

# ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLV - 1948

---

## MEMORIE

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

SERIE VIII - VOLUME I

SEZIONE I

(Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica).



ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1948

---

---

## RELAZIONE

letta ed approvata nella seduta del 16 ottobre 1946, sulla Memoria di JOSÉ SEBASTIÃO e SILVA, presentata nella seduta del 15 giugno 1946 dal Socio M. PICONE, intitolata: *L'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche* (\*).

Con la presente Memoria l'Autore pone nuovi fondamenti all'Analisi degli spazi i cui punti sono funzioni  $\varphi(\zeta)$ , analitiche di una variabile complessa  $\zeta$  della sfera  $\Omega_\zeta$  di Gauss. Per ogni insieme chiuso  $C$  di  $\Omega_\zeta$ , il Silva costruisce uno determinato di tali spazi che chiama *vettoriale analitico* (altri Autori direbbero *lineare analitico*) e indica con  $f[C]$ , il quale riesce lineare nel corpo dei numeri complessi e dotato di nozione di limite. Supposto il punto  $\varphi_\alpha(\zeta)$  di  $f[C]$ , funzione del parametro  $\alpha$ , analitica in un dominio  $D_\alpha$  della sfera complessa  $\Omega_\alpha$ , dimostra che  $\varphi_\alpha(\zeta)$  coincide sempre con una funzione  $\bar{\varphi}(\alpha, \zeta)$  delle due variabili complesse  $\alpha$  e  $\zeta$ , analitica al variare di  $\alpha$  in  $D_\alpha$  e di  $\zeta$  in un certo dominio di  $\Omega_\zeta$ .

Assegnato, ad arbitrio, uno spazio  $S$ , lineare normale esso pure nel corpo complesso, oppure lineare analitico, perviene poi al risultato sorprendente che vi è identità fra le trasformazioni lineari di  $f[C]$  in  $S$  e quelle distributive e analitiche, ottenendone una rappresentazione a mezzo dell'integrale di Cauchy, che generalizza quella già data dal Fantappiè.

Indica, infine, una nuova giustificazione del calcolo simbolico e ulteriori estensioni dei precedenti concetti.

È ben lecito sperare che con questa Memoria il Silva sia pervenuto a porre basi feconde di un grande progresso della teoria delle equazioni lineari negli spazi lineari analitici.

Il lavoro del SILVA appare perciò ben degno di essere accolto, per la sua pubblicazione, nei volumi accademici.

G. CASTELNUOVO,  
MAURO PICONE, *relatore*.

(\*) Alle spese per la stampa della presente Memoria ha generosamente concorso il Consiglio Nazionale delle Ricerche.

---

---

## L'Analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche.

Memoria di JOSÉ SEBASTIÃO e SILVA <sup>(1)</sup>

---

RIASSUNTO. — Partendo da nuove premesse, si fa uno studio generale delle operazioni lineari su funzioni analitiche, col quale vengono estesi i risultati già conseguiti in questo campo dal Fantappiè. In particolare, vengono definiti opportuni concetti di « trasformazione lineare continua » e di « trasformazione lineare analitica », i quali poi risultano equivalenti fra loro. Questi risultati consentono finalmente di presentare sotto nuova forma, e partendo da ipotesi più generali, il calcolo operatorio istituito dal Fantappiè.

1. INTRODUZIONE — Scopo della presente Memoria è di contribuire, in qualche modo, alla chiarificazione e allo sviluppo di uno dei rami più interessanti della moderna Analisi: la teoria, cioè, degli operatori che agiscono su funzioni analitiche.

È ormai a tutti nota la feconda attività di ricerca svolta in questo campo dal prof. Luigi Fantappiè, fondatore della *teoria dei funzionali analitici*, che gli ha consentito di pervenire a interessanti risultati concreti, specialmente per quanto riguarda le applicazioni del metodo operatorio.

Nella più recente sistemazione di questa sua teoria <sup>(2)</sup>, un nitido progresso si è verificato col passaggio dal concetto di « funzione analitica » nel senso classico (di Weierstrass), a quello di « funzione localmente analitica ». Scopo di tale cambiamento era di evitare le complicazioni provenienti dai fatti di polidromia, nonchè di estendere le stesse possibilità di applicazione della teoria.

Mi è sembrato, tuttavia, che il nuovo concetto potesse ancora essere modificato (e non sostanzialmente), in modo da rendere più agevole la trattazione di detta teoria, e, quindi, più facile il suo ulteriore sviluppo. Così, sono pervenuto al concetto di « funzione analitica legata ad un insieme »:

(1) Borsista dell'« Instituto para a Alta Cultura » di Lisbona, presso l'Istituto di Alta Matematica di Roma.

(2) L. FANTAPPIÉ, *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici*. « Atti dell'Acc. d'Italia », Scienze Fis. Mat. e Nat., vol. XII, 1941.

Sia comunque fissato, sul piano sfera,  $\Omega$ , un insieme  $C$  di punti, *chiuso*, *non vuoto e non coincidente con  $\Omega$* ; e siano, d'altronde,  $f(\zeta)$ ,  $f^*(\zeta)$ , due funzioni univocamente definite e analitiche (o, come si dice anche, *olomorfe*), in due qualsivogliano domini aperti, rispettivamente  $D$ ,  $D^*$ , contenenti  $C$ . Ebbene, diremo che le funzioni  $f(\zeta)$ ,  $f^*(\zeta)$  rappresentano una stessa *funzione analitica legata all'insieme  $C$* , se, e soltanto se, esiste almeno una terza funzione  $f^{**}(\zeta)$ , definita anch'essa in un insieme aperto  $D^{**}$  contenente  $C$ , e *della quale le due prime siano prolungamenti*. In tale ipotesi, quest'entità così rappresentata da una qualsiasi delle funzioni  $f, f^*, f^{**}, \dots$  sarà assunta come l'elemento generico del nostro spazio funzionale; mentre, invece, nella trattazione del prof. Fantappiè, le funzioni  $f, f^*$  sono considerate come *elementi distinti* dello spazio, qualora non si abbia  $D = D^*$ , gli insiemi  $D, D^*$  essendo assegnati alle funzioni  $f, f^*$  come i rispettivi *domini di esistenza*, inestensibili per definizione, anche nel caso che le  $f, f^*$  riescano prolungabili analiticamente a domini più estesi. È tuttavia manifesto che, nel nostro caso, lo spazio funzionale varia con l'insieme  $C$  (il suo *insieme caratteristico*) e appunto per questo, lo rappresenteremo con  $\mathfrak{f}[C]$  <sup>(3)</sup>.

Si vede dunque come il concetto di « funzione analitica legata ad un insieme » sia per così dire intermedio fra quello di « funzione analitica di Weierstrass » e quello di « funzione localmente analitica », tendendo a riunire i vantaggi dell'uno e dell'altro, senza conservarne gl'inconvenienti <sup>(4)</sup>. Così, mentre da una parte si evitano con tale convenzione gli imbarazzanti fatti di polidromia inerenti al concetto classico di « funzione analitica » (grazie all'intervento dell'insieme  $C$ ), si riesce, dall'altra parte, ad eliminare certe considerazioni relative ai domini di esistenza, imposte dal concetto di funzione « localmente analitica », le quali considerazioni ingombrano inutilmente la teoria, celandone la vera essenza e l'intrinseca bellezza. In particolare si perviene subito, in modo del tutto naturale, alle definizioni di « somma di due funzioni » e di « prodotto di una funzione per un numero complesso (cioè, uno *scalare*) », nonché al concetto di « limite » di una successione  $(\varphi_n)$  di elementi di  $\mathfrak{f}[C]$ . Quest'ultimo, poi, non è altro in fondo che il concetto di *convergenza uniforme, riferita ad un eventuale dominio di olomorfia comune a tutte le funzioni  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  e contenente  $C$*  <sup>(5)</sup>. Con tali nozioni primitive, l'insieme

(3) Si potrebbe pure, con la stessa orientazione, stabilire un concetto di « spazio funzionale analitico universale ».

(4) Si aggiunga che il nuovo concetto è più complesso di quello di WEIERSTRASS, in quanto che, nel caso che l'insieme  $C$  sia sconnesso e formato di un numero finito di *componenti* (insiemi connessi staccati fra di loro), una funzione può essere definita separatamente per ciascuna delle componenti di  $C$ , senza che vi sia nessun legame obbligatorio tra queste determinazioni parziali.

(5) Con tale concetto, l'operatore di derivazione riesce manifestamente *continuo*, per forza del teorema di WEIERSTRASS, secondo il quale, data una successione  $(\varphi_n)$  di funzioni analitiche, la quale converga uniformemente sulla frontiera di un dato dominio, si avrà ancora *uniformemente*  $\mathfrak{D}_\zeta \lim_n \varphi_n(\zeta) = \lim_n \mathfrak{D}_\zeta \varphi_n(\zeta)$ , *sull'interno dello stesso dominio*.

$f[C]$  diventa uno *spazio* ( $\mathfrak{D}$ ) *vettoriale*<sup>(6)</sup> e i suoi elementi possono allora venir denominati *vettori*. Si avrà così un metodo, che possiamo chiamare *diretto*, per lo studio degli operatori che agiscono su funzioni analitiche.

Ora, nella trattazione del prof. Fantappiè<sup>(7)</sup>, tutti i ragionamenti muovono dal concetto di *funzione analitica di  $\lambda$ , dipendente analiticamente da un parametro,  $\alpha$* , intendendo per questo, semplicemente, una funzione analitica di  $\lambda$ ,  $\varphi(\lambda, \alpha)$ , variabile col parametro  $\alpha$ , in modo da riuscire *funzione analitica* delle due variabili  $\lambda, \alpha$ . In tale ordine di idee, un funzionale  $F$  (cioè, un operatore che trasformi *funzioni in numeri*) si dice *analitico*, quando, applicato ad una funzione  $\varphi(\lambda, \alpha)$  di  $\lambda$ , *dipendente analiticamente dal parametro  $\alpha$* , la trasformi in una funzione  $f(\alpha) \equiv F_\lambda[\varphi(\lambda, \alpha)]$ , ancora analitica in  $\alpha$ . Ed è sostanzialmente con tali premesse che Egli perviene all'espressione generale dei funzionali analitici lineari definiti in una data *regione funzionale lineare* ( $C$ ) (dando questo nome alla famiglia delle funzioni localmente analitiche i cui domini d'esistenza contengono  $C$ ).

Consideriamo invece due spazi  $f[C], f[C^*]$  con  $C \neq C^* \circ C = C^*$ . Avrà ora un senso (e l'aveva anche prima, sebbene in modo diverso) parlare di *trasformazioni continue* e di *trasformazioni lineari di  $f[C]$  su  $f[C^*]$* . Ma si potrà anche definire *direttamente*, a partire dalla nozione di «limite» ivi introdotta, il concetto di *funzione  $\varphi_\alpha(\lambda)$  di  $\lambda$ , dipendente analiticamente dal parametro  $\alpha$* , concependo adesso la  $\varphi_\alpha$  come *funzione analitica di  $\alpha$ , di codominio contenuto in  $f[C]$  o in  $f[C^*]$* , e non come semplice funzione analitica delle due variabili  $\lambda, \alpha$ ; quantunque possa poi venir interpretata come tale (v. definizioni del n. 4 e teoremi dei nn. 5, 6).

Diremo inoltre che una trasformazione puntuale univoca  $F$  di  $f[C]$  su  $f[C^*]$  è *analitica*, quando trasformi le funzioni *analitiche* di codominio contenuto in  $f[C]$ , in funzioni *analitiche* di codominio contenuto in  $f[C^*]$ <sup>(8)</sup>.

E, con tali premesse, si perviene facilmente a questo risultato fondamentale:

*La classe delle trasformazioni lineari continue di  $f[C]$  su  $f[C^*]$  coincide con la classe delle trasformazioni lineari analitiche di  $f[C]$  su  $f[C^*]$ .*

Contemporaneamente, vien stabilita l'espressione generale di siffatte trasformazioni<sup>(9)</sup>, il che, nel presente lavoro, faremo a partire dal concetto di «operatore lineare analitico»; essendo peraltro manifesto che lo stesso

(6) Per analogia con l'espressione del prof. FRÉCHET: *spazio* ( $\mathfrak{D}$ ) *vettoriale* (vedi FRÉCHET, *Espaces abstraits*, Paris, Gauthier Villars). Sullo stesso argomento, v. M. PICONE, *Fondamenti di Analisi funzionale lineare*, Libreria Univ. Roma, 1943, p. 339.

(7) Per le precisazioni, v. FANTAPPIÈ, Mem. cit.

(8) Si badi che gli operatori ora considerati sono qualche cosa di più che i funzionali precedenti (quelli, cioè, che trasformano *funzioni in numeri*). In un prossimo lavoro intendo occuparmi di operatori analitici non lineari; in tale caso, l'estensione del concetto di analiticità si rivela possibile in più modi diversi.

(9) Questa espressione generalizza quella data per i funzionali. È vero che il prof. FANTAPPIÈ considera anche gli operatori che trasformano *funzioni in funzioni*, sotto la forma di *funzionali misti*; ma i suoi risultati non sono equivalenti a quelli qui esposti.

potrebbe essere fatto a partire dal concetto di « operatore lineare continuo », dimostrando dopo l'identità sopra enunciata <sup>(10)</sup>.

*Ma un altro fatto va posto in massimo rilievo:* che, cioè, i risultati precedenti sussistono, *mutatis mutandis*, quando, al posto del secondo spazio  $f[C^*]$ , si consideri un qualunque *spazio lineare normale complesso*  $\mathfrak{S}$ , in cui valga il criterio di convergenza di Cauchy, cioè uno *spazio di Banach nel corpo complesso* <sup>(11)</sup>. Una conseguenza notevole di questo fatto è che il calcolo degli operatori lineari, istituito dal prof. Fantappiè, avendo come scopo predominante quello delle applicazioni all'integrazione di equazioni differenziali, potrà ora venire esteso anche alle *trasformazioni lineari di un qualunque spazio di Banach complesso* (in particolare per quelle dello spazio hilbertiano). Tuttavia, per non rendere troppo lunga la presente Memoria, mi limiterò qui ad accennare alle possibilità di tale estensione, la quale si basa sul notevole fatto seguente:

*Tutte le proposizioni fondamentali della teoria classica delle funzioni analitiche possono essere estese a quelle funzioni vettoriali analitiche delle variabili complesse, il cui codominio è contenuto in uno spazio di Banach complesso* <sup>(12)</sup>.

Si osservi inoltre che tutto il calcolo degli operatori lineari viene ora basato rigorosamente su una formula analoga a quella di Cauchy; e che, d'altra parte, diventano precise le condizioni che debbono regolare l'uso di serie di operatori.

È ancora da rilevare che tutti i risultati precedenti si possono estendere al caso delle funzioni analitiche di più variabili: tuttavia, per il fatto che tale estensione non presenta difficoltà sostanziali, mi astengo dallo svilupparla in questo lavoro.

