

UNIVERSIDADE DE LISBOA

REVISTA
DA
FACULDADE DE CIÊNCIAS

2.^A SÉRIE

A — CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

VOL. I



1950

BIBLIOTECA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS
Rua da Escola Politécnica
LISBOA

INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO EM ESPAÇOS DE BANACH

POR

J. SEBASTIÃO E SILVA

Introdução. O estudo da análise em espaços de Banach (e mais modernamente ainda em espaços vectoriais topológicos) tem dado origem a tão extensa bibliografia, a trabalhos tão profundos e diferenciados, que já começa a ser difícil dominar inteiramente este ramo da matemática. E, todavia, os novos métodos oferecem possibilidades de síntese que deixam a perder de vista as virtudes do cálculo vectorial, tal como este se apresenta inicialmente ao estudante de matemática ou de física. Cada resultado de análise geral tem repercussões imensas, nos mais variados e distantes domínios concretos.

Já não é portanto fácil, quando se trabalha isoladamente e com precários meios de informação, obter resultados substancialmente novos sobre a análise em espaços de Banach. Não me atrevo por isso a dar o presente estudo como um trabalho de investigação: será antes um trabalho de reelaboração. E com uma dupla finalidade: primeiro que tudo, como esforço pessoal no sentido de aclarar e definir ideias, para tentar depois ir mais longe; em segundo lugar, como instrumento de iniciação para os jovens que procurem orientar-se um pouco na imensidão da análise moderna.

Fique portanto entendido que, se não faço referências bibliográficas mais completas, é unicamente porque não dis-

ponho de meios para isso. Devo acrescentar que, para este estudo, me serviram de guia e sugestão sobretudo as memórias de HILDEBRANDT, GRAVES e LORCH indicadas na Bibliografia.

Tem ainda uma aspiração este trabalho: a de pôr em evidência o papel simplificador que a análise geral está destinada a desempenhar no ensino das matemáticas. Grande parte do cálculo diferencial e integral para funções de mais de uma variável (*mesmo de infinitas variáveis*) se pode hoje condensar nas linhas sóbrias e elegantes da análise infinitesimal para funções *de uma só variável*. E não é apenas uma economia de pensamento o que se consegue deste modo: *é a aquisição de novos e importantes resultados.* Porque, o que mais impressiona ainda, é a extraordinária potência das proposições assim generalizadas. Por exemplo, o teorema geral das funções implícitas é aplicável a equações diferenciais, integrais ou integro-diferenciais, e ao cálculo das variações, como mostra GRAVES em [II] e [III] com vários exemplos.

Dois são os conceitos que servem de base ao presente estudo: o de integral curvilíneo riemanniano e o de operador derivado (em espaços de Banach). O primeiro é uma ligeira variante do conceito de integral de Riemann-Stieltjes, tal como este vem exposto, por exemplo, na obra de E. HILLE, citada na Bibliografia (p. 51); mas não me foi possível encontrar um trabalho (que certamente existe) em que tal conceito venha explicitamente considerado com o aspecto que lhe dou aqui, isto é, sendo os valores da função integranda *operadores lineares* que actuam sobre o *vector* dx . O segundo conceito é o de derivada concebida como operador linear, segundo o ponto de vista de MICHAL e de ZORN ⁽¹⁾; mas também não me foi

⁽¹⁾ Parece ter sido MICHAL quem, pela primeira vez, em 1936, considerou a derivada sob este aspecto. (Veja-se HILLE [I], p. 74 e ZORN [II]).

possível encontrar um trabalho em que tal noção venha utilizada sistematicamente como base do cálculo diferencial e integral em espaços de Banach reais.

Trata-se depois de relacionar os dois conceitos por meio de teoremas análogos aos da análise clássica. A derivação surge como operação inversa da integração, quando, e só quando, o integral entre os dois limites a, x é independente do caminho de integração (teoremas [3.1, [3.9] e [3.10]. Tem-se aqui a generalização duma conhecida propriedade relativa a integrais curvilíneos e uma primeira analogia com a análise no campo complexo.

São estabelecidos teoremas que generalizam a regra de derivação dum produto, as regras de derivação ou integração sob os sinais de integração ou derivação, etc.; mas tome-se nota da curiosa novidade que surge no caso dos operadores bilineares assimétricos (n.ºs 6 e 9).

Para fazer realçar o mais possível a analogia com os resultados correspondentes da análise clássica, são introduzidas convenções simbólicas (n.º 5) que se me afiguram particularmente cómodas e sugestivas. Observe-se por exemplo a analogia do desenvolvimento tayloriano [8.2] com a clássica fórmula de Taylor para funções de uma só variável.

Certo é que tais analogias têm um perigo: o de poderem iludir. Requerem-se por isso, em cada caso, um exame minucioso e uma crítica acerada. Uma ligeira diferença de notação pode então ser útil para despertar a atenção.

Um outro resultado aqui exposto é a generalização do teorema do diferencial exacto (n.º 11), em que reaparece a analogia com a análise no campo complexo (teorema de Cauchy sobre funções holomorfas). Dois caminhos se podem ainda seguir na demonstração: um, correspondente à demonstração do teorema de Cauchy segundo Riemann, é mais breve, mas pressupõe a continuidade da derivada da função integranda; o outro, correspon-

dente à demonstração do teorema de Cauchy segundo Goursat, é mais longo, mas dispensa a hipótese da continuidade da derivada. O segundo caminho foi-me sugerido pela teoria das funções analíticas em anéis de Banach, segundo Lorch.

Nestas generalizações é necessário ter presente que a derivada não é agora o clássico limite da razão incremental $\Delta y/\Delta x$ e não pode portanto intervir nas deduções sob esta forma, mas sim tal como é definida no n.º 2. Por outro lado, o teorema dos acréscimos finitos tem de ser em tudo substituído pelo teorema [3.1], segundo o qual a diferença $f(b) - f(a)$ é igual ao integral de $f'(x)$ entre a e b (quando $f'(x)$ é integrável). Se a isto acrescentarmos a possibilidade de aplicar o teorema de Heine-Borel às linhas de integração e ainda o facto de se ter

$$|Au| \leq |A| |u|$$

quando A é um *operador linear contínuo* aplicado ao *vector* u , ficam indicados os pontos fundamentais que tornam possíveis as generalizações efectuadas.

Para dar uma ideia do interesse destas investigações, é abordado o estudo das funções implícitas e das funções diferenciais em espaços abstractos, segundo a ordem de ideias delineada por HILDEBRANDT e GRAVES, e, anteriormente ainda, por VOLTERRA, PAUL LÉVY e outros. Aqui, sobre tudo, se afirmam as virtudes metológicas da análise geral. E deve salientar-se que *todos os resultados expostos são ainda aplicáveis a funções de variáveis complexas*, o que é mais um exemplo do extraordinário poder de unificação dos novos métodos.

0. Indicações prévias. — Sobre as definições de «espaço de Banach», de «operador linear contínuo» e de outros conceitos aqui utilizados, pode consultar-se a minha dissertação de doutoramento (§ 1), ou então alguns dos livros indicados na Bibliografia, como p. ex. o de BANACH e o de HILLE.

Todos os espaços aqui considerados são espaços de Banach arbitrários, relativos ao corpo real ou ao corpo complexo. Para os designar, serão usados os símbolos $S, S^*, S_*, S_1, S_2, \dots, S_n$.

Quando numa questão intervierem dois ou mais espaços, subentende-se que são relativos ao mesmo corpo de escalares.

Os vectores, elementos de tais espaços, serão designados por caracteres de tipo corrente: $a, b, c, h, k, x, y, u, v, \xi, \eta$, etc., munidos ou não de índices, barras, asteriscos, etc.; quando tiverem de ser consideradas variáveis numéricas, o facto será declarado na devida altura. Para funções, serão usados os símbolos habituais: $f, g, F, G, \varphi, \rho$, etc.; os caracteres A, B designarão de preferência operadores lineares ou multilineares.

Chamaremos *produto dum operador A por um vector u* ao resultado da operação A aplicada ao elemento u e designaremos esse resultado indiferentemente pelas notações $A(u), Au$ ou $A \cdot u$.

O *zero* ou *vector nulo* em qualquer dos espaços considerados será designado pelo símbolo 0 .

Para a *norma* (*comprimento* ou *módulo*) dum vector u será usada simplesmente a notação $|u|$. A norma dum *operador linear contínuo* A é definida como o extremo superior de $|Au|$, quando u toma todos os valores tais que $|u| = 1$:

$$|A| = \sup |Au|, \quad \text{para } |u| = 1,$$

donde a propriedade $|Au| \leq |A||u|$, que, como já dissemos, intervém de maneira essencial no que se segue. A família de todas as transformações lineares contínuas de S sobre S^* é representada por $\Lambda_c(S, S^*)$; demonstra-se que esta família é ainda um espaço de Banach.

Os símbolos R, K designam respectivamente o corpo real e o corpo complexo; R^n e K^n designam os espaços n -dimensionais, real e complexo, respectivamente.

Como recurso intuitivo, o leitor pode referir-se ao

modelo euclideano, imaginando os elementos dos espaços como vectores ou pontos do espaço ordinário. Mas é preciso não perder de vista que a categoria dos espaços de Banach é muito mais extensa, incluindo o espaço de Hilbert e muitos outros dos espaços funcionais que ocorrem nas aplicações.

Dados dois números reais a, b , com $a < b$, designaremos por $\overline{a, b}$, (ou por \overline{ab} , se não houver perigo de confusão) o segmento de extremos a, b , isto é, o conjunto dos números x tais que $a \leq x \leq b$.

Aos conjuntos abertos de S chamaremos, simplesmente, *regiões* de S .

Dados $x_0 \in S$ e $\delta > 0$, designaremos por $V(x_0, \delta)$ a vizinhança δ de x_0 , isto é, o conjunto dos pontos x de S tais que $|x - x_0| < \delta$.

1. Integral curvilíneo de Riemann. — Consideremos uma função $f(x)$, definida num subconjunto X de S e cujos valores sejam elementos de $\Lambda_c(S, S^*)$, isto é, tal que

$$f(x) \in \Lambda_c(S, S^*), \text{ para cada } x \in X.$$

Seja por outro lado Γ uma *linha orientada rectificável* de S , contida em X , definida parametricamente por uma função pontual continua

$$x = \gamma(t) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Representaremos por a, b , respectivamente, a *origem* e a *extremidade* de Γ : $a = \gamma(0)$ $b = \gamma(1)$, podendo supor-se $a \neq b$ ou $a = b$.

Suponhamos ainda que, sobre Γ , a função $f(x)$ é limitada.

Seja agora π uma *partição* de Γ em arcos, mediante uma sucessão de pontos

$$\begin{aligned} x_0 = \gamma(t_0), \quad x_1 = \gamma(t_1), \quad \dots, \quad x_n = \gamma(t_n), \\ \text{com} \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = 1. \end{aligned}$$

Chamaremos *norma* de π e representaremos por $|\pi|$ o maior dos números $|x_1 - x_0|, |x_2 - x_1|, \dots, |x_n - x_{n-1}|$:

$$|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|.$$

Por *soma de Riemann de $f(x)$ relativa à partição π* entendemos todo o elemento s_π de S^* assim obtido

$$s_\pi = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) (x_i - x_{i-1}),$$

em que x_i designa um ponto *arbitrário* do arco $\widehat{x_{i-1} x_i}$, isto é: $\bar{x}_i = \gamma(\bar{t}_i)$, com $t_{i-1} \leq \bar{t}_i \leq t_i$. É necessário não perder de vista que: 1) $f(\bar{x}_i)$ é um *operador linear* que actua sobre o *vector* $x_i - x_{i-1}$; 2) dada a arbitrariedade da escolha de \bar{x}_i sobre o arco $\widehat{x_{i-1} x_i}$, a soma s_π é uma função *plurívoca* de π .

