo de τ é, se acaba de ver, a unidade; pode, em tal caso, afirmar-se que não só o resíduo $\alpha_n = \alpha - s_n$, mas ainda o cociente $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$, são infinitésimos, o que mostra que a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ tende a tornar-se cada vez mais *rápida*. O valor mínimo de τ é zero; então a série $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ é ainda divergente,

(1) Em virtude do teorema que estabelece a existência dum mínimo (atingido) duma função, nos intervalos fechados em que é contínua.

a-pesar-do seu termo geral tender para zero; além disso, a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ tende agora a tornar-se cada vez mais *lenta*, visto que se tem $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = 1$.

Exemplo.—Seja $\alpha=1$, e tome-se $\theta(x) = \frac{1-x}{2-x}$, função contínua no intervalo $(0, 1)$. Ter-se-á, então, $\theta_0 = \frac{1}{2}$, $\theta_1 = \frac{1}{3}$, $\theta_2 = \frac{1}{4}$, ..., $\theta_n = \frac{1}{n+2}$, ...; isto é, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ coincide, neste caso, com a série harmônica, privada do seu primeiro termo. Neste exemplo, é, como se vê, $\tau=0$, o que não obsta a que a soma s da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ seja igual a α , como exige o corolário que demonstrámos.

§ 3 — Método de resolução numérica de equações sem raízes imaginárias

O estudo das equações que só admitem soluções reais pode reduzir-se ao estudo das equações cujas raízes são tôdas positivas, atendendo a que, dum equação do primeiro tipo, se pode passar para uma equação do segundo tipo (caso particular do primeiro), efectuando uma simples mudança de origem. Mais precisamente: se fôr $F(x) = 0$ a equação proposta, e λ o limite inferior (suposto negativo) das raízes da mesma equação, basta, para aquêlê fim, aplicar a transformação definida por $y = x - \lambda$. Podemos, pois, considerar apenas o segundo o caso.

Sejam, então, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ as raízes, tôdas positivas, dum equação algébrica, e suponhamos que é α_1 a menor de tôdas. Representando por S'_p a soma das potências de expoente p dos inversos das raízes, e fazendo $\alpha = \alpha_1$, será

$$\frac{1}{\sqrt[p]{S'_p}} = \frac{1}{\sqrt[p]{\frac{1}{\alpha^p} + \frac{1}{\alpha_2^p} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^p}}} > \frac{1}{\sqrt[p]{m \frac{1}{\alpha^p}}} = \frac{\alpha}{\sqrt[p]{m}}.$$

Por outro lado, é

$$\frac{1}{\sqrt[p]{S'_p}} < \frac{1}{\sqrt[p]{\frac{1}{\alpha^p}}} = \alpha.$$

Tem-se, pois, resumindo os dois resultados,

$$\frac{\alpha}{\sqrt[p]{m}} < \frac{1}{\sqrt[p]{S'_p}} < \alpha$$

ou, fazendo, por comodidade, $u_1 = \frac{1}{\sqrt[p]{S'_p}}$,

$$(1) \quad \frac{\alpha}{\sqrt[p]{m}} < u_1 < \alpha.$$

Pode assim tomar-se u_1 como primeiro valor aproximado de α . Pondo $u_1 = \theta_0 \alpha$, virá, em virtude de (1),

$$\frac{1}{\sqrt[p]{m}} < \theta_0 < 1.$$

Nada dissemos, ainda, a respeito do valor de p ; todavia, do que, em seguida, vamos expor, fàcilmente se deduz que a escolha dêste número é inteiramente arbitrária; notando, porém, que o valor de u_1 obtido é tanto mais próximo de α , quanto mais elevado fôr p . Com efeito, o método de que nos estamos ocupando não é mais do que uma modificação do método de GRÆFFE, aplicado ao cálculo duma só raiz, em equações que não admitam raízes imaginárias.

Submetendo, agora, a equação proposta à transformação $y = x - u_1$, e, procedendo, em relação à transformada, como havíamos feito para a antecedente, acharemos para α_1 (sendo $\alpha_1 = \alpha - u_1$) um valor aproximado, que se pode designar por u_2 , e que será da forma $u_2 = \theta_1 \alpha_1$, tendo-se ainda

$$\frac{1}{\sqrt[p]{m}} < \theta_1 < 1.$$

Continuando a proceder de modo análogo, serão determinados novos termos duma sucessão numerável $u_1, u_2, \dots, u_n \dots$, à qual está associada uma outra $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$,

em que é, para qualquer valor de n , $\theta_n < \frac{1}{\sqrt[p]{m}}$, o que

(Obs. II, § 1) leva a concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ tem por soma a raiz α , visto que é $\frac{1}{\sqrt[p]{m}} \geq \frac{1}{m}$, qualquer que seja p .

Como os termos da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ são funções simétricas das raízes das equações correspondentes, e, portanto, se podem exprimir em função racional dos coeficientes das mesmas equações, teremos assim um meio de achar valores tão próximos de α , quanto se quiser.

Limites superiores de erros. — É evidente que os números $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n, \dots$ derivam, neste caso, segundo a lei indicada no § 2, da função

$$\theta(x) = \frac{1}{(a_1 - x)^p \sqrt[p]{\frac{1}{(\alpha - x)^p} + \frac{1}{(a_2 - x)^p} + \dots + \frac{1}{(a_m - x)^p}}}.$$

Ora, sendo a derivada desta função positiva em todo o intervalo $(0, \alpha)$, como facilmente se verifica, será θ_n crescente (visto que $\theta(x)$ também o é), e, poderá, portanto, aplicar-se a este caso o processo que no § 1 indicámos para a determinação de limites superiores de erros.

Caso particular. — Se fôr $p = 1$, sendo $F(x) = 0$ a equação proposta, ter-se-á $S'_p = -\frac{F'(0)}{F''(0)}$; isto é, o método de que nos estamos ocupando confunde-se, então, com o método de NEWTON-FOURIER (também chamado método da tangente), cujo domínio de validade é, porém, mais extenso do que o campo restrito das equações sem raízes imaginárias: compreende, como se sabe, tôdas as equações algébricas de coeficientes reais.

O presente método, que fomos levado a expor quasi exclusivamente com finalidade especulativa, procura participar das vantagens dos dois mencionados métodos, de GRÆFFE

e de NEWTON-FOURIER. No parágrafo seguinte, trataremos do método de NEWTON-FOURIER, generalizado a tôdas as equações algébricas de coeficientes reais, mostrando em que medida intervêm, na sua fundamentação, os elementos teóricos expostos nos parágrafos 1 e 2.