Devo finalmente avvertire che, in tutte queste ricerche, sono stato guidato da un insieme di considerazioni logico-matematiche, che formano l'oggetto di una mia Memoria recentemente pubblicata <sup>(13)</sup>. Ho tuttavia cercato di fare in modo da non rendere qui indispensabile una previa lettura di detta Memoria.

NOTA. — Solo dopo la redazione della presente Memoria ho potuto leggere un interessante Nota del prof. R. CACCIOPOLI <sup>(14)</sup> nella quale vien considerato un concetto di « limite », che coincide, in sostanza, con quello qui definito. Bisogna tuttavia avvertire che: 1° il prof. Cacciopoli non vi definisce il concetto di « funzione analitica legata ad un insieme chiuso »; 2° i suoi ragionamenti muovono dal teorema di Fr. RIESZ sulla rappresentazione dei fun-

(10) Basta osservare che la formula integrale di CAUCHY consente di esprimere ogni funzione analitica come limite di una successione *uniformemente convergente* di certe funzioni razionali (v. lavori di RUNGE sull'argomento).

(11) Sugli spazi di BANACH nel corpo reale, v. FRÉCHET, op. cit.

(12) Si escludono, naturalmente, le classiche condizioni di monogeneità. Sussiste invece l'equivalenza tra i concetti di monogeneità e di analiticità rispetto a domini aperti.

(13) *Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque*. «Comm. Pontificia Acc. Sc. », vol. IX, n. 9, 1945, pp. 327-357.

(14) *Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche*. «Rend. Acc. Naz. Lincei », 1931, vol. XII, p. 263.

zionali lineari continui definiti in insiemi di funzioni continue; 3° Egli considera unicamente *funzionali puri* (quelli, cioè, che trasformano *funzioni* in *numeri*; e non *funzioni* in *funzioni*).

È poi da rilevare che lo studio degli operatori lineari continui definiti fra due spazi  $\mathfrak{f}[C]$ ,  $\mathfrak{f}[C^*]$  non si riduce affatto a quello dei *funzionali misti*, dando questo nome ai funzionali della forma  $y = F_x[\varphi(x); t]$ , dove  $\varphi$  è una variabile-funzione e  $t$  una variabile numerica sopra un *insieme fisso*. Basterebbe osservare che non esiste nessun intorno dell'insieme  $C^*$  dove siano olomorfe tutte le funzioni appartenenti a  $\mathfrak{f}[C^*]$ . Tuttavia, da quanto in seguito verrà stabilito, si desume che, data comunque una trasformazione lineare continua  $F$  di  $\mathfrak{f}[C]$  su  $\mathfrak{f}[C^*]$ , ogni famiglia  $\mathfrak{F}$  (finita o infinita) di funzioni olomorfe in uno stesso intorno  $D$  di  $C$  sarà trasformata da  $F$  in una famiglia  $\mathfrak{F}^*$  di funzioni ancora olomorfe in uno stesso intorno  $D^*$  di  $C^*$ . Ma questo, appunto, bisogna dimostrarlo.

Aggiungerò da ultimo che sono pervenuto al concetto di « limite » in questione, cercando di adattare al concetto di « funzione analitica legata ad un'insieme » il concetto di « intorno » introdotto dal prof. FANTAPPIÈ.

## 2. IL CONCETTO DI FUNZIONE ANALITICA LEGATA AD UN INSIEME CHIUSO.

— In tutto ciò che segue, rappresenteremo con  $\Omega$  il *piano-sfera*, il piano, cioè, della variabile complessa, ampliato con l'aggiunta del punto  $\infty$ . Come è noto, il piano-sfera costituisce uno spazio topologico *compatto*<sup>(15)</sup>, dacchè si prendano come intorni di ogni punto al finito, per esempio, le parti interne dei cerchi con centro nel punto stesso e, come intorni del punto improprio, per esempio, le parti esterne dei cerchi con centro nell'origine. Lo spazio topologico così definito è inoltre *metrizzabile*: un criterio di distanza che definisca la stessa topologia, può esservi introdotto mediante il noto procedimento della proiezione stereografica; la nuova distanza sarà detta *sferica*, e si chiamerà d'altronde *intorno sferico* ( $\delta$ ) di un punto  $z$ , l'insieme dei punti la cui distanza da  $z$  sia minore di  $\delta$ .

Una volta precisato quali sono gli intorni dei punti di questo spazio, i concetti di *chiusura*, *parte interna*, *parte esterna*, *frontiera*, ecc. (*di un insieme A qualunque*), nonchè i concetti di *insieme aperto*, *insieme chiuso*, *insieme connesso*, ecc., ne derivano immediatamente secondo la teoria generale degli spazi topologici.<sup>(16)</sup> Ricordiamo inoltre che si chiama *copertura aperta* di un insieme  $A$ , ogni famiglia  $\mathfrak{F}$  di insiemi aperti la cui somma contenga  $A$ . Una proposizione della quale non si potrebbe fare a meno nella teoria degli operatori analitici è la seguente:

LEMMA I. (Heine-Borel-Lebesgue). — *In ogni spazio metrizzabile compatto, data comunque una copertura aperta  $\mathfrak{F}$  di un qualsiasi insieme chiuso  $C$ , esiste*

(15) Cioè tale che ogni insieme infinito vi ammette almeno un punto di accumulazione (FRÉCHET).

(16) Dati un insieme  $A$  ed un punto  $p$ , si dice che: 1°  $p$  è *interno* ad  $A$ , quando esista almeno un intorno di  $p$  contenuto in  $A$ ; 2°  $p$  è *esterno* ad  $A$ , quando sia interno al complementare di  $A$ ; 3°  $p$  è *aderente* ad  $A$  (o appartiene alla *chiusura* di  $A$ ), quando non sia esterno ad  $A$ ; 4°  $p$  appartiene alla *frontiera* di  $A$ , quando non sia nè interno nè esterno ad  $A$ , ecc. D'altra parte, un insieme si dice *aperto*, quando coincide con la sua parte interna; *chiuso*, quando coincide con la sua chiusura (quando cioè il suo complementare è aperto); *sconnesso*, quando si può decomporre nella somma di due insiemi tali che ogni punto di ciascuno di essi sia esterno all'altro, ecc.

*sempre (eventualmente in più modi) un numero finito di insiemi appartenenti ad  $\mathfrak{F}$ , che formano, anch'essi, una copertura aperta dell'insieme  $C$  <sup>(17)</sup>.*

Convieni inoltre ricordare questo fatto: *che, in qualunque spazio di intorni, ogni insieme  $A$  si trova univocamente decomposto in una famiglia di insiemi connessi MASSIMI (non contenuti, cioè, in altri sotto-insiemi connessi di  $A$ ), i quali si dicono le COMPONENTI dell'insieme  $A$  <sup>(18)</sup>.* Allora, un insieme connesso del piano-sfera si dirà *semplicemente connesso*, se pure il suo complementare è connesso; e si dirà  *$n$ -uplamente connesso* (con  $n > 1$ ), quando il suo complementare sia formato di  $n$  componenti. Osserviamo intanto che un insieme può essere anche formato di infinite componenti.

Chiameremo *dominio aperto* ogni insieme aperto, e *dominio chiuso*, la chiusura di ogni insieme aperto. Chiameremo inoltre *intorno aperto* [chiuso] di un dato insieme  $A$ , ogni dominio aperto [chiuso] contenente  $A$  e tale che ciascuna delle sue componenti contenga almeno una componente di  $A$  [nel suo interno] <sup>(19)</sup>. È facile vedere che: *Dati comunque due intorni  $D_1, D_2$  di  $A$ , esiste almeno un intorno  $D_3$  di  $A$ , tale che  $D_3 \subset D_1, D_3 \subset D_2$ .* Dal lemma I si deduce immediatamente quest'altra proposizione:

LEMMA II. - *In qualunque spazio metrizzabile compatto, ogni intorno di un insieme chiuso  $C$  non può avere che un numero finito di componenti (anche se  $C$  ne ha infinite).*

Per brevità di linguaggio chiameremo *curve semplici* del pianosfera le immagini omeomorfe della circonferenza (linee continue chiuse senza punti multipli). Allora, possiamo enunciare anche la seguente proposizione, più specifica della precedente.

LEMMA III. - *Nello spazio  $\Omega$ , ogni intorno di qualsivoglia insieme chiuso contiene almeno un intorno dello stesso insieme, la cui frontiera è la somma di un numero finito di curve semplici, senza punti comuni, formate di un numero finito di archi di cerchio.*

Ciò premesso, supponiamo dato sul piano-sfera un insieme  $C$  di punti, *chiuso, non vuoto e non coincidente con l'intero spazio,  $\Omega$ .* Adottando in parte la terminologia del prof. Fantappiè, chiameremo *funzione localmente analitica*, ogni funzione complessa della variabile complessa (nel senso generale), *univocamente* definita in un determinato dominio, aperto o chiuso, e *monogena* in tutti i punti di tale dominio <sup>(20)</sup>. Allora, date due funzioni localmente anali-

(17) ALEXANDROFF und HOPF, *Topologie*, Berlin. Springer 1935, p. 87.

(18) Ibidem, p. 49.

(19) Quando diremo soltanto « dominio » o « intorno », intenderemo parlare di un dominio o intorno qualsiasi, non importa se aperto o chiuso.

(20) Ricordiamo che una funzione  $f(z)$  si dice monogena nel punto  $z = \infty$ , quando la funzione  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  lo è nel punto  $z = 0$ ; e che, se la  $f(z)$  è monogena in tutto un conveniente intorno del punto improprio, ammetterà uno sviluppo  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$  convergente in tale intorno.

Invece di « localmente analitica » si potrebbe dire, semplicemente, « olomorfa »; ma la prima espressione tende a fare presente che il concetto in questione esclude quello di *prolungamento analitico*, nel senso che abbiamo precisato nell'introduzione.

tiche  $f_1(z), f_2(z)$ , definite in due intorni, rispettivamente  $D_1, D_2$ , dell'insieme  $C$ , diremo che tali funzioni sono *equivalenti rispetto a  $C$* , o che rappresentano la stessa *funzione analitica legata all'insieme  $C$* , se, e soltanto se, essendo  $D_3$  un intorno di  $C$  contenuto nell'intersezione dei due domini  $D_1, D_2$ , si ha  $f_1(z) = f_2(z)$  per ogni  $z \in D_3^{(21)}$ . Così, ogni funzione analitica legata a  $C$  non sarà altro che una classe di infinite funzioni localmente analitiche, equivalenti tra di loro rispetto a  $C$ . E chiameremo, naturalmente, domini di olomorfia di una funzione analitica legata a  $C$  gli *intorni di questo insieme*, dove essa riesca univocamente definita e analitica.

*Che rapporto vi è tra il concetto di funzione analitica ora introdotto e il concetto di funzione analitica nel senso di Weierstrass?*

Supponiamo dapprima che l'insieme  $C$  sia connesso. Allora, ogni funzione analitica legata a  $C$  definirà una funzione analitica nel senso di Weierstrass; ma non è affatto escluso che *distinte* funzioni analitiche legate a  $C$  possano rappresentare *una stessa* funzione analitica nel senso di Weierstrass, la quale, in questo caso, sarà naturalmente *pluriforme*. Più precisamente: data una funzione analitica pluriforme che ammetta rami monodromi in un intorno dell'insieme  $C$ , ciascuno di questi rami costituirà una determinata funzione analitica legata a  $C$ .

*Esempio.* L'insieme  $C$  sia la circonferenza con centro nell'origine e di raggio 2. Allora, la funzione analitica  $f(z) \equiv \frac{1}{z+1} \sqrt[4]{z^2-9}$ , che riesce manifestamente olomorfa sopra un conveniente intorno dell'insieme  $C$  (per esempio, l'intorno  $D$  costituito dalla corona circolare con centro nell'origine e di raggi  $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}$ ), rappresenterà *quattro* funzioni analitiche legate a  $C$ , corrispondenti ai quattro rami della  $f(z)$  sopra il dominio  $D$ . Invece, la funzione  $\log z$  non può rappresentare nessuna funzione analitica legata a  $C$ .

Se, però, avviene il caso che l'insieme  $C$  non sia connesso ed abbia precisamente  $n$  componenti, allora una funzione analitica legata a  $C$  rappresenterà, in generale, non più una, ma bensì  $n$  funzioni analitiche nel senso di Weierstrass, le quali possono essere completamente indipendenti fra di loro purchè ciascuna delle componenti dell'insieme  $C$  sia contenuta in un dominio di olomorfia di una di codeste funzioni.

*Esempio.* L'insieme  $C$  abbia per componenti: 1° i punti  $4i, -4i$ ; 2° la corona circolare  $\Gamma$  con centro nell'origine e di raggi 2 e 3. Allora, rappresentato con  $D$  l'intorno dell'insieme  $C$  che ha per componenti: I) i cerchi  $\Gamma_1, \Gamma_2$ , di raggio  $\frac{1}{4}$  e di centri rispettivamente  $4i, -4i$ ; II) la corona circolare  $\Gamma_3$  con centro nell'origine e di raggi  $1, 3\frac{1}{2}$ , la funzione  $\varphi(z)$  così definita:

(21) È facile verificare che si tratta qui, effettivamente, di una relazione di equivalenza — cioè, di una relazione *riflessiva, simmetrica e transitiva*. Ricordiamo d'altra parte come ogni relazione di equivalenza possa convertirsi in una relazione di identità.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(z) = \frac{1}{z+4i} & \text{sopra } \Gamma_1, \\ \varphi(z) = \frac{1}{z-4i} & \text{sopra } \Gamma_2, \\ \varphi(z) = \frac{1}{z} \sqrt{z^2+16} & \text{sopra } \Gamma_3, \text{ con } \varphi(3) = \frac{5}{3}, \end{array} \right.$$

rappresenta una funzione analitica legata all'insieme C, della quale D non è che uno degli infiniti domini di olomorfia. Ma anche la sola funzione  $\frac{1}{z}$  rappresenta una funzione legata all'insieme C.

Supponiamo finalmente che l'insieme C abbia infinite componenti. Allora in virtù del lemma II, ogni intorno di C ammetterà soltanto un numero finito di componenti, e così una *funzione analitica legata* a C non potrà rappresentare che un numero finito di funzioni analitiche nel senso di Weierstrass, il quale numero, tuttavia, non è soggetto a nessuna limitazione.

*Esempio.* L'insieme C sia costituito dai punti  $0, \pm i, \pm 2i, \dots, \pm ni, \dots, \infty$ , e siano  $\Gamma_0, \Gamma_i, \Gamma_{-i}, \Gamma_\infty$ , rispettivamente, cerchi con centri in  $0, i, -i, \infty$  e di raggi  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ ; allora, prese comunque le serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-i)^n, \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+i)^n, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{z^n}$  con la sola condizione che siano convergenti, rispettivamente, all'interno di  $\Gamma_0, \Gamma_i, \Gamma_{-i}$  e all'esterno di  $\Gamma_\infty$ , l'insieme di queste serie definirà una determinata funzione analitica legata a C. È ovvio che il raggio del cerchio  $\Gamma_\infty$  potrebbe essere aumentato, in modo che un maggior numero di componenti di C passasse al suo interno: ma non vi potrebbe passare che un numero finito di tali componenti.