Posto isto, diremos que s_π *tende para um vector \mathcal{J} ao tender de $|\pi|$ para 0*, e escreveremos

$$\mathcal{J} = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} s_\pi,$$

quando a todo o número $\varepsilon > 0$, se puder associar um número $\delta > 0$, de modo que se tenha

$$|\mathcal{J} - s_\pi| < \varepsilon, \text{ desde que } |\pi| < \delta.$$

Se tal limite \mathcal{J} existe, diremos ainda que \mathcal{J} é *integral (riemanniano) de $f(x)$ ao longo de Γ* e escreveremos

$$[1.1] \quad \mathcal{J} = \int_{\Gamma} f(x) dx.$$

Os pontos a, b chamar-se-ão, respectivamente, o *limite inferior* e o *limite superior* de integração.

Suponhamos, por exemplo, que S é o espaço cartesiano \mathbb{R}^3 e S^* o eixo real \mathbb{R} . Sabe-se que toda a transformação linear (contínua) T de \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} é da forma $T(u) = a \cdot u$, em que a designa um vector

qualquer e $a \cdot u$ o *produto interno* de a por u . Podemos então pensar $f(x)$ como um vector, função de x . Sendo x_1, x_2, x_3 , as componentes de x e X_1, X_2, X_3 as de $f(x)$, o integral [1.1] pode agora apresentar-se sob a forma clássica dos integrais curvilíneos

$$\mathcal{J} = \int_{\Gamma} (X_1 dx + X_2 dx_2 + X_3 dx_3).$$

Mais concretamente ainda, podemos imaginar que $f(x)$ representa uma força com o ponto de aplicação em x . Então, como é sabido, o integral \mathcal{J} dá-nos o trabalho da referida força, quando x descreve Γ .

Do critério de convergência de Cauchy, verificado em S^* , deduz-se facilmente que, para a existência do integral [1.1], é condição necessária e suficiente que, a todo o $\epsilon > 0$, corresponda um $\delta > 0$, tal que

$$|s_{\pi_1} - s_{\pi_2}| < \epsilon, \quad \text{para} \quad |\pi_1| < \delta, \quad |\pi_2| < \delta.$$

Em particular, esta condição será satisfeita se $f(x)$ for função contínua de x sobre Γ . Com efeito, como a linha Γ constitue um subespaço compacto de S , a que é portanto aplicável o teorema de Heine-Borel, a função $f(x)$ será *uniformemente contínua* sobre Γ desde que seja contínua sobre Γ , sendo então possível determinar, para cada $\epsilon > 0$, um $\delta > 0$, de modo que se tenha para cada par de pontos x, x' de Γ :

$$|f(x) - f(x')| < \epsilon \quad \text{desde que} \quad |x - x'| < \delta;$$

e nestas condições, atendendo a que é sempre

$$|f(x)u| \leq |f(x)| \cdot |u|, \quad \text{para} \quad x \in X, \quad u \in S,$$

visto ser $f(x)$ um operador *linear contínuo*, para todo o $x \in X$, facilmente se reconhece, como no caso clássico, que

$$|s_{\pi_1} - s_{\pi_2}| \leq \epsilon |\Gamma|, \quad \text{para} \quad |\pi_1| < \frac{\delta}{2}, \quad |\pi_2| < \frac{\delta}{2},$$

designando por $|\Gamma|$ o *comprimento* de Γ , isto é, pondo

$$|\Gamma| = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^n |x_i - x_{i-1}|.$$

[1.2] A continuidade de $f(x)$ sobre Γ é pois garantia de existência do integral de $f(x)$ ao longo de Γ .

Da definição resultam ainda as propriedades:

$$[1.3] \quad \int_{\Gamma} f(x) dx \leq M |\Gamma|, \quad \text{se } |f(x)| \leq M \quad \text{sobre } \Gamma$$

$$[1.4] \quad \int_{\Gamma} [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int_{\Gamma} f_1(x) dx + \int_{\Gamma} f_2(x) dx.$$

$$[1.5] \quad \int_{\Gamma} A f(x) dx = A \int_{\Gamma} f(x) dx, \quad \text{sendo } A \in \Lambda_c(S^*, S^*).$$

$$[1.6] \quad \int_{\Gamma} f(x) dx = \int_{\Gamma_1} f(x) dx + \int_{\Gamma_2} f(x) dx, \quad \text{sendo } \Gamma_1, \Gamma_2$$

dois arcos em que fique dividida Γ por um seu ponto qualquer.

2. Conceito de derivada. — Seja agora $f(x)$ uma função definida numa região D de S e com os valores em S^* , isto é

$$f(x) \in S^* \quad \text{para cada } x \in D.$$

Diz-se que $f(x)$ é *F-diferencial* num dado ponto a de D , quando existe um elemento A de $\Lambda_c(S, S^*)$ tal que

$$f(a + h) = f(a) + A h + R(h),$$

sendo $R(h)$ um *infinitésimo de ordem superior à primeira a respeito de h* , isto é, tendo-se

$$R(h) \cdot |h|^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{quando } h \rightarrow 0.$$

Resulta da definição que não pode existir mais de um operador A nestas condições. Se um tal operador existe, será chamado *a derivada* (ou *o operador derivado*) de $f(x)$ no ponto a , escrevendo-se então:

$$A = f'(a) \quad \text{ou} \quad A = \left[\frac{d}{dx} f(x) \right]_a$$

Também resulta logo da definição que, se $f(x)$ é F -diferenciável no ponto a , $f(x)$ é contínua em a .

A função $f(x)$ diz-se F -diferenciável em D , quando o for em todos os pontos de D , e então qualquer dos símbolos $f'(x)$ ou $\frac{d}{dx}f(x)$ representará a *função derivada* (ou simplesmente «a derivada») de $f(x)$ em D .

A expressão « F -diferenciável» usa-se como abreviatura de «diferenciável no sentido de Fréchet», mas, como não teremos de considerar outros tipos de diferenciabilidade, passaremos a dizer simplesmente «diferenciável» em vez de « F -diferenciável».

Suponhamos que $S = \mathbb{R}^n$, $S^* = \mathbb{R}^m$. Então, pondo $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, a função $y = f(x)$, corresponderá a um sistema de m funções *reais* em n variáveis *reais*

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

a função $f(x)$ será diferenciável no ponto $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, quando cada uma das funções f_i o for nesse ponto, e a derivada $f'(a)$ será então representada pela matriz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right]$, para $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$. Se em particular $m = 1$, tal matriz reduz-se a um vector: o *gradiente* de $f(x)$ no ponto a .

As conclusões serão análogas se, em vez de espaços cartesianos reais, forem considerados espaços cartesianos complexos.

Da definição deduz-se ainda que: *a derivada da soma é a soma das derivadas; a derivada duma constante é o operador 0; a derivada de x em ordem a x é o operador idêntico, I, etc.* Observe-se ainda que, no caso de existir $f'(x)$, se tem:

$$[2.1] \quad \frac{d}{dx} [A f(x)] = A f'(x), \quad \text{sendo } A \in \Lambda_c(S^*, S^*).$$

Quanto à regra de *derivação das funções compostas*, é também fácil estabelecê-la, como no caso clássico, tendo

agora em atenção a linearidade e a continuidade do operador derivado.

É claro que a noção de «derivada parcial» se estende imediatamente ao caso actual, podendo ainda ser usadas as mesmas notações.

Consideremos uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, definida numa região D do espaço produto $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ e com os valores em S^* . Fácilmente se reconhece ⁽¹⁾ que $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ será diferenciável num dado ponto (a_1, a_2, \dots, a_n) de D (segundo a definição precedente), se, e só se, existirem n operadores A_1, A_2, \dots, A_n , com $A_i \in \Lambda_c(S_i, S^*)$, $i=1, 2, \dots, n$, tais que

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + R(h_1, h_2, \dots, h_n),$$

sendo $R(h_1, h_2, \dots, h_n)$ um infinitésimo de ordem superior à primeira a respeito de $|(h_1, h_2, \dots, h_n)|$. Se tal condição é verificada, tem-se necessariamente:

$$A_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Entretanto, convém recordar que a norma dum elemento (x_1, x_2, \dots, x_n) do espaço produto $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, pode indiferentemente ser definida de qualquer dos seguintes modos:

$$|(x_1, x_2, \dots, x_n)| \begin{cases} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \\ = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \\ = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|). \end{cases}$$

Embora estas definições (e outras ainda) não sejam equivalentes entre si, determinam em S a mesma *topologia* e a mesma noção de *F-diferenciabilidade*; a respeito de

(1) Ver NOTAS FINAIS, I.

qualquer delas, S é um espaço de Banach, supondo definidas em S a adição e a multiplicação escalar como é uso neste caso. Porém, as duas últimas são as mais cómodas para o nosso estudo.

É agora fácil ver que, dada a arbitrariedade dos espaços de Banach considerados, a *regra de derivação das funções compostas para funções de mais duma variável, se obtém imediatamente como caso particular da regra correspondente para as funções duma variável.*

3. A derivação como operação inversa da integração.

— Seja agora D uma região *conexa* de S e consideremos uma função $f(x)$ definida em D , com os valores em S^* . Então teremos o seguinte

[3.1] TEOREMA. *Se $f(x)$ é diferenciável em D e $f'(x)$ é integrável ao longo duma dada linha rectificável Γ contida em D , tem-se*

$$\int_{\Gamma} f'(x) dx = f(b) - f(a),$$

sendo a a origem e b a extremidade de Γ

Demonstração ⁽¹⁾. Sejam δ, ϵ números positivos arbitrários. Visto que $f(x)$ é diferenciável em D , a cada $x \in D$ podemos associar um número positivo $\delta_x < \delta$, tal que

$$[3.2] \quad f(\bar{x}) - f(x) = f'(x)(\bar{x} - x) + R(\bar{x}, x),$$

com $|R(\bar{x}, x)| < \epsilon |\bar{x} - x|$, desde que $|\bar{x} - x| < \delta_x$. Suponhamos agora que \bar{x}, x são pontos de Γ :

$$x = \gamma(t) \quad \bar{x} = \gamma(\bar{t}).$$

(1) Esta demonstração não é mais do que uma adaptação, ao caso presente, da demonstração dada por GRAVES, em [I], pg. 171.

Dada a continuidade de $\gamma(t)$, podemos associar a cada $t \in \overline{0,1}$ um $\rho_t > 0$, de modo que se tenha:

$$[3.3] \quad |\bar{x} - x| < \delta_x \quad \text{para} \quad |\bar{t} - t| < \rho_t.$$

Mas a família de segmentos $\overline{t - \rho_t, t + \rho_t}$, para $0 \leq t \leq 1$, constitui uma cobertura do conjunto $\overline{0,1}$. Então, segundo o teorema de Heine-Borel, podemos formar uma cobertura do conjunto $\overline{0,1}$ com um número finito desses segmentos. Sejam t_0, t_1, \dots, t_n os centros consecutivos dos segmentos escolhidos e suponhamos que a escolha foi efectuada de modo que se tenha $t_0 = 0, t_n = 1$ e que nenhum dos segmentos fique contido num dos outros (o que é sempre possível). Nestas condições, qualquer que seja $i = 1, 2, \dots, n$, podemos fixar entre t_{i-1} e t_i um ponto τ_i , interior aos dois segmentos escolhidos com centros em t_{i-1} e t_i . Ponhamos agora:

$$x_i = \gamma(t_i), \quad \xi_i = \gamma(\tau_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e designemos por π a partição determinada em Γ pelos pontos x_i, ξ_i . É claro que, por força de [3.3] e por se ter $\delta_x < \delta$ qualquer que seja $x \in \Gamma$, virá $|\pi| < \delta$. Como soma de Riemann relativa a π podemos tomar

$$s_\pi^* = \sum_{i=1}^n [f'(x_{i-1})(\xi_i - x_{i-1}) + f'(x_i)(x_i - \xi_i)],$$

ou seja, atendendo a [3.2]:

$$\begin{aligned} s_\pi^* &= \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - f(x_{i-1}) + f(x_i) - f(\xi_i)] - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n [R(\xi_i, x_{i-1}) - R(\xi_i, x_i)] = \\ &= f(b) - f(a) - \sum_{i=1}^n [R(\xi_i, x_{i-1}) - R(\xi_i, x_i)]. \end{aligned}$$

Mas, visto que se tem $|\xi_i - x_i| < \delta_{x_i}$, $|\xi_i - x_{i-1}| < \delta_{x_{i-1}}$, para $i = 1, 2, \dots, n$, virá

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n [R(\xi_i, x_{i-1}) - R(\xi_i, x_i)] \right| < \\ & < \epsilon \sum_{i=1}^n (|\xi_i - x_{i-1}| + |x_i - \xi_i|) \leq \epsilon |\Gamma|. \end{aligned}$$

Note-se que s_π^* é função de δ . Atendendo a que $f'(x)$ é integrável ao longo de Γ e a que $|\pi| < \delta$, podemos então escolher δ de modo que se tenha

$$|s_\pi^* - \int_\Gamma f'(x) dx| < \epsilon$$

e portanto será:

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a) - \int_\Gamma f'(x) dx| &\leq |f(b) - f(a) - s_\pi^*| + \\ &+ |s_\pi^* - \int_\Gamma f'(x) dx| < \epsilon(1 + |\Gamma|). \end{aligned}$$

Dada a arbitrariedade de ϵ , fica provado o que pretendíamos.