§ 4 — O método de Newton-Fourier, baseado em novas considerações teóricas

Seja $F(x) = 0$ uma equação algébrica de coeficientes reais, e suponhamos, provisoriamente, que tal equação admite, pelo menos, uma raiz positiva, sendo α a raiz positiva ou a menor das raízes positivas de $F(x) = 0$. Posto isto, consideremos a função $\varphi(x)$ que verifica as condições

$$\begin{aligned} (1) \quad & \varphi(0) = F(0), \\ (1') \quad & \varphi'(0) = F'(0), \\ (1'') \quad & \varphi''(x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Tal é a função $\varphi(x) \equiv x F'(0) + F(0)$, constituída pelos dois últimos termos do primeiro membro da equação $F(x) = 0$, suposto $F(x)$ ordenado com ordem decrescente. Representando por u_1 o zero de função linear $\varphi(x)$, será $u_1 = -\frac{F(0)}{F'(0)}$.

Vejamos, agora, em que circunstâncias pode o conhecimento de u_1 ser útil para a determinação de α . Se u_1 estiver compreendido entre 0 e α ; se, além disso, feita a transformação de $F(x) = 0$ em $x - u_1$, se obtiver, pelo mesmo processo, um valor u_2 compreendido entre 0 e $\alpha - u_1$; se depois, analogamente, se determinar u_3 , compreendido entre 0 e $\alpha - (u_1 + u_2)$, e, assim, sucessivamente—pode acontecer que a sucessão $u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3, \dots$, tenha por limite a raiz α . Ora, neste ponto, está naturalmente indicada a utilização do teorema fundamental, que nos permitirá averiguar se α é, na verdade, o limite daquela sucessão.

Procuramos, pois, uma condição a que deva satisfazer a equação $F(x) = 0$, para que se tenha, necessariamente, $0 < u_1 < \alpha$; e, para fixar idéias, suponhamos que é $F(0) > 0$. Desta hipótese e de (1), resulta imediatamente $\varphi(0) > 0$. Então,

para que o zero, u_1 , da função linear $\varphi(x)$, esteja situado, como se pretende, entre 0 e α , basta⁽¹⁾ que se tenha agora $\varphi(\alpha) < 0$.

Façamos $\psi(x) \equiv F(x) - \varphi(x)$. Como $F(\alpha) = 0$, vem $\psi(\alpha) = -\varphi(\alpha)$, e, portanto, as condições $\varphi(\alpha) < 0$ e $\psi(\alpha) > 0$ serão equivalentes. Pode, pois, mediante esta equivalência, transformar-se o problema, procurando, agora, determinar uma condição para que se tenha $\psi(\alpha) > 0$.

Ora a desigualdade $\psi(\alpha) > 0$ será, evidentemente, verdadeira, se o fôr $\psi(x) > 0$, para todos os valores de x , tais que $0 < x \leq \alpha$. Por sua vez, em virtude de (1) e do modo como foi definida $\psi(x)$, esta função anula-se para $x = 0$; logo a última condição será, em particular, satisfeita se $\psi(x)$ fôr crescente em todo o intervalo $(0, \alpha)$, e, para isso, basta que a sua derivada, $\psi'(x)$, seja positiva no mesmo intervalo, podendo não o ser nos extremos 0 e α . Como se tem ainda, em virtude de (1') e da definição, $\psi'(0) = F'(0) - \varphi'(0) = 0$, conclue-se, de modo análogo, que a função $\psi'(x)$ será positiva para $0 < x < \alpha$, se fôr também $\psi''(x) > 0$ para os mesmos valores de x . Tem-se, por último, em virtude de (1'') e do modo como foi definida a função $\psi(x)$: $\psi''(x) \equiv F''(x)$.

Então, resumindo: *para que se tenha $0 < u_1 < \alpha$, basta que a função $F''(x)$ seja constantemente positiva no intervalo $(0, \alpha)$, com ou sem excepção dos extremos.*

Mas, é preciso não esquecer, êste resultado foi obtido na hipótese de ser $F(0) > 0$.

Consideração de todos os casos possíveis. Se fôr $F(0) < 0$, conclue-se, partindo da equação $-F(x) = 0$, equivalente à proposta, que a condição $0 < u_1 < \alpha$ será satisfeita, sempre que se tiver $F''(x) < 0$, para $0 < x < \alpha$. Podem, pois, fundir-se os dois resultados num só, dizendo que, *para a condição $0 < u_1 < \alpha$ ser verificada, basta que se tenha*

$$F(\alpha) \cdot F''(x) > 0, \quad \text{para } 0 < x < \alpha.$$

(1) Em virtude do teorema de CAUCHY, relativo às funções contínuas.

Ora, se, neste enunciado, fôr a condição $0 < u_1 < \alpha$ substituída pela condição menos restritiva $0 < \frac{u_1}{\alpha} < 1$, e, da mesma forma, a condição $0 < x < \alpha$, substituída por $0 < \frac{x}{\alpha} < 1$, obter-se-á um resultado ainda válido, no caso de α representar não a *menor* das raízes positivas, mas a *maior* das raízes negativas: é o que facilmente se verifica, partindo da transformada em $-x$ da equação proposta.

Suponhamos, agora, que a condição $F'(\alpha) \cdot F''(x) > 0$ ($0 < \frac{x}{\alpha} < 1$) não é satisfeita, ou mesmo que se pretende fazer o cálculo, não da raiz de menor valor absoluto, mas duma raiz real qualquer, e designemos por α' essa raiz. Pode, em tudo o que segue, admitir-se que as duas equações $F(x) = 0$ e $F''(x) = 0$ não têm raízes comuns, pois que, se tais raízes existissem, poderia abaixar-se o grau da equação proposta. Da mesma forma, é cómodo (embora não indispensável) supor que também as equações $F(x) = 0$ e $F'(x) = 0$ não admitem raízes comuns, isto é, usando a linguagem geométrica, que o eixo dos XX não é tangente em ponto algum à curva de equação $y = F(x)$. Admitidas estas duas hipóteses, pode afirmar-se que *é sempre possível determinar um intervalo (λ, μ) que contenha α' no seu interior, sem conter nenhuma outra raiz da mesma equação, e no qual a função $F''(x)$ tenha um sinal constante*—o que facilmente se justifica, atendendo a que α' deve estar compreendida entre dois zeros consecutivos de $F''(x)$, ou entre um desses zeros e $+\infty$ ou $-\infty$. Então, um, e um só, dos dois seguintes casos se apresentará:

- 1.º) $F'(\lambda) \cdot F''(x) > 0$ (donde $F'(\mu) \cdot F''(x) < 0$) para $\lambda < x < \mu$.
- 2.º) $F'(\mu) \cdot F''(x) > 0$ (donde $F'(\lambda) \cdot F''(x) < 0$) para $\lambda < x < \mu$.