3. SPAZI VETTORIALI ANALITICI. - Sia ancora C un sotto-insieme *chiuso* di  $\Omega$ , *non vuoto* e *non coincidente* con  $\Omega$ . Con il simbolo  $f[C]$  rappresenteremo sistematicamente:

1° l'insieme di *tutte* le funzioni analitiche legate a C - se l'insieme C non contiene il punto improprio;

2° l'insieme di quelle sole funzioni analitiche legate a C che si annullano nel punto improprio - se questo punto appartiene a C.

Nell'insieme  $f[C]$  possono essere definite una *addizione* e una *moltiplicazione*, nel modo seguente, che è anche il più naturale:

Date comunque  $\varphi, \psi$  appartenenti a  $f[C]$ , chiameremo *somma* di  $\varphi$  con  $\psi$ , la funzione  $\varphi + \psi$ , appartenente pure essa a  $f[C]$ , tale che, essendo D un comun dominio di olomorfia della  $\varphi$  e della  $\psi$  (contenente C all'interno) si abbia  $(\varphi + \psi)(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ , per ogni  $z \in D$ ; e chiameremo *prodotto* di  $\varphi$  per  $\psi$ , la funzione  $\varphi \cdot \psi$  tale che, per ogni punto  $z$  di un siffatto dominio D, si abbia  $(\varphi \cdot \psi)(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z)$  <sup>(22)</sup>.

(22) Conviene osservare che: 1° se  $D_1, D_2$  sono domini di olomorfia aperti (chiusi), rispettivamente, della  $\varphi$  e della  $\psi$ , l'intersezione  $D_1, D_2$  conterrà un comun dominio di olomorfia (chiuso) delle stesse funzioni; 2° la somma e il prodotto di due funzioni non cambiano col variare del dominio D, di cui si parla nella definizione, il che vuol dire che tale somma e tale prodotto sono *univocamente determinati*.

Rispetto alle due operazioni definite, l'insieme  $f[C]$  costituisce, manifestamente, un *anello commutativo* <sup>(23)</sup>; ma non è questa, propriamente, la struttura algebrica che ci interessa di fissare in tale insieme. Badando soltanto all'*addizione* e al *prodotto di funzioni*  $\varphi, \psi \dots$  per numeri complessi  $\alpha, \beta \dots$  si constata che:

I. Rispetto alla prima operazione, l'insieme  $f[C]$  forma un *gruppo commutativo*; cioè, l'addizione è quivi un'operazione univoca, associativa, commutativa, e la sua operazione inversa – la sottrazione – è possibile per qualunque coppia di elementi <sup>(24)</sup>;

II. Rispetto alla seconda operazione, si ha, quali che siano i numeri complessi  $\alpha, \beta$  e le funzioni  $\varphi, \psi$  appartenenti a  $f[C]$ :

- 1°  $\alpha\varphi$  è un elemento determinato di  $f[C]$ ;
- 2°  $\alpha(\varphi + \psi) = \alpha\varphi + \alpha\psi$      $(\alpha + \beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$ ;
- 3°  $(\alpha\beta)\varphi = \alpha(\beta\varphi)$ ;
- 4°  $1 \cdot \varphi = \varphi$ .

Esprimeremo questi fatti, dicendo che l'insieme  $f[C]$  forma un *sistema lineare*, rispetto all'addizione e al *corpo di scalari* costituito dai numeri complessi <sup>(25)</sup>.

Abbiamo così sottolineato in  $f[C]$  una particolare struttura algebrica; ma si può anche aggiungervi, in modo ugualmente naturale, una *struttura topologica*, rispetto alla quale le operazioni precedenti riescono *continue*. Ciò avviene nel modo seguente:

Data una successione  $\varphi_n [n = 0, 1, 2, \dots]$  di elementi di  $f[C]$  (*punti* o *vettori* di questo spazio); diremo che tale successione ha per *limite* un determinato elemento  $\varphi$  di  $f[C]$ , e scriveremo allora  $\lim_n \varphi_n = \varphi$ , se esiste almeno un intorno  $D$  dell'insieme  $C$ , tale che: 1)  $D$  sia un comun dominio di olomorfia di tutte le funzioni  $\varphi_n$ ; 2) per ogni  $\varepsilon > 0$ , si possa trovare un intero  $p$  soddisfacente la condizione:

$$|\varphi_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon, \quad \text{quali che siano } n > p, z \in D;$$

cioè, in altri termini: quando esista almeno un intorno  $D$  di  $C$ , sul quale la  $\varphi_n(z)$  *tenda, uniformemente* alla  $\varphi(z)$ , per  $n \rightarrow \infty$ .

Con l'aggiunta di tale concetto di limite, il *sistema lineare*  $f[C]$  diventa quello che chiameremo uno *spazio vettoriale analitico*. Topologicamente, si tratta di uno spazio appartenente alla categoria degli *spazi* ( $\mathcal{L}$ ) o *spazi di convergenza* <sup>(26)</sup>. Sarà questo spazio anche metrizzabile? Più precisamente:

(23) VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, Springer, 2ª ed., 1937, p. 37. È inoltre da rilevare che l'anello in questione sarà un *dominio d'integrità*, se e soltanto se l'insieme  $C$  è connesso.

(24) Ibidem, pp. 13-17.

(25) Potremmo anche dire, in questo caso, «spazio lineare» o «spazio vettoriale», invece di «sistema lineare». VAN DER WAERDEN applica la denominazione *Vektorraum* ad una classe più ampia di sistemi algebrici, imponendo agli scalari la sola condizione di formare un anello (op. cit., p. 46 e p. 104).

(26) «*Espaces* ( $\mathcal{L}$ )» secondo FRÉCHET (*Les espaces abstraits*, Paris, p. 163). ALEXANDROFF e HOPF dicono in questo caso *Konvergenzräume* (op. cit., p. 27).

Sarà possibile introdurre un criterio di distanza, cui possa ricondursi il precedente concetto di limite? Di questo problema mi occuperò in un lavoro ulteriore.

Intanto osserviamo che gli spazi vettoriali analitici costituiscono particolari *sistemi matematici*, nel senso precisato nella mia Memoria dianzi citata (v. Introduzione): le entità primitive sono, in questo caso, le operazioni  $+$ ,  $\lim$  e i singoli moltiplicatori scalari  $\alpha, \beta, \dots$ , i quali possono venir pensati come operatori (e precisamente operatori lineari continui) definiti in  $f[C]$ , e, quindi, come *entità di tipo 2 sopra*  $f[C]$ .

4. IL CONCETTO DI FUNZIONE VETTORIALE ANALITICA. - Oltre le successioni di vettori dello spazio- $f[C]$ , le quali non sono altro che *funzioni vettoriali della variabile intera*,  $n$ , interessa considerare *funzioni vettoriali della variabile scalare (complessa)*  $\alpha$ . Si dirà naturalmente che, in un dato sottoinsieme  $A$  del piano sfera  $\Omega_\alpha$ , è univocamente definita una *funzione vettoriale*  $\varphi_\alpha$  della variabile scalare,  $\alpha$ , a *codominio* contenuto nello spazio  $f[C]$ , quando sia data una legge per la quale, ad ogni  $\alpha \in A$  venga associato uno, ed uno solo, elemento  $\varphi_\alpha$  di  $f[C]$  <sup>(27)</sup>.

Ciò posto, sia  $\varphi_\alpha$  una funzione di codominio contenuto in  $f[C]$ , univocamente definita in un dominio  $D$  dello spazio  $\Omega_\alpha$ . Allora, diremo che tale funzione è analitica in un dato punto  $\alpha_0$  appartenente a  $D$ , quando esista almeno una successione  $(\varphi_n)$  di elementi di  $f[C]$  tale che, *per ogni punto*  $\alpha$  *di un intorno di*  $\alpha_0$ , si abbia

$$(1) \quad \varphi_\alpha = \lim_n \sum_{i=0}^n (\alpha - \alpha_0)^i \varphi_i \quad \text{se } \alpha_0 \text{ è un punto proprio;}$$

o

$$(2) \quad \varphi_\alpha = \lim_n \sum_{i=0}^n \frac{1}{\alpha^i} \varphi_i \quad \text{se } \alpha_0 \text{ è il punto improprio.}$$

Naturalmente, la  $\varphi_\alpha$  si dirà analitica nel dominio  $D$ , quando lo sia in tutti i punti appartenenti a  $D$ .

Un'osservazione che si impone fin dall'inizio è questa:

*La precedente definizione è data esclusivamente in termini primitivi dello spazio vettoriale analitico*  $f[C]$ ; *cioè, oltre l'addizione, l'operatore*  $\lim$  *e i moltiplicatori scalari, non vi intervengono che nozioni puramente logico-formali* <sup>(28)</sup>.

Così come avviene per le funzioni analitiche ordinarie, una data funzione vettoriale analitica  $\varphi_\alpha$ , *inizialmente definita* in un dominio aperto  $D$ ,

(27) Invece della notazione  $\varphi_\alpha$  sarebbe più naturale, in certo senso, una notazione del tipo  $\Phi(\alpha)$ ; ma quest'ultima, oltre a riuscire ingombrante, nasconde l'analogia con le successioni di vettori. Certi autori preferiscono usare, in casi simili, l'espressione « *punto-funzione* », invece di « *funzione vettoriale* ». (V. per esempio VITALI, *Geometria dello spazio hilbertiano*, Zanichelli, Bologna, 1929, p. 75).

(28) Usando la terminologia adottata nella mia citata Memoria (p. 336) possiamo dire, più precisamente, che il concetto di « *funzione vettoriale analitica* » è *logicamente esprimibile, in senso normale, nei concetti primitivi sopra indicati*.

potrà essere o no *prolungata analiticamente* ad un altro dato dominio aperto  $D^*$  che intersechi  $D$ ; e, nel caso affermativo, lo potrà essere *in modo unico* <sup>(29)</sup>. La somma di tutti i domini ai quali la  $\varphi_\alpha$  sia analiticamente prolungabile sarà, manifestamente, un dominio *aperto*  $R$ , che, per manifeste ragioni di analogia, chiameremo *l'insieme dei punti regolari* o il *dominio di regolarità* della  $\varphi_\alpha$ . E può darsi che, nella sua *massima espansione*, la  $\varphi_\alpha$  riesca *uniforme*, ma può anche darsi che risulti allora *pluriforme*. Osserviamo però che, analogamente a quanto abbiamo detto per le funzioni localmente analitiche, non è affatto escluso che il dominio iniziale  $D$  sia *sconnesso* e che, inoltre, non sia possibile passare, per prolungamento analitico, dai valori che la  $\varphi_\alpha$  assuma in qualche componente del dominio  $D$  ai valori che essa assuma in qualche altra componente dello stesso dominio.

5. TEOREMA SULLE SINGOLARITÀ DI UNA FUNZIONE ANALITICA DIPENDENTE ANALITICAMENTE DA UN PARAMETRO. — Sia  $\varphi_\alpha$  una funzione di  $\alpha$ , di codominio contenuto in  $f[C]$ , analitica in un dominio  $D$  del piano-sfera. Vieni fatto allora di domandare come variano le singolarità della funzione  $\varphi_\alpha(\zeta)$  di  $\zeta$ , col variare del *parametro*  $\alpha$ . Supponiamo, per esempio, che  $\alpha$  descriva una curva semplice: Esisterà allora, per lo meno, un intorno dell'insieme  $C$ , sul quale la  $\varphi_\alpha(\zeta)$  si conservi sempre olomorfa, o accade invece che le singolarità di questa funzione di  $\zeta$  possano avvicinarsi in modo arbitrario all'insieme  $C$ ?

Per risolvere la questione, cominciamo col considerare un qualsiasi punto proprio  $\alpha_0$ , appartenente a  $D$  <sup>(30)</sup>. Dato che, per ipotesi, la funzione vettoriale  $\varphi_\alpha$  è analitica in  $D$ , esisteranno un intorno  $V$  di  $\alpha_0$  e una successione  $(\varphi_n)$  di elementi di  $f[C]$  tali che, per ogni  $\alpha \in V$ , la serie

$$\varphi_0(\zeta) + (\alpha - \alpha_0)\varphi_1(\zeta) + \dots + (\alpha - \alpha_0)^n \varphi_n(\zeta) + \dots$$

converga uniformemente rispetto a  $\zeta$  in tutto un intorno  $D(\alpha)$  di  $C$ . Allora, se rappresentiamo con  $\alpha^*$  un valore arbitrario di  $\alpha$  appartenente a  $V$ , esisterà un numero positivo  $M$ , tale che

$$|(\alpha^* - \alpha_0)^n \varphi_n(\zeta)| < M, \quad \text{ossia} \quad |\varphi_n(\zeta)| < \frac{M}{|\alpha^* - \alpha_0|^n}, \quad \text{quali che siano}$$

$$\zeta \in D(\alpha^*), \quad n = 0, 1, \dots$$

donde, ancora

$$|(\alpha - \alpha_0)^n \varphi_n(\zeta)| < M \left| \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha^* - \alpha_0} \right|^n, \quad \text{quali che siano}$$

$$\alpha \in V, \zeta \in D(\alpha^*), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(29) Si intende che chiamiamo qui *prolungamento analitico della  $\varphi_\alpha$  al dominio  $D^*$* , quell'eventuale funzione vettoriale  $\varphi_\alpha^*$ , analitica in  $D^*$ , tale che:  $\varphi_\alpha^* = \varphi_\alpha$  per ogni  $\alpha$  appartenente a un dominio  $D^{**} \subset D \cap D^*$ .

L'*unicità* del prolungamento analitico è una conseguenza del *principio delle identità*, il quale sussiste anche per le funzioni vettoriali analitiche, come si può dedurre facilmente da certe proposizioni che più innanzi saranno indicate.

(30) Per il caso del punto improprio, si può ragionare in modo del tutto analogo.