Como veremos, esta proposição desempenha em tudo o que se segue o papel do *teorema dos acréscimos finitos de Lagrange*. Têm-se desde logo as seguintes consequências

[3.4] *Se a derivada de $f(x)$ é idênticamente nula em D , a função $f(x)$ reduz-se a uma constante sobre D .*

[3.5] *Duas funções $f(x)$, $g(x)$, tais que $f'(x) \equiv g'(x)$ diferem quando muito por uma constante.*

Seja agora $F(x)$ uma função definida na região D de S e com os valores em $\Lambda_c(S, S^*)$. Como acabamos de ver, se $F(x)$ é derivada de alguma função $f(x)$ em D , o integral de $F(x)$ ao longo duma linha rectificável Γ contida em D ,

quando existe, só depende dos limites a, b de integração, pois que será então:

$$\int_{\Gamma} F(x) dx = f(b) - f(a).$$

Dum modo geral, sempre que o integral de $F(x)$ ao longo de Γ tem um valor que só depende dos limites a, b , sendo portanto independente do caminho Γ , representaremos este integral pela notação

$$\int_a^b F(x) dx.$$

É fácil ver que, uma vez verificada esta circunstância, se tem, por força de [1.6]:

$$[3.6] \quad \int_a^b F(x) dx + \int_b^c F(x) dx = \int_a^c F(x) dx,$$

quaisquer que sejam $a, b, c \in D$. Além disso, sendo a, b bastante próximos para que o segmento \overline{ab} esteja contido em D , virá ainda ⁽¹⁾

$$[3.7] \quad \left| \int_a^b F(x) dx \right| \leq M |b - a|, \text{ se } |F(x)| \leq M \text{ sobre } \overline{ab}.$$

Por outro lado, observemos que é sempre:

$$[3.8] \quad \int_a^b A dx = A(b - a), \text{ para } a, b \in S; A \in \Lambda_c(S, S^*).$$

Ora, fazendo intervir sucessivamente [3.6], [1.4], [3.8] e [3.1], tem-se o resultado:

⁽¹⁾ Chama-se *segmento* \overline{ab} de S ao conjunto dos pontos x tais que $x = a + t(b - a)$, com $0 \leq t \leq 1$. Um conjunto M diz-se *convexo*, quando todo o segmento de extremos M está contido em M . Todo o espaço de Banach, S , é *localmente convexo*, isto é, podem-se tomar para vizinhanças de cada seu ponto x unicamente conjuntos convexos (esferas com centro em x). Ora, se D é uma região (conjunto aberto) de S , para cada ponto x de D há uma vizinhança de x contida em D .

[3.9] TEOREMA. *Se o integral de $F(x)$ ao longo de qualquer linha rectificável contida em D existe e só depende dos limites de integração, a função $f(x)$ assim definida:*

$$f(x) = \int_a^x F(u) du, \quad \text{com } a \in D,$$

é diferenciável em todo o ponto x_0 de D em que $F(x)$ for contínua, tendo-se precisamente

$$f'(x_0) = F(x_0).$$

A demonstração é ainda semelhante à que se usa no caso clássico.

As duas proposições [3.1], [3.5] permite-nos em particular afirmar que:

[3.10] *Se $F(x)$ é contínua em D , para que o valor do integral $\int_\Gamma F(x) dx$ (estando Γ contida em D) só dependa dos limites de integração, é necessário e suficiente que $F(x)$ seja derivada de alguma função em D .*

Seja por exemplo $S = \mathbb{R}^3$, $S^* = \mathbb{R}$. Podemos então imaginar que $F(x)$ representa, para cada $x \in D$, uma força aplicada ao ponto x teremos assim um *sistema de forças* definido na região D . Pois bem o teorema [3.10] exprime o seguinte facto bem conhecido em Mecânica: «Para que o trabalho executado pela força $F(x)$, ao passar dum ponto a para outro ponto b da região D , ao longo duma linha Γ , só dependa de a e de b , e não do caminho Γ , é necessário e suficiente que $F(x)$ seja o gradiente de alguma função $f(x)$ (dizendo-se então que o sistema de forças é conservativo)».

4. Mudança de variáveis nos integrais curvilíneos. — Consideremos, além de S e S^* , um outro espaço de Banach, S_* , e, por outro lado: uma função *contínua* $F(x)$, definida numa região D de S , com os valores em $\Lambda_c(S, S^*)$; uma função *contínua* $\varphi(x)$, definida numa região D_* de S_* , com os valores em D . Em símbolos:

$$\begin{cases} F(x) \in \Lambda_c(S, S^*), & \text{para cada } x \in D \\ \varphi(u) \in D, & \text{para cada } u \in D_*. \end{cases}$$

Seja agora C uma linha rectificável de D_* , definida parametricamente por uma função pontual contínua

$$u = g(t) \quad [0 \leq t \leq 1],$$

e seja Γ a imagem de C por meio de φ :

$$\Gamma = \varphi(C): \quad \gamma(t) = \varphi(g(t)) \quad [0 \leq t \leq 1].$$

Posto isto, consideremos uma partição π de Γ , definida por pontos $x_i = \gamma(t_i)$ $[0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1]$. Então, escolhidos arbitrariamente os pontos $\bar{x}_i = \gamma(\bar{t}_i)$ $[t_{i-1} < \bar{t}_i < t_i]$ e posto $u_i = g(t_i)$, $\bar{u}_i = g(\bar{t}_i)$, teremos a soma de Riemann

$$s_\pi = \sum_{i=1}^n F(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n F[\varphi(\bar{u}_i)] [\varphi(u_i) - \varphi(u_{i-1})].$$

Vê-se pois que o limite de s_π quando $|\pi| \rightarrow 0$ é o integral de *Riemann-Stieltjes* de $F[\varphi(u)]$ ao longo de C :

$$\int_\Gamma F(x) dx = \int_C F[\varphi(u)] d\varphi(u).$$

(Note-se que a função $\varphi(u)$ é de variação limitada sobre C , pois que se tem $\sup_\pi \sum |\varphi(u_i) - \varphi(u_{i-1})| = |\Gamma|$).

Suponhamos agora que a função $\varphi(x)$ admite derivada contínua na região D_* . Usando uma técnica semelhante à que nos serviu para demonstrar o teorema [3.1], é então fácil provar que

$$\int_\Gamma F(x) dx = \int_C F[\varphi(u)] \varphi'(u) du,$$

recaindo assim no integral riemanniano como o tínhamos definido.

Em particular, ter-se-á

$$\int_\Gamma F(x) dx = \int_0^1 F[\gamma(t)] d\gamma(t),$$

ou, na hipótese de $\gamma(t)$ ser diferenciável:

$$\int_{\Gamma} F(x) dx = \int_0^1 F[\gamma(t)] \gamma'(t) dt.$$

E assim se reduz a integração curvilínea à integração ordinária segundo o eixo real, no sentido de Riemann-Graves.

5. Operadores multilineares. Derivadas de ordem superior à primeira. — Consideremos uma função $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definida em S^n e com os valores em S^* . Como se sabe, diz-se que o operador G é *n vezes linear*, quando resulta linear a respeito de cada um dos seus argumentos u_1, u_2, \dots, u_n .

Diremos, por outro lado, que G é *contínuo*, quando for contínuo a respeito do complexo dos seus argumentos, isto é, quando representar uma função contínua do ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) no espaço produto S^n . É fácil reconhecer que, sendo G um operador *n vezes linear*, G será contínuo, se, e só se, a função $|G(x_1, x_2, \dots, x_n)|$ for limitada para $|x_1| = |x_2| = \dots = |x_n| = 1$. Verificada esta condição, define-se *norma* de G tal como segue:

$$|G| = \sup |G(x_1, x_2, \dots, x_n)|, \text{ para } |x_1| = |x_2| = \dots = |x_n| = 1$$

Da definição resulta imediatamente que:

$$|G(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq |G| |x_1| \dots |x_n|,$$

para todo o agrupamento $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n$.

Tal como foi dito no n.º 0, representamos por $\Lambda_c(S, S^*)$ a família de todas as transformações lineares contínuas de S sobre S^* ; é claro que, no lugar de S , pode figurar qualquer espaço de Banach, e, em particular, o próprio espaço S^n . Por outro lado, representaremos por $\Lambda_c(S^n; S^*)$ a família dos operadores *n vezes lineares*, com os argumentos em S e os valores em S^* . Mas é preciso notar que ⁽¹⁾

$$\Lambda_c(S^n; S^*) \neq \Lambda_c(S^n, S^*).$$

⁽¹⁾ Ver NOTAS FINAIS, I.

Seja agora A uma transformação linear continua de S sobre $\Lambda_c(S, S^*)$, isto é, um elemento de $\Lambda_c(S, \Lambda_c(S, S^*))$. Para cada $u \in S$, ter-se-á $Au \in \Lambda_c(S, S^*)$, e portanto, para cada $v \in S$, virá $(Au)v \in S^*$. Então se pusermos

$$[5.1] \quad A^*(u, v) = (Au)v, \quad \text{para } u, v \in S,$$

vê-se imediatamente que A^* é um operador bilinear. Mais ainda, facilmente se reconhece que o operador A^* é contínuo, tendo-se portanto $A^* \in \Lambda_c(S^2; S^*)$. Reciprocamente: qualquer que seja $A^* \in \Lambda_c(S^2; S^*)$, o operador A definido por [5.1] será um elemento de $\Lambda_c(S, \Lambda_c(S, S^*))$.

Este resultado é facilmente generalizável. Ponhamos

$$[5.2] \quad T_1 = \Lambda_c(S, S^*); \quad T_{n+1} = \Lambda_c(S, T_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Então teremos:

[5.3] Qualquer que seja $A \in T_n$, o operador A^* assim definido

$$[5.4] \quad A^*(u_1, u_2, \dots, u_n) = (((Au_1)u_2) \dots) u_n, \\ \text{para } u_1, u_2, \dots, u_n \in S$$

é um elemento de $\Lambda_c(S^n; S^*)$. Reciprocamente, qualquer que seja $A^* \in \Lambda_c(S^n; S^*)$, o operador A definido por [5.4] é um elemento de T_n . Além disso, tem-se

$$|A^*| = |A|, \quad (A+B)^* = A^* + B^*, \quad (\alpha A)^* = \alpha A^*,$$

sendo α um escalar.

Quando não houver perigo de confusão, falaremos de tais operadores A, A^* , como formas diferentes de um mesmo ente analítico. Mas é preciso notar que, em rigor, se tem

$$T_n \neq \Lambda_c(S^n; S^*),$$

sendo fácil ver ainda que tanto $\Lambda_c(S^n; S^*)$ como T_n são espaços de Banach.