Daqui resulta que, submetendo a equação $F(x) = 0$ à transformação $y = x - \lambda$ (na 1.ª hipótese) ou à transformação $y = x - \mu$ (na 2.ª hipótese), se é conduzido a um dos casos já considerados, sendo a raiz α' transformada numa raiz positiva ($\alpha = \alpha' - \lambda$) ou numa raiz negativa ($\alpha = \alpha' - \mu$).

Deve notar-se que, para estas transformações, basta determinar dois termos da equação transformada. Com efeito, o valor aproximado u_1 é, então, dado pela fórmula

$$u_1 = -\frac{F(X)}{F'(X)}, \text{ em que } X \text{ representa um dos números } \lambda \text{ e } \mu.$$

Podemos, pois, tornar a considerar o caso em que α é a menor das raízes positivas da equação proposta, caso a que, como acabámos de ver, se podem reduzir todos os outros.

Determinado u_1 , e aplicada à equação $F(x) = 0$ a transformação $y = x - u_1$, pode, pelo processo anterior, determinar-se um valor u_2 , que satisfaz, necessariamente, à condição $0 < u_2 < \alpha_1$ (sendo $\alpha_1 = \alpha - u_1$), visto que se tem $F_y''(y - u_1) = F_x''(x)$ e, portanto, $F_y''(y - u_1) > 0$, para $0 < y < \alpha_1$ ($u_1 < x < \alpha$). Efectuada, agora, sobre $F(y - u_1) = 0$, a translação $z = y - u_2$, pode, análogamente, determinar-se um valor u_3 , tal que $0 < u_3 < \alpha_2$ (sendo $\alpha_2 = \alpha_1 - u_2$). E, assim, sucessivamente, *ad infinitum*.

Ainda para estas transformações, basta determinar dois termos de cada transformada. Com efeito, será, então,

$$(2) \quad u_1 = -\frac{F(0)}{F'(0)}, u_2 = -\frac{F(u_1)}{F'(u_1)}, u_3 = -\frac{F(u_1 + u_2)}{F'(u_1 + u_2)}, \dots,$$

o que acaba de estabelecer a perfeita identidade entre o método que temos exposto e o método de NEWTON-FOURIER.

Intervenção do teorema fundamental. Falta provar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ tem por soma a raiz α . Vamos demonstrá-lo, baseando-nos directamente no corolário do teorema fundamental.

Fazendo, como nos parágrafos anteriores, $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ e $\theta_{n-1} = \frac{u_n}{\alpha_{n-1}}$, virá, de (2), atendendo a que é $\alpha_0 = \alpha$ e $\alpha_n = \alpha - s_n$,

$$\begin{aligned} \theta_0 &= -\frac{F(0)}{\alpha F'(0)}, \quad \theta_1 = -\frac{F(s_1)}{(\alpha - s_1) F'(s_1)}, \\ \theta_2 &= -\frac{F(s_2)}{(\alpha - s_2) F'(s_2)}, \dots, \quad \theta_n = \frac{F(s_n)}{(s_n - \alpha) F'(s_n)}; \end{aligned}$$

isto é, os números $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$ procedem da função $\theta(x) = \frac{F(x)}{(x - \alpha)F'(x)}$, segundo a lei de recorrência a que nos referimos no parágrafo 2. Como esta função é contínua no intervalo $(0, \alpha)$, e se tem $0 < \theta(x) < 1$, para $0 \leq x < \alpha$, conclue-se, tendo em vista a nota do parágrafo 2 relativa às funções contínuas, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, obtida pela forma indicada, tem por soma a raiz α .

Observações. I — Neste caso, é $\lim_{x \rightarrow \alpha} \theta(x) = 1$, portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 1$, o que (§ 2) nos dá uma indicação importante acerca do valor dêste método.

II — Por uma forma análoga se pode justificar o método da corda, que aparece como o resultado duma modificação do método de NEWTON-FOURIER, nos casos em que êste não é aplicável, isto é quando, feita a translação a que nos referimos, se não tem $F(0) \cdot F''(x) > 0$, para $0 < \frac{x}{\alpha} < 1$, relativamente à equação transformada. No entanto, como se sabe, é sempre possível o emprêgo dos dois métodos, associados. É interessante notar que, para o método da corda, se tem $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n < 1$, quando empregado isoladamente, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 1$, quando associado ao da tangente, de harmonia com o que foi anteriormente estabelecido. A análise que que fazemos no § seguinte torna dispensável o estudo pormenorizado dêste método.

Questão a resolver. — No sentido de poder aplicar a êste caso o que no § 1 dissemos a respeito da determinação de limites superiores de erros, interessava averiguar se $\theta(x)$ é ou não crescente, qualquer que seja $F(x)$, no intervalo $(0, \alpha)$. Ora devemos declarar que não nos foi possível concluir nada de positivo à-cêrca-do sinal de $\theta'(x)$ naquêlê intervalo, nem por qualquer outro meio, saber de que modo a função $\theta(x)$ varia no mesmo intervalo. O que podemos afirmar é, tão sòmente, que, por ser $\theta(x)$ uma função racional, e se

ter $\lim_{x \rightarrow \alpha} \theta(x) = 1$, existe, necessariamente, um valor x_0 de x , compreendido entre 0 e α , tal que a função $\theta(x)$ é crescente no intervalo (x_0, α) ; porém isso não basta, evidentemente, para o fim que se tem em vista.