Ma questo indica che, per ogni  $\alpha$  soddisfacente la condizione  $|\alpha - \alpha_0| < |\alpha^* - \alpha_0|$ , la serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha^* - \alpha_0} \right|^n$  sarà maggiorante della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |(\alpha - \alpha_0)^n \varphi_n(\zeta)|$ , qualunque sia  $\zeta \in D(\alpha^*)$ ; il che vuol dire che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \alpha_0)^n \varphi_n(\zeta)$  converge allora uniformemente rispetto a  $\zeta$  sul dominio  $D(\alpha^*)$ . D'altra parte, secondo il teorema di Weierstrass<sup>(31)</sup>, la somma della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \alpha_0)^n \varphi_n(\zeta)$  sarà una funzione di  $\zeta$  univocamente definita e analitica in tutto l'interno del dominio  $D(\alpha^*)$ , sul quale essa rappresenterà, manifestamente, la funzione  $\varphi_\alpha(\zeta)$  di  $\zeta$  (sempre nell'ipotesi che sia  $|\alpha - \alpha_0| < |\alpha^* - \alpha_0|$ ). Quindi, tutte le funzioni  $\varphi_\alpha(\zeta)$  di  $\zeta$  tali che  $|\alpha - \alpha_0| < |\alpha^* - \alpha_0|$ , ammetteranno l'interno di  $D(\alpha^*)$  come dominio di olomorfia, e così:

*Per ogni punto regolare  $\alpha_0$  della funzione vettoriale  $\varphi_\alpha$ , esiste almeno un intorno  $V^*$  di quel punto, tale che tutte le funzioni  $\varphi_\alpha(\zeta)$  di  $\zeta$ , corrispondenti ai valori di  $\alpha$  contenuti in  $V^*$ , possiedono almeno un comun dominio di olomorfia (contenente  $C$ )<sup>(32)</sup>.*

Sia adesso  $\Gamma$  un qualsivoglia insieme chiuso contenuto nel dominio di regolarità della  $\varphi_\alpha$ . Secondo il risultato precedente, possiamo far corrispondere ad ogni  $\alpha \in \Gamma$  un intorno aperto  $V(\alpha)$  di  $\alpha$ , soddisfacente la condizione ivi indicata. Ma gli intorni così ottenuti costituiranno una *copertura aperta* dell'insieme  $\Gamma$ , il quale per ipotesi è chiuso, e allora, secondo il lemma I, vi sarà un numero finito di tali intorni,  $V(\alpha_1), V(\alpha_2), \dots, V(\alpha_n)$ , che formano ancora una copertura aperta di  $\Gamma$ . Siano rispettivamente,  $D_1, D_2, \dots, D_n$  quei domini che, secondo la conclusione precedente, corrispondono rispettivamente agli intorni  $V(\alpha_1), V(\alpha_2), \dots, V(\alpha_n)$ : l'intersezione di questi domini sarà manifestamente un intorno dell'insieme  $C$ , sopra il quale tutte le funzioni di  $\zeta$ ,  $\varphi_\alpha(\zeta)$ , per  $\alpha \in \Gamma$ , riescono univoche e analitiche. Abbiamo così dimostrato la seguente proposizione:

LEMMA IV - *Data comunque una funzione analitica di  $\alpha$ ,  $\varphi_\alpha$ , di codominio contenuto in  $\mathbb{C}$ , per ogni insieme chiuso  $\Gamma$  contenuto nel suo dominio di regolarità, esiste almeno un intorno (aperto o chiuso) dell'insieme  $C$ , che costituisce un comun dominio di olomorfia di tutte le funzioni  $\varphi_\alpha(\zeta)$  di  $\zeta$ , corrispondenti ai valori di  $\alpha$  appartenenti a  $\Gamma$*

(31) V. per esempio, PINCHERLE, *Gli elementi della teoria delle funzioni analitiche*, pp. 67-71.

(32) Nello stesso tempo, abbiamo dimostrato che, analogamente a ciò che avviene per le serie intere a coefficienti numerici, la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \alpha_0)^n \varphi_n$  (abbreviatura dell'espressione  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (\alpha - \alpha_0)^i \varphi_i$ ) ha per dominio di convergenza la parte interna di un cerchio - il massimo cerchio con centro in  $\alpha_0$  e contenuto nel dominio di regolarità della  $\varphi_\alpha$ .

6. LE FUNZIONI VETTORIALI ANALITICHE INTERPRETATE COME FUNZIONI ANALITICHE ORDINARIE DI DUE VARIABILI. — 1<sup>a</sup> parte. — Sia  $\varphi_\alpha$  una funzione vettoriale analitica relativa ad uno spazio  $f[C]$  e *inizialmente* definita in un dominio chiuso  $D_1$  del piano-sfera  $\Omega_\alpha$ ; e sia  $D_2$  uno di quegli intorno chiusi dell'insieme  $C$  che, secondo il teorema precedente, costituiscono comuni domini di tutte le funzioni  $\varphi_\alpha(\zeta)$  di  $\zeta$ , corrispondenti ai valori di  $\alpha$  appartenenti a  $D_1$ . Supponiamo inoltre che nessuno dei domini  $D_1, D_2$  contenga il punto improprio, e poniamo

$$(3) \quad \varphi_\alpha(\zeta) = \bar{\varphi}(\alpha, \zeta), \quad \text{per ogni coppia } (\alpha, \zeta) \in D_1 \times D_2 \text{ (33)}.$$

Allora, poichè la  $\varphi(\alpha, \zeta)$  sarà definita da una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha - \alpha_0) \bar{\varphi}_n(\zeta)$  convergente rispetto a  $\alpha$  nel massimo cerchio con centro in  $\alpha_0$  e contenuto in  $D_1$  ne segue che, per ogni valore di  $\zeta$  appartenente a  $D_2$ , la  $\bar{\varphi}(\alpha, \zeta)$  si converte in una funzione della sola variabile  $\alpha$  analitica in tutto il dominio  $D_1$ . D'altra parte, visto che la  $\varphi_\alpha$  è una funzione vettoriale relativa a  $f[C]$ , e che, per ipotesi, tutte le funzioni  $\varphi_\alpha(\zeta)$  tali che  $\alpha \in D_1$  riescono olomorfe nel dominio  $D_2$ , è anche vero che, per ogni  $\alpha$  appartenente a  $D_1$ , la  $\bar{\varphi}(\alpha, \zeta)$  si converte in una funzione della sola variabile  $\zeta$ , analitica in tutto il dominio  $D_2$ . Ma questo vuol dire, precisamente, che la  $\bar{\varphi}(\alpha, \zeta)$  è una funzione analitica delle due variabili  $\alpha, \zeta$  in tutta la parte interna del prodotto cartesiano  $D_1 \times D_2$ ; che, cioè, per ogni coppia  $(\alpha_0, \zeta_0) \in \text{int}(D_1 \times D_2)$ , essa ammetterà uno sviluppo in serie doppia di potenze

$$\sum_{r,s=0}^{\infty} a_{r,s} (\alpha - \alpha_0)^r (\zeta - \zeta_0)^s \text{ (34)},$$

convergente in un intorno conveniente di  $(\alpha_0, \zeta_0)$ .

Osserviamo inoltre che, *se uno almeno dei domini  $D_1, D_2$  è sconnesso, la  $\bar{\varphi}(\alpha, \zeta)$  rappresenterà in generale, non soltanto una, ma più funzioni analitiche nel senso classico.*

Nel caso che uno almeno dei domini  $D_1, D_2$  contenga il punto improprio, si può concludere, in modo analogo, che la  $\bar{\varphi}(\alpha, \zeta)$  è *ivi analitica* rispetto alle due variabili  $\alpha, \zeta$  *considerate separatamente*. Ma possiamo dire allora che lo sia rispetto al *complesso* delle due variabili? Una risposta a siffatta questione dipende manifestamente dal significato attribuito alle espressioni « punto improprio » e « funzione analitica in un punto improprio » nel caso di funzioni di più variabili. Ricordiamo che, in Geometria, l'aggiunzione dei punti impropri allo *spazio euclideo complesso*  $S_n$  si eseguisce secondo il noto metodo del passaggio alle coordinate omogenee,  $z_i = \frac{u_i}{u_{i+1}}$  [ $i = 1, 2, \dots, n$ ], per tramite del quale lo spazio  $S_n$  si ampli

diventa lo *spazio proiettivo complesso*  $\bar{S}_n$  — anch'esso metrizzabile e in più compatto — i cui punti impropri costituiscono l'*iperpiano dell'infinito*. Allora, ogni funzione  $\varphi$  delle  $n$  variabili complesse può venir concepita come funzione di un punto variabile  $P$  dello spazio  $\bar{S}_n$ , e si dirà, naturalmente, che la  $\varphi$  è analitica in un dato punto improprio  $P_\infty$ , quando, presi

(33) Con  $D_1 \times D_2$  rappresentiamo il prodotto cartesiano di  $D_1$  per  $D_2$ ; l'insieme, cioè, di tutte le coppie  $(\alpha, \zeta)$  tali che  $\alpha \in D_1, \zeta \in D_2$ .

(34) V. per esempio, PINCHERLE, op. cit., p. 205.

comunque un punto proprio  $P_0$  e una proiezione  $\Theta$  dello spazio  $\bar{S}_n$  in se stesso, in guisa che  $F_\infty = \Theta(P_0)$ , la funzione  $\psi(P) \equiv \varphi[\Theta(P)]$  riesca analitica precisamente nel punto  $P_0$  (35).

Ebbene: *In tale senso, la funzione  $\bar{\varphi}(\alpha, \chi)$  sopra considerata non è in generale analitica per  $\alpha = \infty$  (supponendo che  $D_1$  contenga questo punto), a meno che si imponga alla funzione vettoriale  $\varphi_\alpha$  la condizione di ridursi ad una costante in quel punto* (36). Nel caso che tale condizione non sia verificata, possiamo dire soltanto che la  $\bar{\varphi}(\alpha, \chi)$  è analitica nei domini  $D_1, D_2$ , rispetto alle variabili  $\alpha, \chi$  considerate separatamente, e quindi analitica nell'altro senso precisato da Osgood, concepita, cioè, come funzione (continua) del punto  $(\alpha, \chi)$  sopra il dominio  $D_1 \times D_2$  del prodotto cartesiano  $\Omega_\alpha \times \Omega_\chi$  metrizzato secondo il criterio usuale (37). Così per esempio, la funzione  $\bar{\varphi}(\alpha, \chi) = \sin \chi + \frac{1}{\alpha - \chi}$ , che definisce indubbiamente una funzione vettoriale analitica rispetto a qualsiasi spazio  $\mathbb{f}[C]$ , tale che  $C$  non contenga il punto improprio, assume, per  $\alpha = \infty, \chi = 0$ , il valore 0, mentre, per  $\alpha = \infty, \chi = \frac{\pi}{2}$  assume il valore 1: ora queste due coppie,  $(\infty, 0), (\infty, \frac{\pi}{2})$ , che individuano punti *diversi* dello spazio  $\Omega_\alpha \times \Omega_\chi$ , rappresentano invece, nel piano proiettivo  $\bar{S}_2$ , *uno stesso* punto,  $[1, 0, 0]$ , che sarà naturalmente singolare per la funzione  $\bar{\varphi}(\alpha, \chi)$ , mentre il punto  $\alpha = \infty$  appartiene al dominio di regolarità della funzione vettoriale  $\varphi_\alpha$ .

*2ª parte.* - Abbiassi ancora uno spazio vettoriale analitico  $\mathbb{f}[C]$ , e sia d'altra parte  $\varphi(\alpha, \chi)$  una qualsiasi funzione delle due variabili  $\alpha, \chi$ , la quale, attribuito ad  $\alpha$  un particolare valore  $\alpha_0$ , si converta in una funzione  $\psi(\chi) \equiv \varphi(\alpha_0, \chi)$ , olomorfa in un intorno *chiuso*  $D$  dell'insieme  $C$ , essendo la  $\varphi(\alpha, \chi)$  analitica in tutti i punti  $(\alpha_0, \chi)$  tali che  $\chi \in D$ . Allora, si può affermare che la funzione  $\varphi(\alpha, \chi)$  definisce, relativamente allo spazio  $\mathbb{f}[C]$ , una funzione vettoriale analitica, in un intorno del punto  $\alpha_0$ .

Supponiamo, per fissare le idee, che  $\alpha_0$  sia un punto proprio. Allora, in virtù delle ipotesi fatte sulla  $\varphi(\alpha, \chi)$ , esisteranno, per ogni punto proprio  $\chi_0$  appartenente a  $D$ , un intorno *chiuso*  $\Gamma(\chi_0)$  di  $\chi_0$  e un intorno *chiuso*  $\Gamma_{\chi_0}(\alpha_0)$  di  $\alpha_0$ , tali che la serie doppia

$$\varphi(\alpha, \chi) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{1}{r!s!} \left[ \frac{\partial^{r+s}}{\partial \alpha^r \partial \chi^s} \varphi(\alpha, \chi) \right]_{\alpha_0, \chi_0} (\alpha - \alpha_0)^r (\chi - \chi_0)^s$$

(35) I vantaggi di questo punto di vista sono stati lucidamente sottolineati dal prof. SEVERI (*Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Roma », vol. VII, serie II, 1932, pp. 28-33).

(36) Ricordiamo che alle funzioni appartenenti allo spazio  $\mathbb{f}[C]$  è già stata imposta una condizione analoga (v. n. 3), il che rende superfluo considerare qui il caso in cui  $D_2$  contenga il punto improprio.

(37) Dati due spazi metrici  $E, F$ , la distanza tra due punti  $p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2)$  del prodotto  $E \times F$  sarà definita dall'espressione  $\delta(p_1, p_2) = + \sqrt{[\delta(x_1, x_2)]^2 + [\delta(y_1, y_2)]^2}$  (ALESSANDROFF und HOPF, op. cit., p. 35). Per definire la stessa struttura topologica, basterebbe prendere, come intorni di ogni punto  $(x, y)$ , i prodotti cartesiani  $V_x \times V_y$ , dove  $V_x, V_y$  rappresentano intorni arbitrari, rispettivamente di  $x$  e di  $y$ , negli spazi  $E, F$ .

Ricordiamo inoltre che, se  $E, F$  sono tutti e due compatti, lo stesso accadrà per il prodotto topologico  $E \times F$ .