Por outro lado, abstraindo da referida distinção, usaremos de preferência a notação

$$A \cdot u_1) u_2) \cdots) u_n,$$

em vez de " $A(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ", ou de " $((A u_1) u_2) \cdots) u_n$ ". E quando se tiver, $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = u$, escreveremos mais simplesmente, com o mesmo significado:

$$A \cdot u^{[n]}.$$

É de notar que, em virtude da linearidade múltipla de A , o símbolo " $)$ ", assim usado tem propriedades formais semelhantes às dum símbolo de multiplicação. Por exemplo:

$$\begin{aligned} & A \cdot (x_1 + x_2) (y_1 + y_2) = \\ & = A \cdot x_1 y_1 + A \cdot x_1 y_2 + A \cdot x_2 y_1 + A \cdot x_2 y_2. \end{aligned}$$

Em particular, se A é um operador n -vezes linear, *simétrico nos seus n argumentos*, o desenvolvimento de $A(x + y)^{[n]}$ pode fazer-se segundo a *fórmula do binómio*

$$[3.5] \quad A(x + y)^{[n]} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} A \cdot x^{[n-i]} y^{[i]}.$$

Daqui se deduz logo:

$$[5.6] \quad \frac{d}{dx} (A \cdot x^{[n]}) = n A \cdot x^{[n-1]}.$$

E claro que, se A for *assimétrico*, o desenvolvimento [5.5] deixa de ser lícito.

Em vez de S^n , podemos considerar, mais geralmente, o produto de n espaços S_1, S_2, \dots, S_n . As considerações precedentes não sofrem alterações essenciais. O conjunto de todas as funções n -vezes lineares, definidas em $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ e com os valores em S^* , será representado por

$$\Lambda_c \left(\prod_{i=1}^n S_i ; S^* \right).$$

Convém ainda introduzir a seguinte:

[5.6] CONVENÇÃO. Dado um operador bilinear A definido em $S_1 \times S_2$, chamamos *operador converso* ⁽¹⁾ de A e representamos por \overleftarrow{A} o operador assim definido em $S_2 \times S_1$:

$$\overleftarrow{A} \cdot u) v = A \cdot v) u, \quad \text{para } v \in S_1, u \in S_2.$$

Tem-se manifestamente:

$$[5.7] \quad \overleftarrow{\overleftarrow{A} + \overleftarrow{B}} = \overleftarrow{A} + \overleftarrow{B}.$$

Posto isto, observemos que o conceito de «derivada de ordem n » ($n = 1, 2, \dots$) pode agora ser definido por indução, exactamente como em Análise clássica. Consideremos de novo uma função $f(x)$ definida numa região D de S , com os valores em S^* , e seja a um ponto de D . Já sabemos que, se $f(x)$ é diferencial em a , o operador derivado $f'(a)$ é um elemento de $\Lambda_c(S, S^*)$; então, se $f(x)$ é diferenciável em a , o operador $f''(a)$ será, *ipso facto*, um elemento de $\Lambda_c(S, T_1)$, com $T_1 = \Lambda_c(S, S^*)$; e assim por diante:

[5.7] A derivada $f^{(n)}(a)$, se existe, é um elemento de $T_n = \Lambda_c(S, T_{n-1})$.

Todas as considerações desenvolvidas neste número são portanto aplicáveis às derivadas de ordem superior à primeira. Para comodidade de exposição, a derivada $f^{(n)}(a)$ será considerada, indiferentemente, como elemento de T_n ou como elemento de $\Lambda_c(S^n; S^*)$.

⁽¹⁾ O mesmo que «operador adjunto», segundo a terminologia de P. LÉVY.

6. Regra de derivação do produto. — Tal como foi dito logo de início, chamamos *produto dum operador A por um vector u* ao resultado da operação A aplicada ao elemento u .

Posto isto, consideremos três espaços S_*, S, S^* e duas funções $F(x), g(x)$, definidas numa região D de S_* , com os valores respectivamente em $\Lambda_c(S, S^*)$ e em S :

$$F(x) \in \Lambda_c(S, S^*), \quad g(x) \in S, \quad \text{para cada } x \in D.$$

Suponhamos que tanto $F(x)$ como $g(x)$ são diferenciáveis num ponto a de D . Ter-se-á então:

$$\begin{aligned} F(a+h)g(a+h) &= \\ &= [F(a) + F'(a) \cdot h + R(h)] \cdot [g(a) + g'(a)h + \rho(h)], \end{aligned}$$

com $R(h)|h|^{-1} \rightarrow 0$, $\rho(h)|h|^{-1} \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$. Virá pois:

$$\begin{aligned} F(a+h)g(a+h) &= \\ &= F(a)g(a) + (F(a)g'(a))h + F(a) \cdot h g(a) + R(h), \end{aligned}$$

tendo-se ainda, como é fácil ver, $\bar{R}(h)|h|^{-1} \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. É claro que $F'(a) \in \Lambda_c(S_* \times S; S^*)$; mas, segundo a convenção [5.6], tem-se

$$F'(a) \cdot h g(a) = \overleftarrow{F'(a)} \cdot g(a) h$$

e então imediatamente se reconhece que

$$[6.1] \quad \frac{d}{dx} \left\{ F(x) g(x) \right\}_a = F(a)g'(a) + \overleftarrow{F'(a)} g(a).$$

Em particular pode ter-se $S_* = S$. Se além disso o operador bilinear $F'(a)$ é simétrico, tem-se $\overleftarrow{F'(a)} = F'(a)$ e a regra de derivação retoma o aspecto clássico.

De modo análogo, tendo em atenção [5.6], chega-se ao resultado:

[6.2] *Seja $F(x) \in \Lambda_c(S^n; S^*)$, $g(x) \in S$, para $x \in D \subset S$. Suponhamos que $F(x)$ e $g(x)$ são diferenciáveis no ponto a*

de D . Suponhamos ainda que o operador $F(x)$ é, para cada $x \in D$, simétrico nos seus n argumentos e que $F'(a)$ é simétrico nos seus $n+1$ argumentos. Então, pondo $\Phi(x) \equiv F(x) \cdot (g(x))^{[n]}$, virá:

$$\Phi'(a) = F'(a)(g(a))^{[n]} + n F(a)(g(a))^{[n-1]} g'(a).$$

Convém nesta, fórmula, conceber $F(a)$, $F'(a)$, como elementos de T_n , T_{n-1} , respectivamente (ver [5.2]). Por outro lado, é preciso não perder de vista que o símbolo $(g(x))^{[n]}$ não tem, por si só, nenhum significado.

7. Simetria dos operadores derivados de ordem superior à primeira. — O teorema de que vamos tratar é a generalização do teorema clássico de Young relativo à permutabilidade das derivações parciais. Consideremos uma função $f(x)$, definida numa região D de S , com os valores em S^* , e suponhamos que esta função admite segunda derivada, num ponto a de D . *Trata-se de provar que o operador bilinear $f''(a)$ é simétrico, isto é, que se tem $f''(a) \cdot u \cdot v = f''(a) \cdot v \cdot u$, quaisquer que sejam $u, v \in S$.*

Para isso, ponhamos

$$\varphi(\lambda, \mu) \equiv f(a + \lambda u + \mu v),$$

sendo λ, μ variáveis reais. Aplicando a regra de derivação das funções compostas, virá: $\varphi''_{\lambda\mu}(0, 0) = f''(a) \cdot u \cdot v$ ⁽¹⁾.

A demonstração consiste agora em mostrar que

$$\varphi''_{\lambda\mu}(0, 0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi(r, r) - \varphi(r, 0) - \varphi(0, r) + \varphi(0, 0)}{r^2},$$

uma vez que, sendo o segundo membro simétrico a respeito de u, v , o mesmo acontecerá com o primeiro, e portanto com $f''(a) \cdot u \cdot v$.

(1) Ver NOTAS FINAIS, V.

Ora, para isto, pode proceder-se como na demonstração clássica, *substituindo apenas o teorema dos acréscimos finitos pela proposição* [3.1]. Pondo $\theta(t) = \varphi(t, r) - \varphi(t, 0)$, o numerador da fracção acima considerada será igual a

$$\theta(r) - \theta(0) = \int_0^r \theta'(t) dt = \int_0^r [\varphi'_\lambda(t, r) - \varphi'_\lambda(t, 0)] dt.$$

Ora tem-se

$$\begin{aligned}\theta''_\lambda(t, r) &= \varphi''_\lambda(0, 0) + t \varphi''_{\lambda^2}(0, 0) + r \varphi''_{\lambda\mu}(0, 0) + \rho(t, r), \\ \varphi'_\lambda(t, 0) &= \varphi'_\lambda(0, 0) + t \varphi''_{\lambda^2}(0, 0) + \sigma(t, r),\end{aligned}$$

sendo $\rho(t, r)$, $\sigma(t, r)$ infinitésimos de ordem superior à primeira a respeito de $|(t, r)|$. Então virá

$$\theta(r) - \theta(0) = r^2 \varphi''_{\lambda\mu}(0, 0) + \int_0^r [\rho(t, r) - \sigma(t, r)] dt,$$

donde facilmente se deduz: $[\theta(r) - \theta(0)] r^{-2} \rightarrow \varphi''_{\lambda\mu}(0, 0)$, quando $r \rightarrow 0$, q. e. d.

O resultado pode agora estender-se, *por indução*, às derivadas de ordem superior à primeira.

Esta é, aparte a forma, a demonstração apresentada por L. Graves em [I], p. 175-177.

8. Fórmula de Taylor. — Consideremos ainda uma função $f(x)$ definida numa região *conexa* D de S e com os valores em S^* . Suponhamos que $f(x)$ admite derivadas em D até à ordem $n + 1$ e que $f^{(n+1)}(x)$ é contínua em D. Sejam a, b dois pontos quaisquer de D. Ter-se-á então

$$[8.1] \quad f(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

Por outro lado, em virtude do estabelecido no n.º 6, será

$$\frac{d}{dx} [f'(x)(b-x)] = f''(x)(b-x) - f'(x),$$

donde, integrando entre a e b :

$$\int_a^b f'(x) dx = f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(x)(b-x) dx.$$

Dum modo geral, atendendo a [6.2] e à simetria das derivadas:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\frac{f^{(p)}(x)}{p!} (b-x)^{[p]} \right] = \\ &= \frac{f^{(p+1)}(x)}{p!} (b-x)^{[p]} - \frac{f^{(p)}(x)}{(p-1)!} (b-x)^{[p-1]}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{f^{(n)}(x)}{(p-1)!} (b-x)^{[p-1]} dx = \\ &= \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (b-a)^{[p]} + \int_a^b \frac{f^{(p+1)}(x)}{p!} (b-x)^{[p]} dx, \\ & \quad p=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Finalmente, por substituições sucessivas a partir de de [8.1], vem a fórmula de Taylor:

$$[8.2] \quad f(b) = f(a) + \sum_{p=1}^n \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (b-a)^{[p]} + R_n(b, a)$$

com

$$[8.3] \quad R_n(b, a) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} (b-u)^{[n]} du.$$

Dada a continuidade de $f^{(n+1)}(x)$, podemos a cada $\varepsilon > 0$, associar um $\delta > 0$, tal que $f^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(a) + \omega(x)$, com $|\omega(x)| < \varepsilon$ para $|x-a| < \delta$, e assim de [8.3] virá, segundo [1.4], [5.6] e [3.3]:

$$R_n(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{[n+1]} + \rho_n(x),$$

$$\text{com } |\rho_n(x)| < \varepsilon \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para } |x-a| < \delta.$$

Dum modo geral, diz-se que $f(x)$ é *F-diferenciável até à ordem m* num ponto a de D , quando existem m operadores A_1, A_2, \dots, A_m , pertencentes respectivamente a $\Lambda_c(S, S^*), \Lambda_c(S^2; S^*), \dots, \Lambda_c(S^m; S^*)$, tais que

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^m A_i h^{[i]} + |h|^m \sigma(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sigma(h) = 0.$$

Como acabamos de ver, se $f(x)$ admite derivadas contínuas até à ordem m , numa vizinhança de a , então $f(x)$ é *F-diferenciável até à ordem m no ponto a* . Mas a recíproca não é verdadeira, como se sabe, mesmo no caso simples em que $S = S^* = \mathbb{R}$.