§ 5 — Novo método de resolução numérica de equações de coeficientes reais

Seja, ainda, $F(x) = 0$ uma equação algébrica de coeficientes reais, e, supondo, provisoriamente, que $F(x) = 0$ admite, pelo menos, uma raiz positiva, seja α a raiz positiva, ou a menor das raízes positivas, da mesma equação. Consideremos, agora, a função $\varphi(x)$ determinada pelas condições

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & \varphi(0) = F(0), \\ \text{(I')} \quad & \varphi'(0) = F'(0), \\ \text{(I'')} \quad & \varphi''(0) = F''(0), \\ \text{(I''')} \quad & \varphi'''(x) \equiv 0. \end{aligned}$$

Trata-se, evidentemente, da função $\varphi(x) \equiv \frac{x^3}{6} F'''(0) + \frac{x^2}{2} F''(0) + x F'(0) + F(0)$, formada pelos três últimos termos do primeiro membro da equação proposta, suposto o polinómio $F(x)$ ordenado em ordem decrescente.

Seguindo uma orientação análoga à do parágrafo anterior, procuremos determinar uma condição a que deva satisfazer a equação $F(x) = 0$, para que um dos zeros de $\varphi(x)$, que representaremos por u_1 , esteja compreendido entre 0 e α .

Suponhamos, então, que se tem $F(0) > 0$. Daqui e de (I), resulta, imediatamente, $\varphi(0) > 0$; então, para que exista um, e só um, zero de $\varphi(x)$ entre 0 e α , basta que seja agora ⁽¹⁾ $\varphi(\alpha) < 0$. Mas, fazendo $\psi(x) \equiv F(x) - \varphi(x)$, as condições $\varphi(\alpha) < 0$ e $\psi(\alpha) > 0$ serão equivalentes, por se ter $F(\alpha) = 0$. Além disso, a desigualdade $\psi(\alpha) > 0$ será verificada, se, dum modo geral, se tiver $\psi(x) > 0$, para $0 < x \leq \alpha$. Como, em virtude (I), é $\psi(0) = 0$, — para que a última condição se verifique, basta que a função $\psi(x)$ seja

(1) Pelo teorema de CAUCHY, relativo às funções contínuas.

crescente no intervalo $(0, \alpha)$, ou, o que é ainda suficiente, que a função $\psi'(x)$ seja positiva para $0 < x < \alpha$. Por sua vez, em virtude de (I'), tem-se ainda $\psi'(0) = 0$; então, a desigualdade $\psi'(x) > 0$ é satisfeita para $0 < x < \alpha$, desde que tenha $\psi''(x) > 0$, para os mesmos valores de x . Análogamente, por ser ainda, em virtude de (I''), $\psi''(0) = 0$, a função $\psi''(x)$ será positiva para $0 < x < \alpha$, sempre que se tiver $\psi'''(x) > 0$, nos mesmos pontos do intervalo $(0, \alpha)$. Como, finalmente, em virtude de (I'''), se tem $\psi'''(x) \equiv F'''(x)$, pode, em resumo afirmar-se que, *no caso de ser $F(0) > 0$, para que um, e só um, dos zeros de $\varphi(x)$ esteja compreendido entre 0 e α , basta que o polinómio $F'''(x)$ seja constantemente positivo no intervalo $(0, \alpha)$, incluindo ou não os extremos.*

Quanto à raiz de $\varphi(x)$ a escolher, deve ser a positiva, se as duas raízes tiverem sinais contrários, e a menor, se ambas forem positivas.

Calculado u_1 , pode, mediante a transformação $y = x - u_1$ aplicada à equação proposta, e empregando o processo anterior, determinar-se um valor u_2 , compreendido entre 0 e $\alpha - u_1$; depois, análogamente, outro valor u_3 entre 0 e $\alpha - (u_1 + u_2)$, e, assim, sucessivamente.

Intervenção do teorema fundamental. Se fizermos, como atrás, $s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $\alpha_n = \alpha - s_n$ e $\theta_{n-1} = \frac{u_n}{\alpha_{n-1}}$, facilmente se estabelece que, neste caso, os números $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$ derivam, segundo a já conhecida lei de recorrência, da função

$$\theta(x) = \frac{-F'(x) \pm \sqrt{[F'(x)]^2 - 2F(x)F''(x)}}{(\alpha - x)F''(x)},$$

à parte a indeterminação do sinal. Ora, como se pode verificar, esta função é contínua no intervalo $(0, \alpha)$; além disso, atendendo ao modo como foram determinados $u_1, u_2, \dots, \dots, u_n, \dots$, ter-se-á

$$0 < \theta(x) < 1, \text{ para } 0 \leq x < \alpha.$$

Deve, pois, concluir-se, tendo em vista o corolário do teorema fundamental, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, obtida por êste processo, tem por soma a raiz α .

Tem-se, ainda, neste caso $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \equiv \lim_{x \rightarrow \alpha} \theta(x) = 1$.

Importa, porém, notar que a aplicação dêste método conduz, de cada vez, a valores mais próximos da raiz, do que os correspondentes, obtidos pelo anterior; em compensação, neste método, são mais laboriosos os cálculos para achar cada termo da série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

A observação que, no parágrafo anterior, fizemos a respeito da variação de $\theta(x)$, mantém-se para êste caso; não sabemos, pois, se pode aplicar-se aqui o processo indicado no § 1 para a determinação de limites superiores de erros.

Consideração de todos os casos possíveis. Se fôr $F(0) < 0$, facilmente se conclue (basta considerar a equação $-F(x) = 0$ equivalente à proposta) que uma, e uma, só das raízes de $\varphi(x)$ estará situada entre 0 e α , desde que se tenha $F'''(x) < 0$ para $0 < x < \alpha$.

Condensando os dois resultados, podemos dizer: *é condição suficiente para que um, e um só, dos zeros de $\varphi(x)$ esteja compreendido entre 0 e α , que se verifique a desigualdade $F(0) \cdot F'''(x) > 0$, para todos os valores de x , tais que $0 < x < \alpha$.*

O último resultado, porém, já não é verdadeiro, se α representar, não a menor das raízes positivas, mas a maior das raízes negativas. Neste caso, a condição enunciada deve substituir-se por esta outra: $F(0) \cdot F'''(x) < 0$, para $\alpha < x < 0$. Com efeito, transformando a equação proposta em $-x$, a raiz α será convertida na maior das raízes positivas da equação transformada $F'(-x) = 0$; por outro lado, tem-se $\frac{d^3 F(-x)}{dx^3} = -\frac{d^3 F(x)}{dx^3}$, o que prova a afirmação feita.