Sul secondo concetto di « funzione analitica all'infinito », v. W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, II, 1, pp. 53-68. Rileviamo che vi è oggi anche la tendenza a rendere compatto lo spazio  $S_n$ , con l'aggiunta di un solo punto improprio.

converga uniformemente in tutto il dominio  $\Gamma_{\alpha_0}(\alpha_0) \times \Gamma(\zeta_0)$  <sup>(38)</sup>. (Si suppone naturalmente che, nel caso in cui la  $\varphi(\alpha, \zeta)$  sia pluriforme, i coefficienti della serie si riferiscano ad un particolare ramo della  $\varphi(\alpha, \zeta)$  sul dominio  $\Gamma_{\alpha_0}(\alpha_0) \times \Gamma(\zeta_0)$ ). Allora, se poniamo

$$\psi_r(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{r!s!} \left[ \frac{\partial^{r+s}}{\partial \alpha^r \partial \alpha^s} \varphi(\alpha, \zeta) \right]_{\alpha_0, \zeta_0} (\zeta - \zeta_0)^s = \frac{1}{r!} \frac{\partial^r}{\partial \alpha^r} \varphi(\alpha, \zeta),$$

e se rappresentiamo con  $\Gamma^*(\zeta_0)$  la parte interna del cerchio  $\Gamma(\zeta_0)$ , possiamo dire che la serie di funzioni di  $\zeta$

$$(4) \quad \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha - \alpha_0)^r \psi_r(\zeta) = \varphi(\alpha, \zeta)$$

converge uniformemente in tutto il dominio  $\Gamma^*(\zeta_0)$  per ogni  $\alpha \in \Gamma_{\alpha_0}(\alpha_0)$ ; che, cioè, dato comunque un numero  $\varepsilon > 0$ , esiste un intero  $\nu(\zeta_0)$  (che d'altronde non dipende da  $\alpha$ ), soddisfacente la condizione:

$$(5) \quad \left| \varphi(\alpha, \zeta) - \sum_{r=0}^n (\alpha - \alpha_0)^r \psi_r(\zeta) \right| < \varepsilon, \quad \text{quali che siano}$$

$$n > \nu(\zeta_0) \quad \zeta \in \Gamma^*(\zeta_0) \quad \alpha \in \Gamma_{\alpha_0}(\alpha_0).$$

Se facciamo ora percorrere dal punto  $\zeta_0$  tutto il dominio  $D$ , l'intorno  $\Gamma^*(\zeta_0)$  darà origine ad una copertura *aperta* dell'insieme *chiuso*  $D$ , dalla quale possiamo, secondo il lemma I, estrarre una copertura aperta dello stesso dominio, formata di un numero finito di insiemi  $\Gamma^*(\zeta_1), \Gamma^*(\zeta_2), \dots, \Gamma^*(\zeta_p)$ . Quindi, se rappresentiamo con  $\mu$  il massimo dei numeri  $\nu(\zeta_1), \nu(\zeta_2), \dots, \nu(\zeta_p)$  e con  $\Gamma$  l'intersezione dei cerchi  $\Gamma_{\alpha_0}(\alpha_0), \Gamma_{\alpha_0}(\alpha_0), \dots, \Gamma_{\alpha_0}(\alpha_0)$ , la quale sarà ancora un cerchio con centro in  $\alpha_0$ , si vede subito come, per ogni  $\alpha \in \Gamma$ , la disuguaglianza (5) si verifichi quali che siano  $n > \mu, \zeta \in D$ ; il che vuol dire che la serie (4) converge uniformemente in tutto il dominio  $D$ , qualunque sia  $\alpha \in \Gamma$ . Allora, se poniamo

$$\bar{\varphi}_\alpha(\zeta) = \varphi(\alpha, \zeta), \quad \text{per ogni coppia } (\alpha, \zeta) \in \Gamma \times D,$$

verrà

$$\bar{\varphi}_\alpha = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (\alpha - \alpha_0)^i \psi_i,$$

e quindi la  $\bar{\varphi}_\alpha$  sarà una funzione a codominio contenuto in  $f[C]$ , analitica nell'intorno  $\Gamma$  del punto  $\alpha_0$ , q. e. d.

Osserviamo intanto che: 1° una funzione delle due variabili  $\alpha, \zeta$ , analitica in senso classico, e inoltre pluriforme, può decomporre in più funzioni vettoriali uniformi: 2° una funzione vettoriale analitica può essere costituita da più funzioni di due variabili, analitiche in senso classico.

Da questo momento in poi, possiamo chiamare funzioni vettoriali analitiche anche le funzioni analitiche di due variabili sotto le restrizioni prece-

(38) Per il caso in cui uno almeno dei punti  $\alpha_0, \zeta_0$  sia improprio, non occorrono cambiamenti sostanziali.

denti. E useremo la *notazione vettoriale* o la *notazione ordinaria* a seconda dei casi, chiamando *parametro* la variabile scalare  $\alpha$  e *variabile apparente* quella variabile  $\chi$  da cui dipendono le singole funzioni appartenenti a  $\mathfrak{f}[C]$ .

#### 7. DERIVAZIONE E INTEGRAZIONE DI FUNZIONI VETTORIALI ANALITICHE. -

Sia  $\varphi_\alpha$  una qualsiasi funzione di  $\alpha$  (anche non analitica) di codominio contenuto in  $\mathfrak{f}[C]$ , definita in un dominio  $D$  dello spazio  $\Omega_\alpha$ . Allora, dato comunque un punto  $\alpha_0$  appartenente a  $D$ , diremo che il vettore variabile  $\varphi_\alpha$  ha come *limite* un dato vettore costante  $\varphi$ , *per  $\alpha$  tendente ad  $\alpha_0$* , e scriveremo  $\varphi = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \varphi_\alpha$ , quando, qualunque sia la successione  $\alpha_n$  tendente ad  $\alpha_0$  sull'insieme  $D$  (con  $\alpha_n \neq \alpha_0$ ), si abbia sempre  $\varphi = \lim_n \varphi_{\alpha_n}$ . Da questa definizione si passa immediatamente alle seguenti:

1° La  $\varphi_\alpha$  si dice *continua* nel punto  $\alpha_0$ , se riesce  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \varphi_\alpha = \varphi_{\alpha_0}$ .

2° Se il quoziente  $\frac{\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0}$  tende ad un limite determinato per  $\alpha \rightarrow \alpha_0$  (essendo  $\alpha_0$  un punto proprio), si scriverà:

$$\mathfrak{D} \varphi_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0},$$

e questo limite sarà detto la *derivata* della  $\varphi_\alpha$  nel punto  $\alpha_0$ . Se poi la  $\varphi_\alpha$  ammette derivata in ogni punto proprio del dominio  $D$ , rappresenteremo con  $\mathfrak{D} \varphi_\alpha$  la sua *funzione derivata*, e diremo che la  $\varphi_\alpha$  è *monogena* in tale dominio. Naturalmente, la  $\varphi_\alpha$  si dirà *monogena* nel punto improprio, se la funzione di  $\alpha$ ,  $\varphi_{\frac{1}{\alpha}}$ , è monogena nel punto  $\alpha = 0$ .

Ora, si può dimostrare che ogni funzione vettoriale  $\varphi_\alpha$ , *monogena* in un dominio aperto  $D$ , è ivi *analitica*, e, per ogni suo punto regolare  $\alpha_0$  (proprio), ammetterà lo sviluppo in serie di Taylor

$$\varphi_\alpha = \lim_n \sum_{i=0}^n \frac{(\alpha - \alpha_0)^i}{i!} \mathfrak{D}^i \varphi_\alpha, \quad \alpha = \alpha_0$$

valido in tutta la parte interna del massimo cerchio con centro in  $\alpha_0$  e contenuto nel dominio di regolarità della  $\varphi_\alpha$  <sup>(39)</sup>. La dimostrazione di questo risultato si basa sull'assioma di Zermelo; ma si può vedere che le proposizioni seguenti non dipendono da questa.

Reciprocamente, è ben facile dimostrare che:

(39) Rappresentiamo naturalmente con  $\mathfrak{D}^p$  la  $p$ -esima iterazione dell'operatore  $\mathfrak{D}$ , e con  $\mathfrak{D}^p \varphi_\alpha$  il valore della funzione vettoriale  $\mathfrak{D}^p \varphi_\alpha$  per  $\alpha = \alpha_0$ . È inoltre da rilevare che, se è  $\varphi_\alpha = \lim_n \sum_{i=0}^n (\alpha - \alpha_0)^i \psi_i$  in un intorno di  $\alpha_0$ , sarà, nello stesso intorno  $\mathfrak{D} \varphi_\alpha = \lim_n \sum_{i=1}^n i(\alpha - \alpha_0)^{i-1} \psi_i$ . Questo risultato ci indica pure il modo di determinare le primitive della  $\varphi_\alpha$ . È anche manifesto che la  $\varphi_\alpha$  e la  $\mathfrak{D} \varphi_\alpha$  hanno lo stesso dominio di regolarità.

Ogni funzione vettoriale analitica è continua e monogena in ogni suo punto regolare <sup>(40)</sup>.

Per la dimostrazione di questo fatto conviene naturalmente passare alla notazione ordinaria, con la quale l'espressione precedente acquista la forma:

$$\bar{\varphi}(\alpha, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha - \alpha_0)^n}{n!} \left[ \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} \varphi(\alpha, \lambda) \right]_{\alpha_0}$$

Cerchiamo adesso di studiare l'inversa dell'operazione  $\mathfrak{D}$ : per ogni funzione vettoriale  $\varphi_\alpha$  relativa a  $f[C]$ , vi saranno, manifestamente, infinite funzioni vettoriali  $\psi_\alpha$  (relative allo stesso spazio) soddisfacenti l'equazione  $\mathfrak{D}_\alpha \psi_\alpha = \varphi_\alpha$ , ed è facile vedere come la differenza tra due qualsivogliano di queste infinite soluzioni debba essere una funzione vettoriale che diventi costante sopra ciascuna delle componenti di un suo dominio iniziale. Ebbene, rappresenteremo con  $\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha$  l'insieme di tutte le dette soluzioni e a queste daremo il nome di *funzioni primitive* della  $\varphi_\alpha$ . Si ha dunque per definizione:  $\mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha = \varphi_\alpha$ ; ma si avrà invece, soltanto,  $\varphi_\alpha \in \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \mathfrak{D}_\alpha \varphi_\alpha$ , per ogni funzione vettoriale analitica  $\varphi_\alpha$  relativa a  $f[C]$ .

Ciò posto, sia  $\vec{\gamma}$  un arco semplice orientato, cioè un segmento di curva semplice che si consideri descritto da uno dei suoi estremi,  $\alpha_1$ , all'altro estremo,  $\alpha_2$ ; e supponiamo che detto arco sia contenuto nel dominio di regolarità della funzione vettoriale analitica  $\varphi_\alpha$ . Siano, d'altra parte:  $\psi_\alpha$  una delle funzioni primitive della  $\varphi_\alpha$ ;  $\Psi_1$  il valore, o uno dei valori, che la  $\psi_\alpha$  assume nel punto  $\alpha_1$ , e  $\Psi_2$  il valore finale della  $\psi_\alpha$ , quando si prenda uno sviluppo in serie  $P(\alpha - \alpha_1)$  della  $\varphi_\alpha$ , tale che  $P(0) = \Psi_1$ , e si percorra con continuità l'arco  $\vec{\gamma}$  nel senso indicato — cioè, da  $\alpha_1$  a  $\alpha_2$ . Allora, diremo che la differenza  $\Psi_2 - \Psi_1$  costituisce un integrale della  $\varphi_\alpha$  esteso a  $\vec{\gamma}$ , e rappresenteremo con uno qualsiasi dei simboli

$$\int_{\vec{\gamma}} \varphi_\alpha d\alpha \quad [\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}}$$

l'insieme di questi integrali <sup>(41)</sup>. Passando alla notazione ordinaria, si ha, manifestamente, sotto ovvie restrizioni

$$[\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}} = \int_{\vec{\gamma}} \bar{\varphi}(\alpha, \lambda) d\alpha;$$

ed è manifesto che pure questi integrali si possono esprimere come limiti di certi sommatore, analoghi a quelli considerati nelle classiche teorie d'integrazione.

(40) In particolare, si avrà il principio delle identità delle funzioni vettoriali analitiche.

(41) Se i detti integrali si riducono ad uno solo, il simbolo  $[\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}}$  rappresenterà questo singolo integrale. Ricordiamo, intanto, che, nella teoria degli insiemi, si suole distinguere un elemento  $p$  dall'insieme  $(p)$  formato dal solo elemento  $p$ .

Sia adesso  $\vec{\gamma}$  una *curva semplice orientata*, cioè una curva semplice, considerata descritta in un determinato senso. Una siffatta curva si può sempre concepire come un arco semplice orientato, i cui estremi coincidano; allora possiamo definire, in modo del tutto analogo al precedente, gli *integrali della funzione vettoriale*  $\varphi_\alpha$  *estesi a*  $\vec{\gamma}$ , e usare le stesse notazioni per rappresentare l'insieme dei riferiti integrali. Bisogna tuttavia mettere in rilievo questo fatto: che gli integrali  $[\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}}$  non dipendono dal punto di partenza che si prenda sulla curva  $\vec{\gamma}$ .

Sia finalmente  $\vec{\gamma}$  la somma di un numero *finito* di curve semplici orientate  $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n$ , tutte quante contenute nel dominio di regolarità della  $\varphi_\alpha$ . Allora, converremo di rappresentare con  $[\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]$ , la somma<sup>(42)</sup>

$$\sum_{i=1}^n [\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}_i},$$

e chiameremo ancora *integrali della*  $\varphi_\alpha$  *estesi a*  $\vec{\gamma}$  *gli elementi dell'insieme*  $[\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}}$ .

#### 8. OPERATORI LINEARI, OPERATORI CONTINUI E OPERATORI ANALITICI. -

Dati comunque due spazi vettoriali analitici  $\mathfrak{f}[C], \mathfrak{f}[C^*]$ , sia  $F$  una *trasformazione univoca* di  $\mathfrak{f}[C]$  su  $\mathfrak{f}[C^*]$ ; un *operatore*, cioè, che ad ogni elemento  $\varphi$  di  $\mathfrak{f}[C]$  faccia corrispondere un elemento determinato  $\psi = F\varphi$  di  $\mathfrak{f}[C^*]$ .

Allora diremo che:

1° L'operatore  $F$  è *lineare* - se, comunque si prendano il numero complesso  $\alpha$  e i vettori  $\varphi, \psi$  dello spazio  $\mathfrak{f}[C]$ , si ha

$$F(\varphi + \psi) = F\varphi + F\psi \quad F(\alpha\varphi) = \alpha F\varphi;$$

2° L'operatore  $F$  è *continuo* - se, comunque si prenda la successione  $(\varphi_n)$  di elementi dello spazio  $\mathfrak{f}[C]$ , si ha

$$F \lim_n \varphi_n = \lim_n F\varphi_n;$$

3° L'operatore  $F$  è *analitico* - se trasforma le funzioni vettoriali analitiche in funzioni vettoriali ancora analitiche<sup>(43)</sup>; se cioè, rappresentando con  $\mathfrak{A}$  l'insieme delle funzioni vettoriali analitiche relative a  $\mathfrak{f}[C]$  e con  $\mathfrak{A}^*$  l'insieme delle funzioni vettoriali analitiche relative a  $\mathfrak{f}[C^*]$ , si ha

$$F\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^*$$

In particolare può avvenire che, per ogni  $\psi \in \mathfrak{f}[C]$ , esista uno, e soltanto uno elemento  $\varphi$  di  $\mathfrak{f}[C]$ , tale che  $F\varphi = \psi$ , e allora la trasformazione  $F$  si

(42) La parola « somma » non è usata qui col significato della teoria degli insiemi, ma con quest'altro: come l'insieme di tutte le somme  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , con  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ .

(43) È facile vedere come ogni operatore analitico  $F$ , soddisfacente la condizione  $F(\varphi + \psi) = F\varphi + F\psi$ , verifichi pure l'altra condizione  $F(\alpha\varphi) = \alpha F\varphi$ , e sia quindi lineare.

dirà *biunivoca*. Può anche darsi che si abbia  $C = C^*$  e quindi  $f[C] = f[C^*]$ ; in tale caso l'operatore  $F$  si dirà una trasformazione univoca dello spazio  $f[C]$  *in se stesso*. Per brevità di linguaggio, converremo di considerare sottointeso nel carattere di *linearità*, quello di *univocità*.

Conviene ancora ricordare le definizioni usuali di « somma » e di « prodotto » di due operatori  $F, G$ :

$$(F + G)\varphi = F\varphi + G\varphi \quad (FG)\varphi = F(G\varphi), \quad \text{per ogni } \varphi \in f[C].$$

Ora, tenuto conto della definizione di *funzione vettoriale analitica*, che nel n. 4 abbiamo data mediante i soli termini primitivi dello spazio  $f[C]$ , si perviene quasi immediatamente <sup>(44)</sup> alla seguente conclusione:

*Ogni operatore lineare continuo è anche un operatore lineare analitico.*

Più innanzi, dimostreremo anche la reciproca di questa proposizione, e così verrà stabilita l'identità fra la classe degli operatori lineari analitici e quella degli operatori lineari continui (tra spazi vettoriali analitici).