9. Derivação ou integração sob os sinais de integração ou derivação.— Consideremos três espaços S_1, S_2, S^* e sejam: D uma região de S_1 ; x_0 um ponto arbitrário de D ; Γ uma linha rectificável de S_2 (contendo os extremos). Nestas condições:

[9.1] LEMA ⁽¹⁾. Se $f(x, y)$ é uma função contínua sobre o subconjunto $D \times \Gamma$ de $S_1 \times S_2$, com os valores em S^* , ter-se-á: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = f(x_0, y)$ uniformemente sobre Γ ; isto é, a cada $\epsilon > 0$, corresponderá um $\delta > 0$, tal que

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \epsilon \quad \text{para} \quad |x - x_0| < \delta,$$

qualquer que seja $y \in \Gamma$.

Demonstração. Seja ϵ um número positivo arbitrário. Em virtude de continuidade de $f(x, y)$ sobre $D \times \Gamma$, poderá fixar-se para cada $\bar{y} \in \Gamma$ um $\rho(\bar{y}) > 0$, tal que

$$|f(x, y) - f(x_0, \bar{y})| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para} \quad |x - x_0| < \rho(\bar{y}), |y - \bar{y}| < \rho(\bar{y}).$$

⁽¹⁾ Nesta proposição, bastaria supor, a respeito de Γ , que se trata dum conjunto compacto.

Mas quando \bar{y} varia sobre Γ , as esferas de centro \bar{y} e raio $\rho(\bar{y})$ formam uma cobertura de Γ , e portanto, segundo o teorema de Heine-Borel, será possível, com um número finito de tais esferas, cobrir o mesmo conjunto. Sejam então y_1, y_2, \dots, y_n os centros das esferas duma tal cobertura finita de Γ e designe δ o menor dos números $\rho(y_i)$. Seja agora x um ponto de D tal que $|x - x_0| < \delta$ e y um ponto *qualquer* de Γ . Entre as esferas da referida cobertura finita, haverá pelo menos uma a que y seja interior; designando por y_p o centro duma tal esfera, virá

$$|x - x_0| < \rho(y_p), \quad |y - y_p| < \rho(y_p)$$

e portanto

$$|f(x, y) - f(x_0, y_p)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |f(x_0, y) - f(x_0, y_p)| < \frac{\epsilon}{2}$$

donde, finalmente,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y)| &\leq |f(x, y) - f(x_0, y_p)| + \\ &+ |f(x_0, y_p) - f(x_0, y)| < \epsilon, \end{aligned}$$

q. e. d.

Posto isto, podemos estabelecer a seguinte proposição:

[9.2] *Se $F(x, y)$ é uma função contínua sobre o subconjunto $D \times \Gamma$ de $S_1 \times S_2$, com os valores em $\Lambda_c(S_2; S^*)$, também a função de x*

$$\Phi(x) = \int_{\Gamma} F(x, y) dy$$

será contínua em D (note-se que $\Phi(x) \in S^$, para cada $x \in D$).*

Dem. Qualquer que seja $\epsilon > 0$, poderá ⁽¹⁾, segundo [9.1], fixar-se $\delta > 0$, de modo que se tenha

$$F(x, y) = F(x_0, y) + R(x, y), \quad \text{com} \quad |R(x, y)| < \epsilon,$$

⁽¹⁾ É claro que, sendo S^* um espaço de Banach qualquer, a proposição [7.1] continua a ser válida substituindo S^* por $\Lambda_c(S, S^*)$.

para $|x - x_0| < \delta$, qualquer que seja $y \in \Gamma$. Então, integrando ambos os membros ao longo de Γ , a propriedade [1.3] permite imediatamente concluir que $\Phi(x)$ é contínua em x_0 .

E agora:

[9.3] *Seja $F(x, y)$ uma função definida em $D \times \Gamma$, com os valores em $\Lambda_c(S_2, S^*)$, contínua a respeito de y em Γ para cada $x \in D$. Suponhamos que $F(x, y)$ admite uma derivada parcial $F'_x(x, y)$ contínua em $D \times \Gamma$. Então, virá*

$$[9.4] \quad \frac{d}{dx} \int_{\Gamma} F(x, y) dy = \int_{\Gamma} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x}} F(x, y) dy.$$

Dem. Uma vez que $F'_x(x, y)$ é contínua em $D \times \Gamma$, poderá, segundo o lema [9.1], associar-se a cada $\epsilon > 0$ um $\delta > 0$, de modo que

$$F'_x(x, y) = F'_x(x_0, y) + R(x, y) \quad , \quad |R(x, y)| < \epsilon,$$

para $|x - x_0| < \delta$, qualquer que seja $y \in \Gamma$. Ora

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y) + \int_{x_0}^x F'_x(\bar{x}, y) d\bar{x} = \\ &= F(x_0, y) + F'_x(x_0, y)(x - x_0) + \int_{x_0}^x R(\bar{x}, y) d\bar{x}. \end{aligned}$$

Integrando ao longo de Γ e notando que é

$$\int_{\Gamma} F'_x(x_0, y)(x - x_0) dy = \left[\int_{\Gamma} \overleftarrow{F'_x(x_0, y)} dy \right] (x - x_0),$$

virá finalmente

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} F(x, y) dy = \\ &= \int_{\Gamma} F(x_0, y) dy + \left[\int_{\Gamma} \overleftarrow{F'_x(x_0, y)} dy \right] (x - x_0) + R^*(x), \end{aligned}$$

com $|R^*(x)| < \epsilon |\Gamma| \cdot |x - x_0|$, para $|x - x_0| < \delta$, donde se conclue precisamente [9.4].

Quanto à integração sob o sinal de integração, será válida a regra

$$\int_{\Gamma_1} \left[\int_{\Gamma_2} F(x, y) dx \right] dy = \int_{\Gamma_1} \left[\int_{\Gamma_2} \overleftarrow{F}(x, y) \right] dx,$$

desde que $F(x, y)$ seja contínua sobre o subconjunto $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ de S^2 , com $F(x, y) \in \Lambda_c(S_1 \times S_2; S^*)$ para $x \in \Gamma_1, y \in \Gamma_2$. Para a demonstração, basta observar que se pode definir o integral duplo riemanniano

$$\int_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} F(x, y) \cdot dx dy,$$

tal como para os domínios planos, e que este integral tem valor igual ao dos precedentes.

Finalmente, para a derivação sob o sinal de derivação aparece-nos o seguinte teorema:

[9.5] *Seja $f(x, y)$ uma função definida numa região D de $S_1 \times S_2$, com os valores em S^* . Suponhamos que $f(x, y)$ admite derivadas parciais $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ contínuas em D . Então, podemos afirmar que, se a derivada $f''_{xy}(x, y)$ existe e é contínua em D , também existe $f''_{yx}(x, y)$, tendo-se precisamente*

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)}.$$

Dem. Ter-se-á, em virtude da hipótese

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \int_{x_0}^x f'_x(\xi, y) d\xi,$$

donde, derivando em ordem a y , com a aplicação de [9.3]

$$f'_y(x, y) - f'_y(x_0, y) = \int_{x_0}^x \overleftarrow{f''_{xy}(\xi, y)} d\xi,$$

donde, finalmente, derivando em ordem a x , com a aplicação de [3.7]:

$$f''_{yx}(x, y) = \overleftarrow{f''_{xy}(x, y)}.$$

Tal é uma das possíveis generalizações do teorema de Schwarz. Para interpretar este resultado, confrontando-o com a generalização do teorema de Young (n.º 7), ver NOTAS FINAIS, I.

10. Equações; funções implícitas ⁽¹⁾. — Consideremos uma equação do tipo

$$[10.1] \quad x = F(x),$$

sendo $F(x)$ uma função definida no domínio $|x - x_0| < \alpha$ de S e com os valores em S . Para resolver uma tal equação, partindo de x_0 como *solução aproximada*, surge naturalmente a ideia de proceder por *aproximações sucessivas*, segundo o esquema:

$$[10.2] \quad x_1 = F(x_0) \quad ; \quad x_{n+1} = F(x_n).$$

Se a sucessão (x_n) convergir para um ponto X , no qual a função F seja *contínua*, ter-se-á

$$\lim x_{n+1} = F(\lim x_n) \quad \text{ou seja} \quad X = F(X),$$

e então X será uma solução de [10.1], isto é, um *ponto invariante* da transformação F ⁽²⁾. Mas em que casos podemos nós garantir a convergência de (x_n) ?

Um critério bastante largo é o seguinte:

[10.3] *A sucessão (x_n) definida por [10.2] será convergente, se forem verificadas as seguintes condições:*

1) $|F(x) - F(x^*)| \leq k|x - x^*|$, com $k < 1$, quaisquer que sejam $x, x^* \in V(x_0, \alpha)$ ⁽³⁾ (condição de Lipschitz).

2) $|x_n - x_0| < \alpha$, para $n = 1, 2, \dots$.

⁽¹⁾ Sobre este assunto, veja-se HILDEBRANDT-GRAVES [I] e GRAVES [II], [III].

⁽²⁾ Certas demonstrações de existência e unicidade (BIRKHOFF e KELLOG, CACCIOPOLI, etc.) consistem precisamente em provar a existência dum único ponto invariante para certas transformações.

⁽³⁾ Como já atrás foi dito, representamos por $V(x_0, \alpha)$ a vizinhança α de x_0 , isto é, o conjunto dos pontos x tais que $|x - x_0| < \alpha$.

Dem. Tendo-se $x_n \in V(x_0, \alpha)$, para $n = 1, 2, \dots$, a condição 1) é aplicável e virá então, atendendo a [10.2]:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k |x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq k^{n-1} |x_2 - x_1|,$$

o que implica a convergência ⁽¹⁾ da série $x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ e portanto a da sucessão (x_n) .

Por outro lado, tem-se o teorema de unicidade:

[10.4] *Verificada a condição 1) do teorema [10.3], não pode existir mais de uma raiz da equação [10.1] no domínio $V(x_0, \alpha)$.*

Dem. Sejam X_1, X_2 soluções de [10.1] existentes em $V(x_0, \alpha)$. De 1) deduz-se $|X_1 - X_2| = |F(X_1) - F(X_2)| \leq k |X_1 - X_2|$, donde (por ser $k < 1$) $X_1 = X_2$.

É ainda útil a seguinte proposição:

[10.5] *Verificada a condição 1) do teorema [10.3], a condição 2) é implicada por esta outra*

$$2') \quad |F(x_0) - x_0| < (1 - k) \alpha.$$

Dem. Seja x um ponto de $V(x_0, \alpha)$. Aplicando 1) e 2) virá $|F(x) - x_0| \leq |F(x) - F(x_0)| + |F(x_0) - x_0| < k \alpha + (1 - k) \alpha = \alpha$. Quere dizer: se $|x - x_0| < \alpha$, também $|F(x) - x_0| < \alpha$. Portanto, atendendo a [10.2]: se $|x_n - x_0| < \alpha$, também $|x_{n+1} - x_0| < \alpha$ ($n = 0, 1, \dots$). Como $x_0 \in V(x_0, \alpha)$, segue-se: $x_n \in V(x_0, \alpha)$, para $n = 1, 2, \dots$.