Seja agora α uma raiz real qualquer, e suponhamos, como atrás, que as equações $F(x) = 0$ e $F'''(x) = 0$, por um lado, e as equações $F(x) = 0$ e $F'(x) = 0$, por outro

lado, não admitem raízes comuns. Então, representando por μ e λ , respectivamente, os extremos superior e inferior dum intervalo que, no seu interior, contenha α , e só esta raiz da equação proposta, e no qual a função $F'''(x)$ tenha um sinal constante — intervalo que é sempre possível determinar — uma, e uma só, das hipóteses seguintes se apresentará:

- 1.º) $F'(\lambda) \cdot F'''(\lambda) > 0$ (donde $F'(\lambda) \cdot F'''(x) > 0$ para $\lambda < x < \mu$);
- 2.º) $F'(\lambda) \cdot F'''(\lambda) < 0$ (donde $F'(\lambda) \cdot F'''(x) < 0$ para $\lambda < x < \mu$).

No 1.º caso, ter-se-á, conjuntamente, $F'(\mu) \cdot F'''(x) < 0$ para $\lambda < x < \mu$, visto que, sendo α a única raiz da equação $F(x) = 0$ existente no interior do intervalo (λ, μ) , a curva de equação $y = F(x)$ corta uma vez, e uma só, o eixo dos XX, naquêlê intervalo. Então, tendo em vista os resultados anteriores, a determinação de α pode neste caso fazer-se, indiferentemente, a partir de λ ou de μ , isto é, efectuando a transformação $y = x - \lambda$ ou efectuando a transformação $y = x - \mu$.

No 2.º caso, será, pela mesma razão, $F'(\mu) \cdot F'''(x) > 0$ para $\lambda < x < \mu$, e não há, quer num sentido quer noutro, garantias suficientes para o cálculo de α , empregando o método de que nos estamos ocupando. Será, pois, necessário adoptar neste caso outro modo de proceder, e é disso que vamos tratar seguidamente.

Cálculo das raízes no 2.º caso — A 2.ª hipótese atrás considerada, única que pode interessar nesta análise, desdobra-se nas duas seguintes:

$$\begin{aligned} (a) \quad & F'(\lambda) > 0 \quad \text{e} \quad F'''(\lambda) < 0; \\ (b) \quad & F'(\lambda) < 0 \quad \text{e} \quad F'''(\lambda) > 0. \end{aligned}$$

Suponhamos, para fixar idéias, que se verifica a hipótese (a); para o outro caso, as conclusões serão análogas.

Considerando a função

$$\Phi(x) \equiv \frac{(x - \lambda)^2}{2} k + (x - \lambda) F'(\lambda) + F(\lambda),$$

em que se representa por k uma constante a determinar, vem :

$$\begin{aligned} (A) \quad & \Phi(\lambda) = F(\lambda), \\ (A') \quad & \Phi'(\lambda) = F'(\lambda), \\ (A'') \quad & \Phi''(x) \equiv k, \\ (A''') \quad & \Phi'''(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

Então, uma, e só uma, das raízes de $\Phi(x)$ estará situada no interior de (λ, α) , se fôr $\Phi(\alpha) < 0$, visto que, em virtude da hipótese e de (A), se tem $\Phi(\lambda) > 0$.

Mas, fazendo $\psi(x) \equiv F(x) - \Phi(x)$, será $\Phi(\alpha) < 0$, se fôr $\psi(\alpha) > 0$, visto que se tem $F(\alpha) = 0$. Finalmente, pode afirmar-se que será $\psi(x) > 0$ no interior de (λ, μ) e, portanto, $\psi(\alpha) > 0$, se a constante k fôr determinada por uma qualquer, das condições seguintes, que virá concretizar (A''):

$$\begin{aligned} (\delta) \quad & \Phi(\mu) = F(\mu), \\ (\delta') \quad & \Phi'(\mu) = F'(\mu), \\ (\delta'') \quad & \Phi''(\mu) = F''(\mu). \end{aligned}$$

Basta provar a afirmação para o primeiro caso. Suponhamos, pois, que se verifica (δ): então é fácil ver que o sinal de $\psi(x)$ não muda no intervalo (λ, μ) . Com efeito, de (A) e de (δ) resulta, respectivamente, $\psi(\lambda) = 0$ e $\psi(\mu) = 0$, isto é, a função $\psi(x)$ anula-se nos extremos do intervalo (λ, μ) . Então, se houvesse uma raiz, ε , de $\psi(x)$ entre λ e μ , existiria⁽¹⁾ também uma raiz, β , de $\psi'(x)$ entre λ e ε , e outra, γ , do mesmo polinómio, entre ε e μ , visto que a função $\psi(x)$ se anularia em três pontos distintos, λ , ε e μ ; como se tem, igualmente, $\psi'(\lambda) = 0$ [em virtude de (A')], haveria duas raízes distintas de $\psi''(x)$ no interior de (λ, μ) — uma, entre λ e β , e a outra, entre β e γ — o que é absurdo, visto ser $\psi'''(x) \equiv F'''(x) < 0$ e, portanto, $\psi''(x)$ decrescente, naquêlê intervalo. O sinal de $\psi(x)$ é, pois, constante no intervalo (λ, μ) , visto que esta função não chega a anular-se no interior do mesmo. Por outro lado, como é $\psi(\lambda) = \psi(\mu) = 0$, existe um zero, β , de $\psi'(x)$ entre λ e μ ; e, por ser ainda $\psi'(\lambda) = \psi'(\beta) = 0$, existe um zero, ω , de $\psi''(x)$ entre λ e β .

(¹) Pelo teorema de ROLLE.

Ora, como já se viu, $\psi''(x)$ é decrescente no intervalo (λ, μ) ; então, será $\psi''(x) > 0$, para $\lambda < x < \omega$, e, portanto, $\psi'(x) > 0$, para $\lambda < x < \omega$, visto que, em virtude de (A') , se tem $\psi'(\lambda) = 0$. Anàlogamente se conclue, atendendo a (A) , que é $\psi(x) > 0$ para $\lambda < x < \omega$. Mas, como o sinal de $\psi(x)$ é constante no intervalo (λ, μ) , ter-se-á: $\psi(x) > 0$ para $\lambda < x < \mu$, — como se pretendia demonstrar.

Assim, quando k é determinada pela condição (δ) , existe, com efeito, uma, e só uma, raiz de $\Phi(x)$ entre λ e α , e o processo indicado é, portanto, aceitável.