Osserviamo finalmente che, nelle definizioni precedenti, si possono sostituire gli spazi  $f[C], f[C]^*$  con due altri spazi vettoriali, purchè muniti di una conveniente struttura topologica e di un concetto adeguato di « funzione vettoriale analitica ». Per esempio, al posto di  $f[C^*]$  si potrebbe considerare lo *spazio vettoriale euclideo*  $S_n$  (cioè l'insieme dei *vettori*  $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n)$  dove  $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$  rappresentano numeri complessi), il quale, per  $n = 1$  è, naturalmente, costituito dai singoli numeri complessi. Se al posto di  $f[C], f[C]^*$  consideriamo due spazi  $S_m, S_n$  (con  $m, n$ , uguali o distinti), allora si tratterà delle note trasformazioni lineari rappresentabili con *matrici finite*. Ma particolarmente notevoli sono le trasformazioni dello spazio  $f[C]$  nella retta complessa  $S_1$ , le quali, se sono analitiche, corrispondono ai *funzionali analitici (puri)* del prof. Fantappiè. Ora è manifesto che i funzionali puri (i quali trasformano dunque funzioni appartenenti a  $f[C]$  in *numeri complessi*) si possono concepire come particolari trasformazioni univoche dell'insieme  $f[C]$  su se stesso, visto che è sempre possibile trovare nello spazio  $f[C]$  una *varietà isomorfa* alla retta  $S_1$ : basta prendere l'insieme dei vettori della forma  $\alpha\varphi$  dove  $\varphi$  rappresenta un elemento di  $f[C]$  scelto ad arbitrio – preferibilmente la funzione  $\varphi(\chi) \equiv 1$ , se questa appartiene a  $f[C]$ .

9. EFFETTO DEGLI OPERATORI LINEARI ANALITICI SULLA DERIVAZIONE E SULL'INTEGRAZIONE VETTORIALE. – Rappresentiamo con  $F$  una data trasformazione lineare analitica dello spazio  $f[C]$  sullo spazio  $f[C^*]$ , e sia  $\varphi_\alpha$  una qualsiasi funzione vettoriale analitica relativa a  $f[C]$ . Prendiamo inoltre,

(44) In effetti, data una trasformazione lineare continua,  $F$ , di  $f[C]$  su  $f[C^*]$  e rappresentato con  $\varphi_\alpha$  un'arbitraria funzione analitica di  $\alpha$ , relativa a  $f[C]$ , definita da uno sviluppo  $\varphi_\alpha = \lim_n \sum_{i=0}^n (\alpha - \alpha_0)^i \varphi_i$  (in un intorno del punto proprio  $\alpha_0$ ), verrà successivamente:  $F\varphi_\alpha = \lim_n F \sum_{i=0}^n (\alpha - \alpha_0)^i \varphi_i = \lim_n \sum_{i=0}^n (\alpha - \alpha_0)^i F\varphi_i$ .

sopra un dominio di *olomorfa*<sup>(45)</sup>  $D$  della  $\varphi_\alpha$ , un qualsiasi punto  $\alpha_0$ , e poniamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{\alpha_0}' = \mathfrak{D} \varphi_\alpha; \\ \psi_\alpha = \frac{\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0}, \text{ per ogni } \alpha \text{ contenuto in } D \text{ e distinto da } \alpha_0. \end{array} \right.$$

Ora, si vede subito che la  $\psi_\alpha$  è anch'essa una funzione vettoriale *olomorfa* (cioè, univocamente definita e analitica) sul dominio  $D$ ; e che si ha, inoltre,  $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \psi_\alpha = \mathfrak{D} \varphi_\alpha$  (v. def. di *derivata*, n. 7). D'altra parte, secondo la definizione del numero precedente, la  $F\psi_\alpha$  sarà una funzione vettoriale (relativa a  $f[C^*]$ ) ancora analitica, e quindi *continua*, nel punto  $\alpha_0$ , il che vuol dire che si avrà

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F\psi_\alpha = F\psi_{\alpha_0}.$$

Allora verrà, per la linearità dell'operatore  $F$ ,

$$\begin{aligned} F \mathfrak{D} \varphi_\alpha &= F \psi_{\alpha_0} = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F\psi_\alpha = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F \frac{\varphi_\alpha - \varphi_{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \frac{F\varphi_\alpha - F\varphi_{\alpha_0}}{\alpha - \alpha_0} = \mathfrak{D} F\varphi_\alpha; \end{aligned}$$

cioè, in parole: *l'operatore  $F$  rispetta la derivazione vettoriale*<sup>(46)</sup>.

In questo momento, conviene mettere in rilievo il seguente fatto: *Non bisogna mai confondere l'operatore  $\mathfrak{D}_\alpha$  (in notazione ordinaria  $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ ) con l'operatore  $\frac{d}{d\lambda}$* . Il primo agisce soltanto su funzioni vettoriali che esso trasforma in altre funzioni vettoriali; ed è, inoltre, logicamente esprimibile nei concetti primitivi dello spazio vettoriale analitico considerato. Il secondo, invece, è applicabile a singoli vettori, che esso trasforma in altri vettori; e non riesce logicamente esprimibile nei riferiti concetti primitivi (non si avrà quindi  $F \left[ \frac{d}{d\lambda} \varphi(\lambda) \right] \equiv \frac{d}{d\lambda} F[\varphi(\lambda)]$ , per ogni operatore lineare continuo  $F$ <sup>(47)</sup>). Si può vedere inoltre come l'operatore  $\frac{d}{d\lambda}$  sia proprio una trasformazione lineare

(45) È ovvio che il concetto di *olomorfa* si estende senz'altro alle funzioni vettoriali analitiche.

(46) Questa dimostrazione non differisce sostanzialmente dalla dimostrazione corrispondente, data dal FANTAPPIÈ per i funzionali puri (*N. F. F. A.*, pp. 656-659). È stata però liberata da considerazioni relative ai domini delle funzioni.

(47) Sarebbe quindi inesatto dire che gli operatori lineari analitici sono gli operatori lineari permutabili con la derivazione ordinaria. Del resto, gli operatori lineari analitici permutabili con l'operatore  $\frac{d}{d\lambda}$  si possono determinare come l'ha fatto vedere il prof. FANTAPPIÈ.

continua (e quindi analitica) di ogni spazio vettoriale analitico in se stesso (cioè, uno degli endomorfismi di tali spazi).

Vediamo adesso quale sia l'effetto di  $F$  sull'operatore *plurivoco*  $\mathfrak{D}^{-1}$ . Tenuto conto del risultato precedente e delle proprietà fondamentali dell'operatore  $\mathfrak{D}^{-1}$  indicate nel n. 7, verrà successivamente

$$F \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha \subset \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \mathfrak{D}_\alpha F \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha = \mathfrak{D}_\alpha^{-1} F \mathfrak{D}_\alpha \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha = \mathfrak{D}_\alpha^{-1} F \varphi_\alpha,$$

e quindi:  $F \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha \subset \mathfrak{D}_\alpha^{-1} F \varphi_\alpha$ , ossia, in parole: *se  $\psi_\alpha$  è una funzione primitiva della  $\varphi_\alpha$ , allora anche la  $F \psi_\alpha$  sarà una funzione primitiva della  $F \varphi_\alpha$* ; o ancora, in altri termini: *l'operatore  $F$  rispetta la primitivazione vettoriale*.

Esaminiamo, finalmente, l'effetto dell'operatore  $F$  sull'integrazione vettoriale estesa a una linea. Collochiamoci nel caso più generale: sia  $\vec{\gamma}$  la somma di un numero finito di curve semplici orientate,  $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n$ , tutte quante contenute nel dominio di regolarità della  $\varphi_\alpha$ . Allora, tenuto conto del risultato precedente, delle definizioni date nel n. 7 e della linearità dell'operatore  $F$ , verrà, successivamente,

$$\begin{aligned} F [\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}} &= F \sum_{i=1}^n [\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}_i} = \sum_{i=1}^n F [\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n [F \mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}_i} \subset \sum_{i=1}^n [\mathfrak{D}_\alpha^{-1} F \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}_i} = [\mathfrak{D}_\alpha^{-1} F \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}}. \end{aligned}$$

Tutti questi passaggi possono essere facilmente controllati dal lettore; essi conducono alla conclusione:  $F [\mathfrak{D}_\alpha^{-1} \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}} \subset [\mathfrak{D}_\alpha^{-1} F \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}}$ ; cioè, in parole: *l'operatore  $F$  rispetta l'integrazione relativa al percorso  $\vec{\gamma}$* . In particolare, può darsi che l'insieme  $[\mathfrak{D}_\alpha^{-1} F \varphi_\alpha]_{\vec{\gamma}}$  sia costituito da un solo elemento (il che avverrà se la  $\varphi_\alpha$  è uniforme), e allora il segno  $\subset$  può essere sostituito col segno  $=$  <sup>(48)</sup>.

10. DETERMINAZIONE DI TUTTI I POSSIBILI OPERATORI LINEARI ANALITICI. — Abbiansi ancora due spazi vettoriali analitici  $\mathfrak{f}[C]$ ,  $\mathfrak{f}[C^*]$ : ci proponiamo di determinare tutte le trasformazioni lineari analitiche di  $\mathfrak{f}[C]$  su  $\mathfrak{f}[C^*]$ .

A questo scopo, cominciamo col supporre che l'insieme  $C$  sia connesso. Siano allora:  $\varphi$ , una qualsiasi funzione appartenente a  $\mathfrak{f}[C]$ ;  $D$ , un dominio

(48) Questo risultato, che conduce immediatamente al teorema del numero seguente si trova in rapporto con una elegante dimostrazione dello stesso teorema (fatta per i funzionali puri) dovuta al dott. Michelangelo VACCARO, che l'espone nella sua tesi di laurea ancora inedita. Il VACCARO dimostra con mezzi classici che, esprimendo la funzione  $\varphi(\zeta)$  mediante la formula di CAUCHY  $\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - \zeta} d\alpha$  ed essendo  $F$  un funzionale ana-

litico lineare, il simbolo  $F$  sarà necessariamente permutabile col simbolo d'integrazione scritto in quella formula.

chiuso di olografia della  $\varphi$  (contenente  $C$  all'interno). In virtù del lemma III, possiamo supporre inoltre che  $D$  abbia come frontiera la somma di un numero finito di curve semplici rettificabili senza punti comuni (anche se l'insieme  $C$  è molteplicemente connesso di ordine infinito), e allora potremo usare la formula integrale di Cauchy:

$$(6) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \varphi(\alpha) \frac{1}{\alpha - z} d\alpha, \quad \text{per ogni punto } z \text{ interno a } D,$$

rappresentando con  $\vec{\gamma}$  la frontiera del dominio  $D$ , orientata in modo da lasciare a sinistra i punti interni dell'insieme  $C$ . Bisogna intanto osservare che *in questo momento, precisamente, interviene la condizione formulata nel n. 3, secondo la quale le funzioni appartenenti a  $\mathfrak{f}[C]$  debbono annullarsi nel punto  $z = \infty$ , se  $C$  contiene questo punto*: altrimenti la formula (6) non sarebbe valida. Viceversa, se  $C$  non contiene il punto improprio, è sempre possibile scegliere il dominio  $D$  in modo che a  $D$  non appartenga il detto punto.

Ma la formula (6) è pure valida, qualunque sia il numero (finito o infinito) delle componenti dell'insieme  $C$ . In effetti, secondo il lemma II, ogni intorno dell'insieme  $C$  avrà soltanto un numero finito di componenti, e d'altra parte, per il lemma III, queste componenti potranno essere scelte in modo che le loro frontiere siano formate di un numero finito di curve semplici, rettificabili senza punti comuni. Sia allora  $D$  un dominio (chiuso) di olografia della  $\varphi$  soddisfacente queste condizioni, e siano  $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2, \dots, \vec{\gamma}_n$  le frontiere delle componenti  $D_1, D_2, \dots, D_n$  del dominio  $D$ , orientate in modo da lasciare a sinistra i punti di  $C$ ; sia finalmente  $\vec{\gamma}$  la somma di tutte le curve così orientate. Allora verrà

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \varphi(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - z} = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\vec{\gamma}_1} \varphi(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - z} + \int_{\vec{\gamma}_2} \varphi(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - z} + \dots + \int_{\vec{\gamma}_n} \varphi(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - z} \right].$$

Ma questa somma è uguale a  $\varphi(z)$ , qualunque sia  $z$ , interno a  $D$ . Infatti, se  $z$  è interno a  $D$ , questo vuol dire che sarà interno ad una delle componenti dello stesso dominio. Sia  $D_i$  tale componente; in questa ipotesi, si avrà, secondo il risultato precedente:  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}_i} \varphi(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - z} = \varphi(z)$ , mentre tutti

gli altri termini diventano manifestamente nulli; e quindi sarà ancora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \varphi(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - z} = \varphi(z), \quad \text{come avevamo affermato.}$$

Prendiamo ora una qualsiasi trasformazione lineare analitica  $F$ , dello spazio  $\mathfrak{f}[C]$  sullo spazio  $\mathfrak{f}[C^*]$ . Utilizzando la formula (6), e badando sia

all'ultimo risultato del numero precedente, sia alla linearità e analiticità della  $F$ , verrà

$$F_{\gamma}[\varphi(\gamma)] = \frac{1}{2\pi i} F_{\gamma} \left[ \int_{\gamma} \varphi(\alpha) \frac{1}{\alpha - \gamma} d\alpha \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(\alpha) F_{\gamma} \left( \frac{1}{\alpha - \gamma} \right) d\alpha \quad (49),$$

tenuto conto anche del fatto che la funzione analitica di due variabili  $\frac{1}{\alpha - \gamma}$  rappresenta una funzione analitica di  $\alpha$ , di codominio contenuto in  $f[C]$ , avente come dominio di regolarità, nel pianosfera  $\Omega_{\alpha}$ , il complementare dell'insieme  $C$ . Allora, dato che l'operatore  $F$  è analitico, la  $F_{\gamma} \left( \frac{1}{\alpha - \gamma} \right)$  sarà una funzione di  $\alpha$  anch'essa analitica, ma di codominio contenuto in  $f[C^*]$ . Rappresentando con  $\mu_{\alpha}$  quest'ultima funzione di  $\alpha$ , possiamo scrivere, in notazione vettoriale,

$$(7) \quad F\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(\alpha) \mu_{\alpha} d\alpha \quad (50).$$

Abbiamo così trovato un modo di esprimere l'operatore  $F$ , non appena si conosca la funzione vettoriale  $\mu_{\alpha}$  in cui esso trasforma la  $\frac{1}{\alpha - \gamma}$ . Alla  $\mu_{\alpha}$  daremo, secondo il prof. Fantappiè, il nome di funzione *indicatrice* dell'operatore  $F$ .