Passemos agora a equações do tipo

$$f(x) = 0,$$

⁽¹⁾ Em virtude do critério de convergência de Cauchy, verificado em S, a convergência duma série é implicada pela convergência da série dos módulos.

sendo $f(x)$ uma função definida no domínio $V(x_0, \alpha)$ de S e com os valores em S . Tem lugar o seguinte teorema:

[10.6] *Se $f(x)$ admite derivada contínua em $V(x_0, \alpha)$ e se $f'(x_0)$ é um operador reversível, a equação $f(x)=0$ pode reduzir-se à forma $x=F(x)$, sendo $F(x)$ uma função que verifica a condição de Lipschitz numa vizinhança de x_0 .*

Dem. Bastará pôr $F(x) = x - [f'(x_0)]^{-1} f(x)$. É fácil ver então ⁽¹⁾ que $F(x)$ também admite derivada contínua em $V(x_0, \alpha)$, e que $F'(x_0)=0$. Portanto, fixado um número positivo $k < 1$, será possível, em virtude da continuidade de $F'(x)$, determinar um número positivo $\alpha' \leq \alpha$, tal que

$$|F'(x)| < k \quad \text{para} \quad |x - x_0| < \alpha'.$$

Mas então, visto ser

$$F(x) - F(x^*) = \int_{x^*}^x F'(\xi) d\xi, \quad \text{para } x, x^* \in V(x_0, \alpha')$$

virá, atendendo à convexidade de $V(x_0, \alpha')$,

$$|F(x) - F(x^*)| < k |x - x^*|, \quad \text{para } x, x^* \in V(x_0, \alpha')$$

q. e. d.

Se a função $f(x)$ admite uma segunda derivada, $f''(x)$, contínua em $V(x_0, \alpha)$, será preferível, do ponto de vista prático, tomar como *função iterante* ⁽²⁾

$$F(x) = x - [f'(x)]^{-1} f(x);$$

⁽¹⁾ Demonstra-se, que se A é uma transformação linear contínua, biunívoca, de S sobre S^* , também a transformação A^{-1} é contínua (ver p. ex. BANACH [I], p. 41 ou HILLE [I], p. 29).

⁽²⁾ Ver NOTAS FINAIS, II.

neste caso, supondo garantida a convergência de (x_n) , o processo [10.2] vem a dar precisamente a *generalização do método de Newton (ou da tangente)*.

Posto isto, consideremos uma equação da forma

$$y = F(x, y),$$

sendo a função $F(x, y)$ definida numa região de $S \times S^*$, com os valores em S^* e suponhamos que se tem

$$y_0 = F(x_0, y_0).$$

Querendo resolver esta equação em ordem à *variável* y , como *função implícita de x que tome o valor y_0 , para $x = x_0$* , é-se levado a considerar o processo de recorrência:

$$\varphi_1(x) \equiv F(x, y_0) \quad ; \quad \varphi_{n+1}(x) \equiv F(x, \varphi_n(x)).$$

É fácil agora estabelecer o seguinte teorema:

[10.7] *Se a função $F(x, y)$ é contínua para $|x - x_0| < \alpha$, $|y - y_0| < \beta$ e verifica a condição de Lipschitz:*

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|, \quad \text{com } k < 1,$$

para $y_1, y_2 \in V(y_0, \beta)$, $x \in V(x_0, \alpha)$, a sucessão $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ converge uniformemente num domínio $V(x_0, \alpha')$ (com $\alpha' < \alpha$), para uma função contínua $\varphi(x)$ tal que

$$\varphi(x) = F(x, \varphi(x)), \quad \text{para } |x - x_0| < \alpha'.$$

Além disso, a solução $Y = \varphi(x)$ será a única admitida pela equação $y = F(x, y)$ para $|x - x_0| < \alpha'$, $|x - y_0| < \beta$.

Com efeito, fixado um numero positivo $k < 1$, será possível, atendendo a que $F(x, y)$ é contínua e a que $y_0 = F(x_0, y_0)$, determinar um número positivo $\alpha' < \alpha$, tal que

$$|F(x, y_0) - y_0| < (1 - k)\beta, \quad \text{para } |x - x_0| < \alpha'.$$

A partir deste ponto, a demonstração não oferece dificuldade, recordando as demonstrações dos teoremas

[10.3], [10.4] e [10.5]. A continuidade de $\varphi(x)$ no domínio $V(x_0, \alpha')$ resulta da continuidade de $F(x, y)$ no domínio $V(x_0, \alpha) \times V(y_0, \beta)$ e da convergência uniforme da sucessão (φ_n) sobre $V(x_0, \alpha)$. (Em espaços de Banach subsiste o teorema relativo à convergência uniforme de funções contínuas).

Consideremos finalmente uma equação da forma

$$f(x, y) = 0,$$

sendo a função $f(x, y)$ definida num domínio de $S \times S^*$, com os valores em S^* e tal que

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

Podemos então estabelecer o teorema seguinte:

[10.8] *Suponhamos que: 1) $f(x, y)$ é contínua no domínio $|x - x_0| < \alpha$, $|y - y_0| < \beta$; 2) $f(x, y)$ admite uma derivada parcial $f'_y(x, y)$ contínua no referido domínio; 3) o operador $f'_y(x_0, y_0)$ é reversível⁽¹⁾. Nestas condições, existe uma função $\varphi(x)$, definida e contínua num domínio $|x - x_0| < \alpha^*$ e tal que*

$$y_0 = \varphi(x_0), \quad f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \text{para } |x - x_0| < \alpha^*.$$

Além disso, a solução $Y = \varphi(x)$ será a única admitida pela equação $f(x, y) = 0$ em todo um domínio $|x - x_0| < \alpha^$, $|y - y_0| < \beta^*$.*

Dem. A equação $f(x, y) = 0$ é equivalente a esta outra

$$y = F(x, y), \quad \text{com } F(x, y) = x - [f'_y(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y).$$

Agora, raciocinando como na demonstração do teorema [10.6], é fácil concluir que, fixado um número posi-

⁽¹⁾ É claro que $f'_y(x_0, y_0) \in \Lambda_c(S^*, S^*)$.

tivo $k < 1$, se podem determinar números positivos $\alpha' \leq \alpha$, $\beta' \leq \beta$, de modo que

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|,$$

para $y_1, y_2 \in V(y_0, \beta'), x \in V(x_0, \alpha')$.

Por outro lado, fácil é reconhecer a continuidade de $F(x, y)$, para $|x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta$. A função $F(x, y)$ está pois nas condições do teorema [10.7], que pode portanto ser aplicado, conduzindo ao resultado que se pretendia demonstrar.

[10.9] *Suponhamos agora que, além de serem verificadas as condições expressas no teorema precedente, a função $f(x, y)$ é diferenciável no ponto (x_0, y_0) . Podemos então afirmar que $\varphi(x)$ também é diferenciável no ponto x_0 , tendo-se precisamente*

$$\varphi'(x_0) = -[f'_y(x_0, y_0)]^{-1} \cdot f'_x(x_0, y_0).$$

Para a demonstração, ponhamos

$$k = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0), \quad A = f'_x(x_0, y_0), \quad B = f'_y(x_0, y_0).$$

Então virá

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = A h + B k + R_{h,k}(|h| + |k|) = 0$$

sendo $R_{h,k}$ um infinitésimo com $|h| + |k|$. Ter-se-á pois

$$[10.10] \quad k = -B^{-1} A h + \omega(h)|h|,$$

$$\text{com} \quad \omega(h) = B^{-1} R_{h,k} \cdot (1 + |k| : |h|).$$

sendo, como é fácil ver, $-B^{-1} A \in \Lambda_c(S, S^*)$. Para mostrar que $\varphi'(x_0) = -B^{-1} A$, resta pois provar que $\omega(h) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$ e, para isso, basta provar que a razão $r = |k| : |h|$ é limitada numa conveniente vizinhança de x_0 , uma vez que o operador B^{-1} é contínuo e que k é infinitésimo com h (dada a continuidade de $\varphi(x)$), tendo-se portanto $B^{-1} R_{h,k} \rightarrow 0$, quando $h \rightarrow 0$. Ora, fixado um número positivo $\mu < 1$, é possível determinar $\sigma > 0$, de

modo que $|B^{-1} R_{h,k}| < \mu$ para $|h| < \sigma$. Então de [10.10] virá

$$r \leq |B^{-1} A| + \mu(1 + r), \quad \text{ou seja} \quad r \leq \frac{|B^{-1} A| + \mu}{1 - \mu};$$

r é pois limitado para $|h| < \sigma$; o teorema fica demonstrado.

Para as derivadas de ordem superior à primeira, ver NOTAS FINAIS, II.

Suponhamos que $S = \mathbb{R}^n, S^* = \mathbb{R}^m$. Neste caso, a equação $f(x, y) = 0$ equivale a um sistema de m equações em $m + n$ incógnitas

$$f_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

A derivada parcial $f'_y(x, y)$ será representada pela matriz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right]$ e será um operador reversível, se, e só, o determinante funcional $\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \right|$ dos f_i em relação aos y_k for diferente de 0. Reencontra-se pois assim, de maneira elegante, o teorema clássico das funções implícitas, cuja demonstração, pelos meios usuais, é notoriamente trabalhosa. De resto, a conclusão será a mesma, no caso $S = \mathbb{K}^n, S^* = \mathbb{K}^m$. *E é preciso não esquecer que a proposição [10.6] tem projecção muito mais vasta ainda, aplicando-se a equações diferenciais, integrais ou integro-diferenciais, a sistemas de infinitas equações, etc.*

11. Teorema do diferencial exacto. — Consideremos uma função $f(x)$, definida numa região conexa D de S e com os valores em $\Lambda_c(S, S^*)$. Trata-se de averiguar em que condições esta função admite uma *primitiva*, isto é, uma função $F(x)$, tal que $F'(x) \equiv f(x)$ sobre D .

Suponhamos que $f(x)$ é diferenciável em D : ter-se-á $f'(x) \in \Lambda_c(S^2; S^*)$ para cada $x \in D$. Então, se existe uma primitiva $F(x)$ de $f(x)$, será $f'(x) \equiv F'(x)$ e portanto o operador bilinear $f'(x)$ deverá ser simétrico, qualquer que seja $x \in D$ (n.º 7), isto é, deverá ter-se

$$\overleftarrow{f'}(x) = f'(x), \quad \text{qualquer que seja } x \in D.$$

Logo :

[11.1] *Se $f(x)$ é diferenciável em D , para que exista uma primitiva de $f(x)$ em D , é necessário que o operador bilinear $f'(x)$ seja simétrico para cada x em D .*

Será esta condição também suficiente?

Seja x_0 um ponto de D e designe C uma região convexa de D contendo x_0 (por exemplo, uma vizinhança de x_0). Admitamos por um momento que existe uma primitiva, $F(x)$, da função $f(x)$ em C ; então será $F(x) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$ (sendo $f(x)$ diferenciável, é contínua), de modo que, pondo $\xi = x_0 + t(x - x_0)$, virá (n.º 4):

$$[11.2] \quad F(x) = \int_0^1 f[x_0 + t(x - x_0)](x - x_0) dt.$$

Abandonemos agora a hipótese de $f(x)$ ser primitivável e vejamos se a função $F(x)$ definida por [11.2] em C tem ou não $f(x)$ como derivada. Podemos recorrer ao teorema [9.3], mas para isso é necessário introduzir novas restrições: *suponhamos que a função $f'(x)$ é contínua em D* . Então, observando que a função integranda tem os valores em S^* , virá, atendendo a [6.1]:

$$F'(x) = \int_0^1 [\overleftarrow{f'}(\xi)(x - x_0)t + f(\xi)] dt,$$

com $\xi = x_0 + t(x - x_0)$.

Ora, se o operador bilinear $f'(x)$ é simétrico para cada x em D , a função integranda reduz-se a

$$f'(\xi)(x - x_0)t + f(\xi) = \frac{d}{dt}[f(\xi)t]$$

e portanto $F'(x) = [f(\xi)t]_0^1 = f(x)$.

A condição é pois suficiente no domínio C , com a restrição indicada. A primitiva $F(x)$ poderá depois prolongar-se, desde x_0 a um outro ponto qualquer de D , mediante uma cadeia finita de regiões convexas, mas é

claro que o resultado pode depender do caminho seguido: pode então surgir uma função pluriforme em D .

Será possível eliminar a restrição da continuidade de $f'(x)$?