Resolvendo a equação $\Phi(x) = 0$ obtém-se, como acabámos de ver, um valor aproximado de α compreendido entre λ e α , que podemos designar por λ_1 ; anàlogamente se determinava um outro valor aproximado de α , que designaremos por μ_1 , compreendido entre α e μ . Desta forma é-se levado a substituir o intervalo (λ, μ) por outro (λ_1, μ_1) de menor amplitude; do intervalo (λ_1, μ_1) passar-se-ia, em seguida, pelo mesmo processo, para um novo intervalo (λ_2, μ_2) , ainda mais apertado; e, assim, sucessivamente. As duas sucessões

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots; \\ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots; \end{aligned}$$

crescente a primeira e decrescente a segunda, terão por limite comum a raiz α , como se pode concluir, aplicando ainda o corolário do teorema fundamental.

Observações. I — Mesmo para o caso em que é $F'(\lambda). F'''(\lambda) > 0$, se podem imaginar processos análogos aos anteriores.

II — Se em vez de ter definido $\Phi(x)$ tal como o fizemos, tivéssemos tomado $\Phi(x) \equiv (x - \lambda)k + F(\lambda)$, teríamos obtido, raciocinando de modo análogo, em vez de três, dois processos diferentes, um dos quais é o conhecido método da corda, que se emprega associado ao da tangente ou de NEWTON-FOURIER; o outro método é igualmente conhecido⁽¹⁾ e corresponde a tomar $\mu_1 = -\frac{F(\lambda)}{F'(\lambda)}$.

⁽¹⁾ Vide Álgebra de Weber.

Interpretação geométrica — Recorrendo, agora, à imagem geométrica, pode dizer-se que o tomar a função

$$\varphi(x) \equiv \frac{x^2}{2} F''(0) + x F'(0) + F(0)$$

corresponde ao emprêgo duma parábola, de eixo paralelo ao eixo das ordenadas, e que tem, com a curva representativa da função $F(x)$, um contacto de segunda ordem, no ponto $[0, F(0)]$. Por outro lado, a função

$$\Phi(x) \equiv \frac{(x - \lambda)^2}{2} k + (x - \lambda) F'(\lambda) + F(\lambda)$$

corresponde a uma parábola de eixo paralelo ao eixo das ordenadas, tangente à curva de equação $y = F(x)$, no ponto $[\lambda, F(\lambda)]$, e que, no caso em que o valor de k é determinado pela condição $\Phi(\mu) = F(\mu)$, corta a mesma curva no ponto $[\mu, F(\mu)]$.

§ 6 — Generalização

Os resultados anteriores podem, fàcilmente, generalizar-se. Seja $F(x) = 0$ uma equação algébrica de coeficientes reais e de grau n , que admite, pelo menos, uma solução real, e seja α a raiz real de menor valor absoluto de $F(x) = 0$. Consideremos agora a função

$$\varphi(x) \equiv \frac{x^p}{p!} F^{(p)}(0) + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} F^{(p-1)}(0) + \dots + x F'(0) + F(0),$$

determinada pelas condições

$$\begin{aligned} (R_0) \quad & \varphi(0) = F(0) \quad , \\ (R_1) \quad & \varphi'(0) = F'(0) \quad , \\ & \dots\dots\dots , \\ (R_p) \quad & \varphi^{(p)}(0) = F^{(p)}(0), \\ (R_{p+1}) \quad & \varphi^{(p+1)}(x) \equiv 0 \quad , \end{aligned}$$

e que é formada, como se vê, pelos $p + 1$ últimos termos de $F(x)$, primeiro membro da equação proposta, suposto ordenado em ordem decrescente.

Teorema — É condição suficiente para que um dos zeros de $\varphi(x)$ esteja compreendido entre 0 e α , que se tenha

$$(H) \quad \alpha^{p+1} F(0) F^{(p+1)}(x) > 0, \text{ para todos os valores de } x$$

tais que $0 < \frac{x}{\alpha} < 1$. Pode acrescentar-se: Não haverá, então, mais do que um zero de $\varphi(x)$ entre 0 e α , se fôr

$$(H_1) \quad \alpha F(0) F'(x) < 0, \text{ para } 0 < \frac{x}{\alpha} < 1.$$

Dem. da 1.^a parte. — Suponhamos, em primeiro lugar, que a raiz α é positiva, e se tem $F(0) > 0$. Neste caso, a condição do enunciado simplifica-se, e toma a forma

$$(h) \quad F^{(p+1)}(x) > 0, \text{ para } 0 < x < \alpha.$$

Fazendo, agora, $\psi(x) \equiv F(x) - \varphi(x)$, as condições (R_0) a (R_{p+1}) serão equivalentes, pela mesma ordem, às seguintes:

$$\begin{aligned} (r_0) \quad & \psi(0) = 0, \\ (r_1) \quad & \psi'(0) = 0, \\ & \dots\dots\dots \\ (r_p) \quad & \psi^{(p)}(0) = 0, \\ (r_{p+1}) \quad & \psi^{(p+1)}(x) \equiv F^{(p+1)}(x). \end{aligned}$$

Então virá, sucessivamente:

$$\begin{aligned} (j) \quad & \psi^{(p+1)}(x) > 0, \text{ para } 0 < x < \alpha \text{ [De (h) e de (r}_{p+1}\text{)]}; \\ (a_0) \quad & \psi^{(p)}(x), \text{ crescente no intervalo } (0, \alpha); \\ (b_0) \quad & \psi^{(p)}(x) > 0, \text{ para } 0 < x \leq \alpha \text{ [De (a}_0\text{) e de (r}_p\text{)]}; \\ (a_1) \quad & \psi^{(p-1)}(x), \text{ crescente no intervalo } (0, \alpha); \\ (b_1) \quad & \psi^{(p-1)}(x) > 0, \text{ para } 0 < x \leq \alpha \text{ [De (a}_1\text{) e de (r}_{p-1}\text{)]}; \\ & \dots\dots\dots \\ (b_{p-1}) \quad & \psi'(x) > 0, \text{ para } 0 < x \leq \alpha \text{ [De (a}_{p-1}\text{) e de (r}_1\text{)]}; \\ (a_p) \quad & \psi(x), \text{ crescente no intervalo } (0, \alpha); \\ (b_p) \quad & \psi(x) > 0, \text{ para } 0 < x \leq \alpha \text{ [De (a}_p\text{) e de (r}_0\text{)] }^{(1)}. \end{aligned}$$

(1) Usando o simbolismo da Lógica matemática, podia escrever-se, condensadamente,

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_i) \cdot (r_{p-i}) \rightarrow (b_i) \\ (b_i) \rightarrow (a_{i+1}) \end{array} \right., \text{ para } i = 0, 1, 2, \dots, p.$$

Dadas duas proposições A e B , a expressão $A \rightarrow B$ significa: B resulta de A ; por outro lado $A \cdot B$ traduz a afirmação simultânea de A e de B .