Ma ora si presenta questa domanda: Quali condizioni devono essere verificate da una data funzione vettoriale  $\mu_{\alpha}$ , relativa a  $f[C^*]$ , perchè esista una trasformazione lineare analitica di  $f[C]$  su  $f[C^*]$  la cui funzione indicatrice sia precisamente la  $\mu_{\alpha}$ ? Per risolvere tale questione, cerchiamo innanzi tutto di fare un elenco di alcune proprietà verificate dalla funzione vettoriale di  $\alpha, \frac{1}{\alpha - \gamma}$ , le quali proprietà possano essere enunciate senza presupporre altre nozioni che quelle di *addizione*, di *moltiplicatori scalari* e di *funzione vettoriale analitica* (51); e consideriamo in primo luogo il caso in cui  $C$  non contenga il punto  $\infty$ . Ora, riguardo alla funzione vettoriale

(49) Ricordiamo che, secondo una convenzione ormai usuale, in una espressione della forma  $F_{\gamma}[\varphi(\alpha, \gamma)]$ , la lettera  $\gamma$  scritta al pie' del simbolo  $F$ , sta a indicare che questo operatore agisce soltanto su funzioni di  $\gamma$ , sicchè il risultato sarà una funzione (vettoriale) di  $\alpha$ .

(50) Osserviamo che, essendo  $\gamma$  un insieme chiuso contenuto nel dominio di regolarità della  $\mu_{\alpha}$ , esisterà, secondo il lemma IV (n. 5), un intorno  $D^*$  di  $C^*$ , sul quale riescono olo-morfe tutte le funzioni  $\mu_{\alpha}(\gamma)$  di  $\gamma$ , tali che  $\alpha \in \gamma$ , e allora si potrà scrivere, in notazione ordinaria:  $F_{\gamma}[\varphi(\gamma)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(\alpha) \bar{\mu}(\alpha, \gamma) d\alpha$  per ogni  $\gamma \in D^*$ .

(51) In virtù dell'identità, che sarà stabilita nel numero seguente tra operatori lineari continui e operatori lineari analitici, questo insieme di nozioni primitive riesce equivalente a quello che abbiamo considerato nel n. 3: l'uno e l'altro definiscono gli stessi sistemi matematici – cioè gli spazi vettoriali analitici.

di  $\alpha, \frac{1}{\alpha - \gamma}$ , considerata come funzione di codominio contenuto in  $f[C]$ , si avranno fra altre, le seguenti proprietà:

- a) *È analitica*;
- b) *Ha per dominio di regolarità il complementare dell'insieme C*;
- c) *È uniforme* (cioè, univoca in tutto il suo naturale dominio di regolarità);
- d) *Si annulla per  $\alpha = \infty$* .

Ma, benchè tali proprietà siano tutte logicamente esprimibili in dette nozioni, è facile vedere che, tra esse, soltanto la prima e l'ultima sono necessariamente rispettate dalle trasformazioni lineari analitiche di  $f[C]$  su  $f[C^*]$ . Consideriamo invece quest'altro insieme di proprietà, verificate dalla stessa funzione vettoriale:

- a') *È univocamente definita nel dominio  $A = \Omega - C^{(52)}$* ;
- b') *È analitica in ogni punto del dominio A*;
- c') *Si annulla per  $\alpha = \infty$* .

Si vede ora senza difficoltà come tali predicati siano, tutt'e tre, rispettati da qualunque trasformazione lineare analitica di  $f[C]$  su  $f[C^*]$ ; come, cioè, rappresentata con  $F$  una siffatta trasformazione, la funzione vettoriale di  $\alpha, \frac{1}{\alpha - \gamma}$ , sia necessariamente convertita, dall'operatore  $F$ , in una funzione vettoriale di  $\alpha, F_{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha - \gamma}\right)$ , soddisfacente le stesse condizioni. Bisogna però indagare se, oltre ad essere necessarie (come abbiamo testè concluso), tali condizioni, prese insieme, sono anche sufficienti per il fine indicato; se, cioè, data comunque una funzione vettoriale  $\mu_{\alpha}$  di codominio  $f[C^*]$ , la quale risponda ai predicati a'), b'), c'), l'operatore  $F$  definito dalla formula (7) soddisfa necessariamente le condizioni seguenti: I) *è una trasformazione di  $f[C]$  su  $f[C^*]$* ; II) *è univoco*; III) *è lineare*; IV) *è analitico*, V) *trasforma la funzione vettoriale di  $\alpha, \frac{1}{\alpha - \gamma}$ , nella funzione vettoriale di  $\alpha, \mu_{\alpha}$* .

La condizione I) è manifestamente verificata come conseguenza immediata della definizione di integrale (n. 7) e del fatto che la  $\mu_{\alpha}$  sia una funzione vettoriale analitica di codominio contenuto in  $f[C^*]$  <sup>(53)</sup>.

Quanto alla condizione II), bisogna tener presente che la curva orientata  $\gamma$ , cui si riferisce la formula (7), può essere scelta in infiniti modi possibili. Dobbiamo quindi dimostrare che:

II<sub>a</sub>) *Una volta fissata, in modo conveniente, la curva orientata  $\gamma$ , la formula (7) non può fornire che un valore per  $F\phi$* . Questo fatto è una conseguenza

(52) Non bisogna dimenticare che questa condizione è più fiacca della c): invero, l'uniformità riguarda tutto il dominio di regolarità, mentre l'univocità si riferisce in questo caso al dominio A, o, il che è equivalente, ad un dominio contenente A.

(53) È da notare che, proprio in questo punto, interviene il predicato b'): infatti la formula (7) non potrebbe, altrimenti, fornire nessun elemento di  $f[C^*]$ .

dell'univocità, che abbiamo ammessa [predicato  $d'$ ]] per la funzione vettoriale  $\mu_\alpha$ , sul dominio  $A$  (vedi n. 9, parte finale).

II<sub>b</sub>) *Il valore di  $F\varphi$  non dipende dalla scelta del cammino  $\vec{\gamma}$  d'integrazione, purchè soddisfacente le condizioni già indicate.* Siano, in effetti  $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$  due siffatti cammini, frontiere orientate di due domini di olomorfia, rispettivamente  $D_1, D_2$ , della funzione  $\varphi$ ; allora, in virtù del lemma III e di un'altra proprietà indicata nel n. 2, sarà possibile determinare un terzo dominio di olomorfia  $D_3$  della funzione  $\varphi$ , interno ad ambedue i domini  $D_1, D_2$ , e nelle condizioni dianzi indicate. Ma, in tale ipotesi, dato che la funzione vettoriale di  $\alpha, \varphi(\alpha) \mu_\alpha$ , è *olomorfa*<sup>(54)</sup> sulla riunione  $D_1 \cup D_2$  dei domini  $D_1, D_2$ , esclusi tutt'al più i punti dell'insieme  $C$ , si avrà che gli integrali  $\int_{\vec{\gamma}_1} \varphi(\alpha) \mu_\alpha d\alpha$ ,

$\int_{\vec{\gamma}_2} \varphi(\alpha) \mu_\alpha d\alpha$  sono uguali all'integrale  $\int_{\vec{\gamma}_3} \varphi(\alpha) \mu_\alpha d\alpha$ , e quindi uguali fra di loro, q. e. d. (Questo punto richiede un'analisi più profonda, che però il lettore è in grado di rifare facilmente da sè).

Quando alle condizioni III), IV) saranno anch'esse verificate in conseguenza di note proprietà degli integrali.

Finalmente, quanto alla condizione V), basta osservare che, siccome la formula integrale di CAUCHY è applicabile anche a funzioni vettoriali analitiche (sotto condizioni analoghe a quelle classiche) ed *avendosi, precisamente*,  $\mu_\infty = 0$ , verrà subito<sup>(55)</sup>

$$F_\gamma \left( \frac{1}{\alpha - \gamma} \right) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \frac{1}{\alpha - \beta} \mu_\beta d\beta \equiv \mu_\alpha,$$

dove  $\vec{\gamma}$  designa per esempio, la frontiera di un cerchio contenente  $C$ , orientata in modo da lasciare a sinistra i punti di  $C$ .

Rappresentata, dunque, con  $\mathbf{P}$  la congiunzione dei predicati  $d'), b'), c')$ , sarà  $\mathbf{P}$  la condizione necessaria e sufficiente cercata, cioè il *predicato più ristretto, verificato dalla funzione vettoriale  $\frac{1}{\alpha - \gamma}$ , fra tutti quelli che sono rispettati da ogni trasformazione lineare analitica di  $\mathfrak{f}[C]$  in  $\mathfrak{f}[C^*]$ . E le sue soluzioni sono, precisamente, quelle funzioni vettoriali  $\mu_\alpha$  che, mediante la formula (7), rappresentano biunivocamente le riferite trasformazioni, essendo la trasformazione identica rappresentata dalla  $\frac{1}{\alpha - \gamma}$  (per  $C^* = C$ ).*

(54) È chiaro che anche il teorema di CAUCHY relativo agli integrali di funzioni olomorfe si può estendere alle funzioni vettoriali. La dimostrazione si può fare, sia vettorialmente, tenendo conto delle definizioni date nel n. 7, sia elementarmente, considerando le funzioni vettoriali come funzioni analitiche di due variabili. Altrettanto si dica rispetto alla formula integrale di CAUCHY.

(55) Vedi nota precedente. La condizione  $\mu_\infty = 0$  è, naturalmente, indispensabile per l'applicazione della formula di CAUCHY in questo caso.

Ci resta finalmente da esaminare il caso in cui l'insieme  $C$  contenga il punto improprio. Ora è da notare che, in questo caso, la proprietà  $c')$  non ha più senso, dato che il punto improprio non appartiene al dominio di regolarità della  $\frac{1}{\alpha - \zeta}$ ; essendo facile vedere come, allora, il *predicato risolvante*  $P$  si riduca alla congiunzione dei predicati  $a'), b')$ .

II. EQUIVALENZA TRA I CONCETTI DI « OPERATORE LINEARE ANALITICO » E DI « OPERATORE LINEARE CONTINUO ». - Abbiamo visto nel n. 8 che ogni operatore lineare continuo è anche analitico. Ci proponiamo ora di dimostrare la proposizione reciproca.

Sia dunque  $F$  una trasformazione lineare analitica di  $f[C]$  su  $f[C^*]$ , e rappresentiamo con  $\mu_\alpha$  la funzione indicatrice dell'operatore  $F$ . Allora, data comunque una successione  $\varphi_n [n = 0, 1, 2, \dots]$  di elementi dello spazio  $f[C]$ , la quale tenda ad un determinato elemento  $\varphi$  di questo spazio (cioè, in simboli:  $\lim \varphi_n = \varphi$ ), sarà possibile trovare, per tutte le funzioni  $\varphi_n(\zeta)$  di  $\zeta$ , un comun dominio di olomorfia,  $D$ , chiuso e contenente  $C$  all'interno, tale che: 1) la sua frontiera,  $\gamma$ , sia costituita da un numero finito di archi di cerchio e, quindi, rettificabile; 2) la funzione  $\varphi_n(\zeta)$  tenda uniformemente alla funzione  $\varphi(\zeta)$  sul dominio  $D$ , per  $n \rightarrow \infty$ . Verrà, dunque, in tale ipotesi,

$$(8) \quad F\varphi_n = \int_{\vec{\gamma}} \varphi_n(\alpha) \mu_\alpha d\alpha \quad [n = 0, 1, 2, \dots],$$

rappresentando con  $\vec{\gamma}$  la curva  $\gamma$  orientata in modo da lasciare a sinistra i punti di  $C$ . Ma questa curva è un insieme chiuso contenuto nel dominio di regolarità della  $\mu_\alpha$  e, quindi, secondo il lemma IV (n. 5), tutte le funzioni  $\mu_\alpha(\zeta)$  corrispondenti ai valori di  $\alpha$  situati su  $\gamma$ , ammetteranno almeno un comun dominio di olomorfia  $D^*$  (*che possiamo inoltre supporre chiuso*), il che ci consente di scrivere, in notazione ordinaria:

$$F_\zeta[\varphi_n(\zeta)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \varphi_n(\alpha) \bar{\mu}(\alpha, \zeta) d\alpha, \text{ per ogni } \zeta \in D^*, \quad [n = 0, 1, 2, \dots].$$

Sia allora  $M$  il massimo valore assoluto della funzione  $\bar{\mu}(\alpha, \zeta)$  sopra l'insieme *chiuso*  $\gamma \times D^*$ ; e sia, d'altra parte,  $\epsilon_n$ , il massimo valore assoluto della funzione  $\varphi_n - \varphi$  sopra l'insieme  $\gamma [n = 0, 1, 2, \dots]$ . Verrà dunque:

$$|F_\zeta[\varphi_n(\zeta)] - F_\zeta[\varphi(\zeta)]| = \left| \int_{\vec{\gamma}} [\varphi_n(\alpha) - \varphi(\alpha)] \bar{\mu}(\alpha, \zeta) d\alpha \right| \\ \leq \epsilon_n M \text{ lung } \gamma,$$

qualunque sia  $\zeta \in D^*$ .

Ma, in virtù dell'ipotesi, si avrà  $\lim_n \epsilon_n = 0$ , e sarà quindi

$$\lim_n F\varphi_n = F\varphi = F \lim_n \varphi_n, \quad \text{q. e. d.}$$

Questo risultato si può anche enunciare, dicendo che ogni operatore lineare analitico, applicato ad una serie uniformemente convergente in un intorno di  $C$ , la trasforma, termine a termine, in una serie uniformemente convergente in un intorno di  $C^*$ , la quale ha per somma la trasformata della somma della prima.

*Rileviamo finalmente che i risultati stabiliti nei numeri precedenti, sussistono, mutatis mutandis, quando, al posto del secondo spazio  $\mathfrak{f}[C^*]$  si consideri uno spazio di Banach complesso, cioè uno spazio lineare normale complesso in cui valga il criterio di convergenza di Cauchy<sup>(56)</sup> (per esempio, lo spazio hilbertiano). Uno spazio vettoriale analitico,  $\mathfrak{f}[C]$ , non appartiene a tale categoria, ma si può manifestamente esprimere come somma di infiniti spazi di Banach; i risultati precedenti sono pure estensibili a tutti gli spazi che si possono esprimere in questo modo.*

12. — AUTOMORFISMI DI UNO SPAZIO VETTORIALE ANALITICO<sup>(57)</sup>. — Consideriamo nuovamente uno spazio vettoriale analitico  $\mathfrak{f}[C]$ , e sia  $F$  una trasformazione biunivoca di questo spazio in se stesso. Riesce ben facile dimostrare che, se l'operatore  $F$  è lineare, lo stesso accadrà rispetto al suo inverso  $F^{-1}$ ; se, inoltre, esso riesce continuo nei due sensi,  $F$  sarà un automorfismo dello spazio vettoriale analitico  $\mathfrak{f}[C]$ . Ora, al contrario di quello che avviene per gli endomorfismi, una condizione, non solo necessaria ma anche sufficiente, perchè un predicato sia rispettato da tutti gli automorfismi, è che riesca logicamente esprimibile nei concetti primitivi. Quindi, per determinare la totalità degli automorfismi di  $\mathfrak{f}[C]$  dobbiamo cercare un predicato  $\mathbf{R}$ , irriducibile in tale sistema, che sia verificato dalla base logica  $\frac{I}{\alpha - \gamma}$ ; cioè il più ristretto fra i predicati logicamente esprimibili nei concetti primitivi che sono verificati dalla funzione vettoriale di  $\alpha, \frac{I}{\alpha - \gamma}$ . Le soluzioni del predicato risolvente  $\mathbf{R}$  saranno allora tutte le possibili funzioni indicatrici di automorfismi di  $\mathfrak{f}[C]$ .