A resposta a esta questão pode ser tentada, tomando como modelo a demonstração do teorema de Cauchy sobre funções holomorfas, dada por Goursat. Procuremos pois demonstrar a seguinte proposição:

[11.2] *Suponhamos que $f(x)$ admite uma derivada simétrica, como operador bilinear, para cada x em C . Então, sendo Γ uma linha fechada rectificável contida em C , tem-se necessariamente:*

$$\int_{\Gamma} f(x) dx = 0.$$

Daqui resultará que o integral de $f(x)$ ao longo de qualquer linha rectificável contida em C só depende dos limites de integração e portanto, segundo [3.7], ficará provada a existência duma primitiva de $f(x)$ em C .

Começará por demonstrar-se o teorema para o caso de Γ ser um triângulo (orientado)⁽¹⁾. Observemos que se tem para cada x_0 em C :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \rho(x),$$

com $\rho(x)|x - x_0|^{-1} \rightarrow 0$, para $x \rightarrow x_0$; e que, sendo $f'(x_0)$ um operador bilinear *simétrico*, se tem, segundo [5.6]:

$$\frac{d}{dx} \{ f'(x_0)(x - x_0)^{[2]} \} = f'(x_0)(x - x_0),$$

sendo portanto nulo o integral de $f'(x_0)(x - x_0)$ ao longo de qualquer linha fechada contida em C . Posto isto, a

(1) Chama-se triângulo de vértices a, b, c (em S) ao conjunto dos pontos dos segmentos de extremos a, b, c (não sendo a, b, c colineares). O *interior* do triângulo será o conjunto dos pontos $\lambda a + \mu b + \nu c$, com $\lambda + \mu + \nu = 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\nu > 0$.

demonstração pode seguir à maneira usual, exactamente como na teoria das funções analíticas de Lorch. Dos triângulos, passa-se a linhas poligonais fechadas. Finalmente, para estender a demonstração a uma linha fechada rectificável qualquer, há que utilizar o seguinte lema:

[11.3] *Seja Γ uma linha rectificável (aberta ou fechada), o integral $\int_{\Gamma} f(x) dx$ é o limite do integral $\int_P f(x) dx$, tomado sobre uma poligonal P inscrita em Γ , quando o maior dos comprimentos dos lados de P tende para 0.*

Esta proposição pode ser facilmente demonstrada, utilizando a técnica habitual das coberturas (veja-se VALIRON [I], p. 365).

12. — Equações diferenciais ⁽¹⁾. — Consideremos uma função $f(x, t)$ definida numa região de $R \times S$ e com os valores em S . Suponhamos que $f(t, x)$ é *contínua* no domínio $|t - t_0| < \alpha$, $|x - x_0| < \beta$ e que verifica neste domínio a *condição de Lipschitz*,

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k |x_1 - x_2|,$$

para $x_1, x_2 \in V(x_0, \beta)$, $t \in V(t_0, \alpha)$,
e sendo k uma constante positiva qualquer.

Então, podemos afirmar que a equação

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

admite uma (e uma só) solução $X = \varphi(t)$ tal que: 1) $\varphi(t_0) = x_0$; 2) a função $\varphi(t)$ é definida no intervalo $|t - t_0| < \alpha'$ em que α' designa o maior dos números $\alpha, \beta/\mu$, sendo μ um limite superior de $|f(t, x)|$ para $|t - t_0| < \beta$.

⁽¹⁾ A falta de tempo impede-me de fazer aqui uma exposição mais detalhada.

A demonstração pode fazer-se pelo método das aproximações sucessivas de Picard, como recordei na minha dissertação de doutoramento (n.º 48). Mas pode chegar-se a um resultado análogo com a aplicação dos teoremas [10.3] e [10.4], segundo o ponto de vista de HILDEBRANDT e GRAVES.

Convém notar ainda que *a condição de Lipschitz será verificada desde que $f(t, x)$ admita uma derivada parcial, $f'_x(t, x)$, contínua e limitada para $|x - x_0| < \alpha$, $|t - t_0| < \beta$ (se a derivada for apenas contínua neste domínio, será certamente limitada num domínio mais restrito).*

Consideremos mais geralmente uma equação diferencial do tipo

$$[12.1] \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x, u),$$

sendo u um parâmetro, ou melhor, sendo $f(t, x, u)$ uma função definida numa região de $\mathbb{R} \times S \times S_*$, com os valores em S . Supondo a condição de Lipschitz verificada *a respeito de x* no domínio $|t - t_0| < \alpha$, $|x - x_0(u)| < \beta$, $|u - u_0| < \gamma$ e supondo ainda $f(t, x, u)$ contínua e limitada neste domínio, a equação [12.1] admitirá, num conveniente intervalo $|t - t_0| < \alpha'$, uma e uma só solução $X = \varphi(t, u)$, *dependente do parâmetro u* , contínua para $|t - t_0| < \alpha'$, $|u - u_0| < \gamma$ e tal que $\varphi(t_0, u) \equiv x_0(u)$. Note-se que a equação [12.1], com a condição inicial $\varphi(t_0, u) \equiv x_0(u)$ é equivalente à equação integral em φ :

$$\varphi(t, u) = x_0(u) + \int_{t_0}^t f(\bar{t}, \varphi(\bar{t}, u), u) d\bar{t}.$$

Supondo que $f(t, x, u)$ admite derivadas parciais $f'_x(t, x, u)$, $f'_t(t, x, u)$ contínuas e limitadas no domínio considerado, ter-se-á ⁽¹⁾, para $|t - t_0| < \alpha$, $|u - u_0| < \gamma$ e pondo $X = \varphi(t, u)$, $\bar{X} = \varphi(\bar{t}, u)$:

⁽¹⁾ Este resultado pode demonstrar-se por um método semelhante ao que foi seguido na demonstração do teorema [10.6], do qual pode mesmo deduzir-se como caso particular.

$$\frac{\partial X}{\partial u} = x'_0(u) + \int_{t_0}^t [f'_x(\bar{t}, \bar{X}, u) \frac{\partial \bar{X}}{\partial u} + f'_u(\bar{t}, \bar{X}, u)] d\bar{t}$$

donde a chamada *equação nas variações*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial X}{\partial u} = f_x(t, X, u) \frac{\partial X}{\partial u} + f'_u(t, X, u),$$

a qual é linear em $\frac{\partial X}{\partial u}$ (supondo já conhecida a função X)

e que determina portanto univocamente $\frac{\partial X}{\partial u}$ sob a condição

inicial $\frac{\partial}{\partial u} \varphi(t_0, u) \equiv x'_0(u)$ — o que de resto se conclue

logo directamente da anterior equação integral.

Seja agora $F(x, y)$ uma função definida num domínio de $S \times S^*$, com os valores em $\Lambda_c(S, S^*)$ e consideremos a equação

$$[12.2] \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y).$$

(Entram nesta categoria as clássicas equações nos diferenciais totais e as equações nas derivadas funcionais, de Lévy).

Suponhamos que a função $F(x, y)$ é diferenciável e limitada no domínio $|x - x_0| < \alpha$, $|y - y_0| < \beta$, admitindo derivadas parciais $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ contínuas e limitadas nesse domínio. Então, qualquer que seja a solução $y = \chi(x)$ da equação [12.2], ter-se-á $\chi'(x) \equiv F(x, \chi(x))$ e portanto ⁽¹⁾ $\chi''(x) \equiv F'_x(x, \chi(x)) + F'_y(x, \chi(x)) \cdot F(x, \chi(x))$, o que obriga o segundo membro a ser um operador bilinear simétrico.

Pois bem: dum modo geral, dir-se-á que a equação [12.2] é completamente integrável no domínio $|x - x_0| < \alpha$, $|y - y_0| < \beta$, quando se tiver neste domínio ⁽²⁾

⁽¹⁾ Ver NOTAS FINAIS, III.

⁽²⁾ Para interpretar o produto $F'_y(x, y) F(x, y)$ deve conceber-se $F'_y(x, y)$ como elemento de $\Lambda_c(S^*, \Lambda_c(S, S^*))$, sendo portanto o produto um elemento de $\Lambda_c(S, \Lambda_c(S, S^*))$.

$$\begin{aligned}
 [12.3] \quad & F'_x(x, y) + F'_y(x, y) F(x, y) \equiv \\
 & \equiv \overline{F'_x(x, y)} + \overline{F'_y(x, y) \cdot F(x, y)}.
 \end{aligned}$$

Suponhamos esta condição verificada. Para resolver a equação [12.2] com o dado inicial $y(x_0) = y_0$, ocorre substituí-la por uma equação do tipo [12.1], pondo

$$\xi = x_0 + t(x - x_0), \quad |t| \leq 1$$

e ξ no lugar de x em [12.2].

A nova equação, *dependente do parâmetro* x , será pois

$$[12.4] \quad \frac{dy}{dt} = F(x_0 + t(x - x_0), y) \cdot (x - x_0).$$

Visto que o segundo membro admite uma derivada parcial em ordem a y , contínua e limitada no domínio $|t| \leq 1, |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta$, a equação [12.3] admitirá uma determinada solução

$$Y = \Phi(t, x), \quad \text{tal que} \quad \Phi(0, x) = \Phi(t, 0) = y_0,$$

a qual será ainda definida para $|t| \leq 1$, desde que se obrigue x a permanecer num conveniente domínio $|x - x_0| < \alpha'$, com $\alpha' \leq \alpha$. Por outro lado, ter-se-á a equação nas variações

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial Y}{\partial x} = \left[\overline{F'_x(\xi, Y) t + F'_y(\xi, Y) \frac{\partial Y}{\partial x}} \right] (x - x_0) + F(\xi, Y),$$

equação linear em $\frac{\partial Y}{\partial x}$ que determina *univocamente* esta

função, com a condição inicial $\frac{\partial}{\partial x} \Phi(0, x) \equiv 0$ (supondo já conhecida Y). Substituamos agora na equação precedente

$\frac{\partial Y}{\partial x}$ por $F(\xi, Y)t$; o primeiro membro dará

$$\frac{d}{dt} \left[F(\xi, Y) t \right] = F'_x(\xi, Y) (x - x_0) t + F'_y(\xi, Y) \frac{dY}{dt} + F(\xi, Y).$$

Mas $\frac{dY}{dt} = F(\xi, Y)(x - x_0)$, visto ser Y uma solução de [12.4]. Então, atendendo a [12.3], vê-se imediatamente que o segundo membro dá lugar à mesma expressão que o primeiro. Além disso, a função $F(\xi, Y)t$ anula-se para $t=0$, tal como $\frac{\partial Y}{\partial x}$. Por conseguinte, dada a unicidade da solução da equação nas variações, tem-se necessariamente

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, x) \equiv F(\xi, Y)t,$$

donde, atendendo a que é $\xi = x$ para $t=1$ e pondo $\varphi(x) \equiv \Phi(1, x)$:

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) \equiv F(x, \varphi(x)),$$

o que mostra ser $\varphi(x)$ a única solução de [12.2], para $|x - x_0| < \alpha'$, tal que $\varphi(x_0) = y_0$.

Obtivemos deste modo uma generalização do conhecido método de Mayer, para a integração das equações em diferenciais totais (ver P. LÉVY [I], p. 151).

NOTAS FINAIS

1. Consideremos dois espaços S, S^* , com $S = S_1 \times \dots \times S_n = \prod_1^n S_i$, e seja A um elemento de $\Lambda_c(S, S^*)$.

Dado um elemento $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de S e pondo $x^{(1)} = (x_1, 0, \dots, 0)$, $x^{(2)} = (0, x_2, \dots, 0)$, \dots , $x^{(n)} = (0, \dots, 0, x_n)$,

virá $x = x^{(1)} + x^{(2)} + \dots + x^{(n)}$ e portanto $Ax = \sum_1^n A x^{(i)}$,

Pondo agora $A_i x_i = A x^{(i)}$, para $i = 1, 2, \dots, n$, imediatamente se reconhece que $A_i \in \Lambda_c(S_i, S^*)$, para $i = 1, 2, \dots, n$,

tendo-se $Ax = \sum_1^n A_i x_i$. Reciprocamente, quaisquer que

sejam A_1, A_2, \dots, A_n , com $A_i \in \Lambda_c(S_i, S^*)$, o operador A

definido por $Ax = \sum_1^n A_i x_i$ é um elemento de $\Lambda_c(S, S^*)$.