De (b_p) resulta, ainda, em particular, $\psi(\alpha) > 0$, e, portanto, $\varphi(\alpha) < 0$, visto que é $\psi(x) = F(x) - \varphi(x)$, e se tem $F(\alpha) = 0$. Como, ao mesmo tempo, é $\varphi(0) > 0$ [em virtude de (R_0) , e visto ser, por hipótese, $F(0) > 0$], existirá uma raiz de $\varphi(x)$ entre 0 e α : o teorema é, pois, verdadeiro no caso considerado.

Suponhamos, agora, que se tem $F(0) < 0$, sendo α ainda um número positivo. A condição (H) do enunciado tomará neste caso, o aspecto

$$(h') \quad F^{(p+1)}(x) < 0, \text{ para } 0 < x < \alpha.$$

Fazendo $F_1(x) = -F(x)$, as equações $F(x) = 0$ e $F_1(x) = 0$ serão equivalentes; além disso, ter-se-á, em virtude de (h') , e por ser $F_1^{(p+1)}(x) = -F^{(p+1)}(x)$,

$$\begin{cases} F_1(0) > 0 \\ F_1^{(p+1)}(x) > 0 \end{cases} \quad [0 < x < \alpha].$$

Mas é este o caso anterior: haverá, então, um zero de $-\varphi(x)$ e, portanto, de $\varphi(x)$ entre 0 e α . O teorema é, pois, ainda verdadeiro.

Resta considerar o caso em que é $\alpha < 0$. Então, (H) toma a forma

$$(h'') \quad (-1)^{p+1} F(0) F^{(p+1)}(x) > 0, \text{ para } \alpha < x < 0.$$

Efectuemos a transformação $y = -x$, e ponhamos $F(-y) = F_2(y)$, $\varphi(-y) = \varphi_2(y)$. A raiz α da equação proposta corresponderá a raiz $\alpha' = -\alpha$, positiva, da equação $F_2(y) = 0$. Como se tem

$$F_2^{(p+1)}(y) = (-1)^{p+1} F^{(p+1)}(x),$$

resultará daqui e de (h'')

$$F_2(0) \cdot F_2^{(p+1)}(y) > 0, \text{ para } 0 < y < \alpha',$$

e recaímos, dêste modo, em qualquer dos casos anteriores, visto que se tem $F_2(0) = F(0)$. Haverá então uma raiz η de $\varphi_2(x)$ entre 0 e α' , e, portanto, uma raiz $\xi = -\eta$ de $\varphi(x)$ entre 0 e α . O teorema é, pois, verdadeiro tam-

bém neste caso, e, como já fôram consideradas tôdas as hipóteses possíveis, será verdadeiro em qualquer caso ⁽¹⁾.

Dem. da 2.ª parte. — Basta considerar a hipótese em que é $\alpha > 0$ e $F(0) < 0$. Para a extensão aos restantes casos, pode proceder-se como fizemos na 1.ª parte.

No caso que estamos a considerar, (H_1) transforma-se em

$$(h_1) \quad F'(x) < 0, \quad \text{para } 0 < x < \alpha.$$

Então, visto que supomos ainda verificada a hipótese (H) , será também verdadeira a proposição (a_p) [Dem. da 1.ª parte]: a função $\psi(x)$ será, pois, crescente no intervalo $(0, \alpha)$. Como se tem, por outro lado, $\psi(x) = F(x) - \varphi(x)$, e a função $F(x)$ é, em virtude de (h_1) , decrescente no intervalo $(0, \alpha)$, segue-se que $\varphi(x)$ é também decrescente no mesmo intervalo, e, portanto, não poderá haver mais de uma raiz de $\varphi(x)$ entre 0 e α , como se pretendia demonstrar.

Observação. — É manifesto que a proposição demonstrada só poderá utilizar-se com vantagem nos casos em que é $p = 1$ e $p = 2$. Êsses foram os casos estudados nos dois parágrafos anteriores.

Seja agora α uma solução real qualquer da equação $F(x) = 0$. Sejam, por outro lado, λ e μ , respectivamente, os extremos inferior e superior dum intervalo que contenha α no seu interior. Pôsto isto, consideremos a função $\Phi(x)$ definida pelas condições

$$\begin{aligned} (K) \quad & \Phi^{(p+1)}(x) \equiv 0, \\ (C_i) \quad & \Phi^{(i)}(\lambda) = F^{(i)}(\lambda) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, r-1) \end{aligned} \quad (2)$$

⁽¹⁾ Usando ainda o simbolismo da Lógica matemática, podíamos escrever

$$(h) + (h') + (h'') \equiv (H).$$

Dum modo geral $A + B + C$ traduz a afirmação duma, pelo menos, das proposições A , B , e C , sendo \equiv o sinal de equivalência lógica.

⁽²⁾ Por comodidade, consideramos como derivada de ordem zero a própria função.

e ainda

$$(\Gamma_h) \quad \Phi^{(m+h)}(\mu) = F^{(m+h)}(\mu) \quad (h = 0, 1, 2, \dots, s-1),$$

tomando para m , arbitrariamente um dos valores $0, 1, 2, \dots, r$, e sendo $r + s = p + 1$. Tal função será, evidentemente, da forma

$$\begin{aligned} \Phi(x) \equiv & (x - \lambda)^p k_0 + (x - \lambda)^{p-1} k_1 + \dots + (x - \lambda)^r k_{p-r} + \\ & + \frac{(x - \lambda)^{r-1}}{(r-1)!} F^{(r-1)}(\lambda) + \dots + (x - \lambda) F'(\lambda) + F(\lambda), \end{aligned}$$

onde as constantes k_0, k_1, \dots, k_{p-r} são fixadas pelas condições (Γ_h) .