Obtivemos assim a expressão geral das transformações lineares contínuas de S sobre S^ em função das transformações lineares contínuas de cada um dos espaços S_i sobre S^* .*

Mas note-se que a expressão $\sum_1^n A_i x_i$ não será n -vezes

linear a respeito dos argumentos x_1, \dots, x_n , a não ser no caso trivial em que todos os operadores A_i , menos um, são nulos; reciprocamente, uma função n -vezes linear $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ não será geralmente uma função linear

do ponto (x_1, x_2, \dots, x_n) . Tem-se pois, como tínhamos dito no n.º 5:

$$\Lambda_c(\prod_1^n S_i, S^*) \neq \Lambda_c(\prod_1^n S_i; S^*),$$

representando o primeiro membro a classe das transformações lineares contínuas de $\prod_1^n S_i$ sobre S^* e o segundo membro a classe das funções n -vezes lineares com os argumentos em S_1, S_2, \dots, S_n e os valores em S^* .

Analogamente se reconhece que a expressão geral dos operadores bilineares com os argumentos em S e os valores em S^* (sendo ainda $S = \prod_1^n S_i$) será

$$A x) y = \sum_{i,k=1}^n A_{i,k} x_i) y_k,$$

com $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n),$

$$A_{i,k} \in \Lambda_c(S_i \times S_k; S^*).$$

E é fácil estabelecer agora o teorema seguinte:

Para que o operador bilinear A seja simétrico, isto é, para que seja $\tilde{A} = A$, é necessário e suficiente que se tenha

$$A_{i,k} = \tilde{A}_{k,i}, \text{ para } i, k = 1, 2, \dots, n.$$

Este resultado esclarece o que foi dito a respeito das derivadas rectangulares, conciliando o teorema [9.5] com a simetria dos operadores derivados de ordem superior à primeira (o teorema de Schwartz e o teorema de Young em análise geral) ⁽¹⁾.

II. Consideremos uma função $f(x)$, definida e contínua num domínio D de S e com os valores em $\Lambda_c(S^*, S^*)$. Seja x_0 um ponto de D . Podemos então afirmar que, se o

⁽¹⁾ Sobre os teoremas de Schwartz e de Young em análise clássica, ver por exemplo VICENTE GONÇALVES [I], p. 456-458.

operador $f(x_0)$ é reversível, então $f(x)$ é reversível numa conveniente vizinhança de x_0 . Com efeito, podemos escrever

$$f(x) \equiv f(x_0)(I - \varphi(x)), \text{ com } \varphi(x) \equiv [f(x_0)]^{-1} \cdot [f(x_0) - f(x)].$$

Ora é fácil ver que a série $\sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(x)]^n$ é uniformemente convergente para $|\varphi(x)| \leq k < 1$, tendo-se então precisamente $[I - \varphi(x)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi(x)]^n$. Por outro lado, dada a continuidade de $f(x)$ e, portanto, de $\varphi(x)$, será possível determinar um $\delta > 0$, tal que $|\varphi(x)| < k$ para $|x - x_0| < \delta$ (pois que $\varphi(x_0) = 0$). Então virá

$$[f(x)]^{-1} = [I - \varphi(x)]^{-1} \cdot [f(x_0)]^{-1} \text{ para } |x - x_0| < \delta.$$

Prova-se ao mesmo tempo a continuidade de $[f(x)]^{-1}$ para $|x - x_0| < \delta$.

Suponhamos agora que $f(x)$ é diferenciável no ponto x_0 , sendo ainda $f(x_0)$ um operador reversível. É fácil demonstrar, por um método semelhante ao precedente, que $[f(x)]^{-1}$ será também diferenciável no ponto x_0 . Contudo, a expressão que dá a derivada de $[f(x)]^{-1}$ é um tanto complicada.

Estas observações permitem abordar facilmente o problema das derivadas de ordem superior à primeira para as funções implícitas.

III. Seja $f(x, y)$ uma função definida numa região D de $S_1 \times S_2$ e com os valores em S^* . É fácil ver que, se $f(x, y)$ admite derivadas parciais $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ contínuas no domínio D , $f(x, y)$ é diferenciável em D . Este facto intervém nos resultados expostos no n.º 12.

IV. A demonstração do teorema [3.1] pode ser consideravelmente simplificada, quando é pressuposta a continuidade de $f'(x)$. Com efeito, é então fácil provar que

se tem

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x) - f(x) - f'(x)h) |h|^{-1} = 0$$

uniformemente sobre Γ , isto é, será possível associar a cada $\epsilon > 0$ um $\delta > 0$ de modo que

$$|f(\bar{x}) - f(x) - f'(x)h| \leq \epsilon |h|$$

quaisquer que sejam $\bar{x}, x \in \Gamma$, com $|\bar{x} - x| < \delta$.

V. Convém notar que os elementos de $\Lambda_c(R, S)$ são todas as transformações T_a da forma

$$T_a(\lambda) = \lambda a, \quad \text{com } \lambda \in R, a \in S.$$

É claro que se tem

$$|T_a| = |a|, \quad T_{a+b} = T_a + T_b, \quad T_{\mu a} = \mu T_a \quad (\mu \in R).$$

Não haverá portanto inconveniente em identificar o *operador* T_a com o *vector* a que o define: assim procedemos nos n.ºs 7, 11, 12.

Análoga observação no caso de se ter K em vez de R , sendo K o corpo dos escalares de S .

BIBLIOGRAFIA

S. BANACH

- [I] *Théorie des opérations linéaires*. Monografias matemáticas. Varsóvia, 1932, VII + 254 pp.

G. C. EVANS

- [I] *Functionals and their applications. Selected topics, including integral equations*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., V₁. New York, 1918, XII + 136 pp.

M. FRÉCHET

- [I] *La notion de différentielle dans l'analyse générale*. Ann. École Norm. Sup., 42 (1925), p. 293-323.

L. M. GRAVES

- [I] *Riemann integration and Taylor's theorem in general analysis*. Trans. Amer. Math. Soc., 29 (1927), pp. 163-177.
- [II] *Implicit functions and differential equations in general analysis*. Trans. Amer. Math. Soc., 29 (1927), pp. 514-552.
- [III] *Topics in the functional calculus*. Bull. Amer. Math. Soc., 41 (1935), pp. 641-662.

T. H. HILDEBRANDT and L. M. GRAVES

- [I] *Implicit functions and their differentials in general analysis*. Trans Amer. Math. Soc., 29 (1927), pp. 127-153.

E. HILLE

- [I] *Functional analysis and semi-groups*. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., XXXI. New York, 1932, 1932, XII + 530 pp.

P. LÉVY

- [I] *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gauthier-Villars, Paris, 1922, VI + 442 pp.

E. R. LORCH

- [I] *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*. Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943), pp. 414-425.
- [II] *The structure of normed abelian rings*. Bull. Amer. Math. Soc., 50 (1944), pp. 447-463.

J. SEBASTIÃO E SILVA

- [I] *As funções analíticas e a análise funcional*. Dissertação de doutoramento (1948), IV + 130 pp. (publicado em Port. Math., 1950).

G. VALIRON

- [I] *Théorie des fonctions*. Masson, Paris, 2.^a ed., 1948, II + 522 pp.

J. VICENTE GONÇALVES

- [I] *Curso de álgebra superior*. Vol. I, 2.^a ed., Lisboa, 1945, VI + 614 pp.

V. VOLTERRA

- [I] *Leçons sur les fonctions de lignes*. Gauthier-Villars, Paris, 1913, VI + 230 pp.

V. VOLTERRA et J. PÉRÈS

- [I] *Théorie générale des fonctionnelles*. Gauthier-Villars, Paris, 1936, XII + 359 pp.

M. A. ZORN

- [I] *Derivatives and Fréchet differentials*. Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), pp. 133-137.

Lisboa, Agosto de 1950.

UNIVERSIDADE DE LISBOA

REVISTA
DA
FACULDADE DE CIÊNCIAS

2.^a SÉRIE

A—CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

VOL. I—FASC. 2.º



1951

BIBLIOTECA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS
Rua da Escola Politécnica
LISBOA

ADITAMENTO AO ARTIGO «INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO EM ESPAÇOS DE BANACH»

POR

J. SEBASTIÃO E SILVA

O artigo publicado no fasc. 1.º, vol. I, desta revista, com o título «Integração e derivação em espaços de Banach» (págs. 117 a 166), foi escrito e impresso num prazo demasiado breve; daí resultaram alguns erros e deficiências que vamos apontar:

a) Na pág. 123, a norma de $|\pi|$ deveria ser definida como o maior dos números $|t_1 - t_0|, \dots, |t_n - t_{n-1}|$, isto é:

$$|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} |t_i - t_{i-1}| \quad \text{e não} \quad |\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|.$$

Em seguida, deveria demonstrar-se que o valor do integral de $f(x)$ ao longo de Γ (quando este integral existe) não depende da escolha do parâmetro t , mas apenas de orientação de Γ ; isto é, deveria provar-se que, adoptando uma nova representação paramétrica para Γ :

$$x = \gamma^*(u) = \gamma(\theta(u)), \quad 0 \leq u \leq 1,$$

com $\theta(u)$ crescente e contínua, $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = 1$, o valor do integral não muda. A demonstração é quase imediata, atendendo à continuidade uniforme de θ em $[0, 1]$.

b) Na pág. 124, linha 22, onde está

$$\ll |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \text{desde que} \quad |x - x'| < \delta \gg$$

deveria estar

$$\ll |f(\gamma(t)) - f(\gamma(t'))| < \varepsilon \quad \text{desde que} \quad |t - t'| < \delta \gg,$$

pressupondo que t, t' são pontos arbitrários de $[0, 1]$. Não intervém aqui o facto de Γ ser um conjunto compacto, mas apenas a continuidade de $f(x)$ e de $\gamma(t)$.

c) Na pág. 129, linha 2, onde está « $\rho_t > 0$ », deveria estar « ρ_t positivo e menor que δ ». Na mesma página, linha 19, onde está « $\delta_x < \delta$ », deveria estar « $\rho_t < \delta$ », e onde está « $x \in \Gamma$ », deveria estar « $t \in [0, 1]$ ».

d) Na pág. 140, o primeiro membro de [8.1] deveria ser $f(b) - f(a)$ e não $f(x)$ como ali está.

e) Na pág. 145, a fórmula da linha 3 deveria ser

$$\int_{\Gamma_2} \left[\int_{\Gamma_1} F(x, y) dx \right] dy = \int_{\Gamma_1} \left[\int_{\Gamma_2} \overleftarrow{F}(x, y) dy \right] dx.$$

f) Na pág. 150, linha 25, onde está

deveria estar

$$\begin{aligned} & \text{« } x - [f'_y(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y) \text{ »,} \\ & \text{« } y - [f'_y(x_0, y_0)]^{-1} f(x, y) \text{ ».} \end{aligned}$$

g) Na pág. 155, linha 26, onde está «maior» deveria estar «menor», e na linha 27, onde está « $|t - t_0| < \beta$ » deveria estar « $|t - t_0| < \alpha, |x - x_0| < \beta$ ».

h) Há erros tipográficos menos importantes cuja correcção se deixa ao cuidado do leitor.

i) A Bibliografia deve ser ampliada com a citação dos dois seguintes trabalhos importantes que me foram amavelmente indicados pelo Prof. A. E. Taylor:

M. KERNER. «Differentialle in allgemeinen Analysis», *Annals of Math.*, vol. 34 (1933), p. 546-572.

A. D. MICHAL - V. ELCONIN. «Completely integrable differential equations in abstract spaces». *Acta Math.*, vol. 68 (1937), p. 71-107.