Teorema. — *Para que exista um zero de $\Phi(x)$, entre λ e μ , basta que o produto $(-1)^{s+1} F(\mu) \cdot F^{(p+1)}(x)$ seja menor do que zero, para todos os valores de x , tais que $\lambda < x < \mu$.*

Dem. — Limitar-nos-emos a fazer a demonstração para o caso em que é: $m = 0, r \geq s$, s ímpar e $F(\mu) > 0$.

Suponhamos, pois, que se verificam estas condições, e se tem $F^{(p+1)}(x) < 0$ para $\lambda < x < \mu$: vamos provar que existe um zero de $\Phi(x)$ entre λ e μ . Para isso, introduzamos a função $\psi(x) \equiv F(x) - \Phi(x)$; as condições (K) , (C_i) e (Γ_h) serão agora equivalentes, pela mesma ordem, às seguintes

$$\begin{aligned} (k) \quad & \psi^{(p+1)}(x) \equiv F^{(p+1)}(x), \\ (c_i) \quad & \psi^{(i)}(\lambda) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, r-1), \\ (\gamma_h) \quad & \psi^{(h)}(\mu) = 0 \quad (h = 0, 1, \dots, s-1). \end{aligned}$$

Ora o sinal de $\psi(x)$ é constante no intervalo (λ, μ) . Com efeito, se esta função se anulasse num ponto $\hat{\delta}$ compreendido entre λ e μ , existiriam, por virtude de (c_0) e de (γ_0) , duas raízes de $\psi'(x)$ entre λ e μ ; daqui e das condições (c_1) e (γ_1) resulta, igualmente, que existiriam três zeros de $\psi''(x)$ entre λ e μ ; e, assim, sucessivamente, até se chegar à função $\psi^{(s)}(x)$, que teria $s + 1$ zeros entre os mesmos limites, em virtude das condições (c_{s-1}) e (γ_{s-1}) , e visto ser, por hipótese, $r \geq s$. Mas, por força de (c_s) , existiriam, pelo menos, $s + 1$ zeros de $\psi^{(s+1)}(x)$ entre λ e μ , e o mesmo aconteceria com tôdas as funções seguintes até à ordem r ,

visto ser ainda $\psi^{(r-1)}(\lambda) = 0$. Então, pode afirmar-se que haveria s raízes de $\psi^{(r+1)}(x)$ no interior de (λ, μ) , $s-1$ raízes de $\psi^{(r+2)}(x)$ no interior do mesmo intervalo, etc.; chega-se dêste modo à conclusão de que existiriam $s+1-(s-1)=2$ zeros de $\psi^{(p)}(x)$, portanto um zero de $\psi^{(p+1)}(x)$, entre λ e μ , visto ser $p-r=s-1$. Mas, por hipótese, é $\psi^{(p+1)}(x) < 0$, para $\lambda < x < \mu$, e não poderá haver nenhum zero daquela função entre λ e μ : é, portanto, falsa a hipótese de que $\psi(x)$ muda de sinal no intervalo (λ, μ) .

Por lado prova-se, raciocinando de modo análogo, que existe um, e um só, zero, ω_0 , de $\psi^{(p)}(x)$ entre λ e μ , por se ter $\psi(\lambda) = \psi(\mu) = 0$; então, como, em virtude da hipótese, a função $\psi^{(p)}$ é decrescente no intervalo (λ, μ) , será $\psi^{(p)}(x) > 0$ para $\lambda < x < \omega_0$. Mas também se prova que existe um, e um só, zero, ω_1 , de $\psi^{(p-1)}(x)$ entre λ e ω_0 ; então, como, em virtude da conclusão anterior, $\psi^{(p-1)}(x)$ é crescente no intervalo (λ, ω_0) , será $\psi^{(p-1)}(x) < 0$, para $\lambda < x < \omega_1$. Vê-se, pois, que, dum modo geral, para $\lambda < x < \omega_{p-j} < \mu$, se tem: $\psi^{(j)}(x) > 0$, quando $j = p, p-2, \dots, r$, e $\psi^{(j)}(x) < 0$, quando $j = p-1, \dots, r-1$, visto que $r = p - (s-1)$, e s é, por hipótese, ímpar. Mas, para as derivadas de ordem inferior a r , as condições modificam-se: em virtude de (c_{r-1}) e da conclusão anterior, ter-se-á $\psi^{(r-1)}(x) > 0$ para $\lambda < x < \omega_{p-r}$; depois, análogamente, $\psi^{(r-2)}(x) > 0$ para $\lambda < x < \omega_{p-r}$, etc.. A intervenção sucessiva das condições $(c_{r-1}), (c_{r-2}), \dots, (c_0)$, leva-nos, dêste modo, à conclusão de que é $\psi(x) > 0$ para $\lambda < x < \omega_{p-r}$. Ora já tínhamos provado que o sinal de $\psi(x)$ é constante no interior de (λ, μ) ; ter-se-á, portanto, $\psi(x) > 0$ para $\lambda < x < \mu$.

Em particular $\psi(\alpha) > 0$. Mas $\psi(\alpha) = -\Phi(\alpha)$, por ser $F(\alpha) = 0$. Então será $\Phi(\alpha) < 0$, e, como já se tem, em virtude de (C_0) e da hipótese, $\Phi(\lambda) > 0$, conclue-se que há, pelo menos, uma raiz de $\Phi(x)$ entre λ e α , q. e. d..

Observações. I — Podiam estabelecer-se condições de unicidade da raiz de $\Phi(x)$ entre λ e α . Tais condições são, no entanto, mais complexas do que as do teorema anterior, e, por isso, nos abstermos de as apresentar.

II — As conclusões são análogas quando, subsistindo as condições iniciais, λ e μ representarem, respectivamente, os extremos *superior* e *inferior* dum intervalo que contenha α .

III — O último teorema demonstrado só oferece interêsse prático nos casos, já considerados, em que é $p = 1$ e $p = 2$.

VI — É óbvio que os resultados expostos neste parágrafo são ainda aplicáveis a certas equações transcendentess.

Ao terminar, notaremos que, se, em algumas demonstrações apresentadas neste trabalho, nos afastámos do caminho mais curto, razões houve que nos levaram a proceder assim: é fácil, por exemplo, reconhecer que a demonstração, tal como a fazemos, da 1.^a parte do teorema, com que principia o último parágrafo, é indispensável para a demonstração da 2.^a parte do mesmo teorema; por outro lado, é manifesta a vantagem que há, do ponto de vista didáctico, em adoptar, para casos semelhantes, processos de demonstração análogos.