Tuttavia, la determinazione di questa risolvente (paragonabile alle risolventi di Galois delle estensioni algebriche dei corpi) è un problema che non sono riuscito a risolvere completamente. I quattro predicati  $a), b), c), d)$ , indicati nel n. 10, sono manifestamente fattori logici di detto predicato  $\mathbf{R}$  (cioè condizioni necessarie). Lo stesso si può dire di quest'altro predicato:

e) Se, per un elemento  $\varphi$  di  $\mathfrak{f}[C]$ , si ha  $\int_{\vec{\gamma}} \varphi(\alpha) \mu_{\alpha} d\alpha = 0$ , essendo  $\vec{\gamma}$  la

frontiera orientata di un conveniente intorno di  $C$ , allora sarà, necessariamente,  $\varphi = 0$ .

(56) Su questo punto v. *Introduzione*.

(57) La lettura di questo numero non è affatto necessaria all'intelligenza di ciò che segue. Esso richiede inoltre una previa consulta della mia Memoria citata nell'introduzione.

Questa condizione, che corrisponde al concetto di *indipendenza lineare* negli spazi  $S_n$ , garantisce la biunivocità dell'operatore  $F$ ; ma non esclude la possibilità che lo spazio  $f[C]$  sia trasformato dall'operatore  $F$  soltanto in una sua parte, ed un esempio di questo fatto si trova nell'operatore  $\mathfrak{F}$  de-

finito da  $\mathfrak{F}\varphi(\chi) = \int_{\tau_0}^{\chi} \varphi(t) dt$  (in qualsiasi spazio  $f[C]$  il cui insieme caratteristico  $C$  abbia una sola componente e contenga  $\tau_0$ ).

Un'altra condizione necessaria, ma non logicamente *espressa* nei concetti primitivi (sebbene logicamente esprimibile in essi) è la seguente:

f) Se, per una funzione localmente analitica  $f(\chi)$  definita nel complementare dell'insieme  $C$ , si ha  $\int_{\vec{\gamma}} \bar{\mu}(\alpha, \chi) f(\chi) d\chi = 0$  (rappresentando con  $\vec{\gamma}$  la frontiera orientata di un conveniente intorno di  $C$ ), allora sarà, necessariamente  $f(\chi) \equiv 0$ .

Paragonando la  $\bar{\mu}(\alpha, \chi)$  al *nucleo* di una equazione di Fredholm, lo stesso fatto si può esprimere dicendo che tale funzione vettoriale è *chiusa* nello spazio  $f[C]$  <sup>(58)</sup>.

Si tratterebbe ora di indagare se la congiunzione dei predicati  $a), b), c), d), e), f)$  coincide o no col predicato risolvete  $\mathbf{R}$ ; e se gli stessi predicati sono o no indipendenti. Ma qui, appunto, si presentano difficoltà che non ho potuto superare.

13. CALCOLO DEGLI OPERATORI LINEARI <sup>(59)</sup>. - Rappresentiamo con  $T_{\mathfrak{S}}$  l'insieme delle trasformazioni lineari (anche non continue) di uno spazio vettoriale  $\mathfrak{S}$  su se stesso (qui  $\mathfrak{S}$  designa un qualsivoglia sistema lineare munito di conveniente concetto di «limite»: per esempio, uno spazio vettoriale analitico o un qualsivoglia spazio di Banach complesso). La *somma* e il *prodotto* di due siffatte trasformazioni (tra le quali si trovano sempre i moltiplicatori scalari) vanno definite com'è stato convenuto al n. 8. Da questa definizione si passa immediatamente a quella di potenza  $F^n$  (con  $n$  intero positivo qualunque) di un generico operatore  $F$ , e poi al concetto di *polinomio intero in una variabile  $F$  e a coefficienti scalari*:

$$\varphi(F) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 F + \dots + \alpha_{n-1} F^{n-1} + \alpha_n F^n$$

Che significato, però, dobbiamo attribuire al simbolo  $\varphi(F)$  quando  $\varphi$  rappresenti una funzione algebrica qualsiasi o addirittura una funzione analitica trascendente?

Per risolvere la questione, cominciamo col definire *limite* di una successione  $F_n$  di operatori appartenenti a  $T_{\mathfrak{S}}$ :

(58) VOLTERRA et PÉRÈS, *Théorie générale des fonctionnelles*, p. 298.

(59) Su questo argomento, vedi FANTAPPIÈ, *La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni alle derivate parziali*. «Mem. dell'Accad. d'Italia», vol. I, n. 2 (1930).

Porremo  $\lim_n F_n = F$ , se, e soltanto se, riesce  $\lim_n (F_n \mathbf{u}) = F\mathbf{u}$ , per ogni  $\mathbf{u}$  e  $\mathfrak{S}$ .

Consideriamo ora uno spazio vettoriale analitico  $\mathfrak{f}[C]$  il quale contenga tutte le funzioni razionali intere (per questo occorre e basta che  $C$  non contenga il punto improprio). Ci proponiamo allora di risolvere questo problema: Dato un operatore  $F$  appartenente a  $T_{\mathfrak{S}}$ , associare ad ogni funzione  $\varphi \in \mathfrak{f}[C]$  un ben determinato operatore, che converremo di rappresentare con  $\varphi(F)$ , per guisa che siano verificate le condizioni seguenti:

- I)  $\varphi(F) \in T_{\mathfrak{S}}$  per ogni  $\varphi \in \mathfrak{f}[C]$ ;
- II) Se  $\varphi(z) \equiv 1$ , allora  $\varphi(F) = I$  (rappresentando con  $I$  la trasformazione identica; cioè  $I = F^0$ );
- III) Se  $\varphi(z) \equiv z$ , allora  $\varphi(F) = F$ ;
- IV)  $(\varphi + \psi)(F) = \varphi(F) + \psi(F)$ , quali che siano  $\varphi, \psi \in \mathfrak{f}[C]$ ;
- V)  $(\alpha\varphi)(F) = \alpha\varphi(F)$ , quali che siano il numero complesso  $\alpha$ , e  $\varphi \in \mathfrak{f}[C]$ ;
- VI)  $(\varphi \cdot \psi)(F) = \varphi(F) \psi(F)$ , quali che siano  $\varphi, \psi \in \mathfrak{f}[C]$ ;
- VII)  $(\lim_n \varphi_n)(F) = \lim_n \varphi_n(F)$ , per ogni successione  $(\varphi_n)$ , convergente, di vettori dello spazio  $\mathfrak{f}[C]$  <sup>(60)</sup>.

Dalle II) e VI) risulta immediatamente che: Se  $\varphi$  e  $\frac{1}{\varphi}$  appartengono tutte e due a  $\mathfrak{f}[C]$ , allora l'operatore  $\varphi(F)$  sarà invertibile (cioè biunivoco) e si avrà precisamente,  $\frac{1}{\varphi}(F) = \frac{1}{\varphi(F)}$ , rappresentando con  $\frac{1}{\varphi(F)}$  l'inverso di  $\varphi(F)$ .

In particolare, una conseguenza delle II), IV), V), VI), sarà:

$$A) \text{ Se } \varphi(z) \equiv \frac{1}{\alpha - z}, \text{ allora } \varphi(F) = \frac{1}{\alpha - F}, \text{ qualunque sia } \alpha \in \Omega.$$

Supponiamo dunque verificate le condizioni I) – VII) e poniamo:

$$(9) \quad \varphi(F) \mathbf{u} = \Theta \varphi.$$

Allora, supponendo fermi il vettore  $\mathbf{u}$  dello spazio  $\mathfrak{S}$  e l'operatore  $F$  appartenente a  $T_{\mathfrak{S}}$ , e facendo invece variare  $\varphi$  sopra  $\mathfrak{f}[C]$ , il simbolo  $\Theta$  rappresenterà manifestamente una trasformazione univoca di  $\mathfrak{f}[C]$  su  $\mathfrak{S}$ , la quale deve essere *lineare*, perchè, in virtù della IV) e della V), si avrà, rispettivamente,

$$\begin{aligned} \Theta(\varphi + \psi) &= (\varphi + \psi)(F) \mathbf{u} = [\varphi(F) + \psi(F)] \mathbf{u} = \varphi(F) \mathbf{u} + \psi(F) \mathbf{u} = \Theta\varphi + \Theta\psi; \\ \Theta(\alpha\varphi) &= (\alpha\varphi)(F) \mathbf{u} = \alpha\varphi(F) \mathbf{u} = \alpha\Theta\varphi; \end{aligned}$$

e anche *continua*, perchè, in virtù della VII) (badando inoltre alla precedente definizione di limite) si avrà:

$$\Theta \lim_n \varphi_n = (\lim_n \varphi_n)(F) \mathbf{u} = [\lim_n \varphi_n(F)] \mathbf{u} = \lim_n [\varphi_n(F) \mathbf{u}] = \lim_n \Theta \varphi_n.$$

(60) È da notare che le funzioni razionali intere dell'operatore  $F$  soddisfano queste condizioni.

Ma la funzione indicatrice dell'operatore  $\Theta$  sarà, per forza di A) e tenendo ancora in conto della (9):

$$\Theta_{\zeta} \frac{1}{\alpha - \zeta} = \frac{1}{\alpha - F} u,$$

e quindi verrà, in virtù del teorema fondamentale (numeri 10, 11):

$$(10) \quad \varphi(F) u = \Theta \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - F} u d\alpha,$$

rappresentando con  $\vec{\gamma}$  la frontiera debitamente orientata di un conveniente dominio di olomorfia della  $\varphi$ .

D'altra parte, secondo l'analisi svolta al n. 10, la funzione di  $\alpha$ ,  $\frac{1}{\alpha - F} u$ , di codominio contenuto in  $\mathfrak{S}$ , dovrà essere univocamente definita nel complementare A dell'insieme C ed ivi analitica, *qualunque* sia  $u \in \mathfrak{S}$  (annullandosi per  $\alpha = \infty$ ) cioè, in altri termini:

*Per ogni  $u \in \mathfrak{S}$  e  $\alpha \in A$ , l'equazione funzionale  $\alpha v - Fv = u$  dovrà ammettere in  $\mathfrak{S}$  una e soltanto una soluzione  $v$ , dipendente analiticamente dal parametro  $\alpha$  su A e nulla per  $\alpha = \infty$ . Inoltre: Se il problema dianzi proposto è risolubile, lo sarà in modo unico, e l'operatore  $\varphi(F)$  dovrà essere definito dalla formula (10).*

Mostriamo ora come la condizione testè enunciata rispetto alla funzione vettoriale  $(\alpha - F)^{-1} u$  sia non solo necessaria, ma anche sufficiente, perchè il problema sia risolubile e determinato. Ma, prima di questo, introduciamo ancora alcune convenzioni semplificatrici:

Diremo che un operatore  $F_{\alpha}$ , variabile sopra  $T_{\mathfrak{S}}$ , dipende analiticamente dal parametro  $\alpha$  in un dominio  $D \subset \Omega_{\alpha}$ , quando, comunque sia dato  $u \in \mathfrak{S}$ , il vettore variabile  $v_{\alpha} = F_{\alpha} u$  costituisca sempre una funzione vettoriale (di codominio  $\mathfrak{S}$ ) analitica sopra D. D'altra parte, chiameremo *derivata* di  $F_{\alpha}$  l'operatore variabile  $\mathfrak{D}_{\alpha} F_{\alpha}$  tale che:  $(\mathfrak{D}_{\alpha} F_{\alpha}) u = \mathfrak{D}_{\alpha} (F_{\alpha} u)$  qualunque sia  $u \in \mathfrak{S}$ . Da queste definizioni si passa immediatamente a quella di *primitiva* e a quella di *integrale esteso ad una curva orientata* - le quali potrebbero essere date anche direttamente, a partire dal precedente concetto di limite. In base a tali convenzioni, possiamo sostituire la condizione VII) con quest'altra:

VII\*)  $(\mathfrak{D}_{\alpha} \varphi_{\alpha})(F) = \mathfrak{D}_{\alpha} [\varphi_{\alpha}(F)]$ , per ogni funzione vettoriale analitica  $\varphi_{\alpha}$  di codominio contenuto in  $\mathfrak{f}[C]$  <sup>(61)</sup>.

Inoltre, la formula (10) potrà essere scritta in quest'altro modo

$$\varphi(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - F} d\alpha$$

acquistando così una suggestiva analogia con la formula integrale di Cauchy.

(61) Allora, la condizione V) diventerà superflua. Questa proprietà (la VII\*) ha importanza fondamentale per le applicazioni del calcolo operatorio all'integrazione di equazioni alle derivate parziali.

Finalmente, alla condizione che abbiamo dianzi stabilita come necessaria per la risolubilità e determinatezza del problema proposto, possiamo dare questo nuovo enunciato:

B) *L'operatore  $(\alpha - F)^{-1}$  deve essere una funzione del parametro  $\alpha$  univocamente definita e analitica in tutto il complementare dell'insieme  $C$  <sup>(62)</sup>.*

Supponiamo dunque verificata tale condizione e mostriamo che, definendo  $\varphi(F)$  mediante la formula (10), tutte le condizioni I)–VII) sono verificate.

Quanto alle condizioni I), IV), V), VII), l'asserto è ovvio, dopo quello che si è detto precedentemente. Ci rimangono le II), III), VI).

Per la II) e la III), rappresentiamo con  $u_\alpha$  la funzione indicatrice dell'operatore  $\Theta$  definito dalla (9), e poniamo  $u_\alpha = \frac{1}{\alpha - F} u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{n+1}} u_n$ . Allora verrà

$$\alpha u_\alpha - F u_\alpha = u,$$

ossia

$$u_0 + \frac{u_1}{\alpha} + \frac{u_2}{\alpha^2} + \dots - F \left( \frac{u_0}{\alpha} + \frac{u_1}{\alpha^2} + \dots \right) = u$$

donde, per  $\alpha = \infty$ :  $u_0 = u$ , e quindi

$$u_1 + \frac{u_2}{\alpha} + \dots - F \left( u_0 + \frac{u_1}{\alpha} + \dots \right) = 0,$$

donde ancora, per  $\alpha = \infty$ :  $u_1 = F u_0$ .

Ma, d'altra parte, si ha  $u_n = \Theta(\chi^n) [n = 0, 1, 2, \dots]$  <sup>(63)</sup>; e allora sarà

$$\Theta(\chi^0) = u \quad \Theta(\chi) = F u, \quad \text{qualunque sia } u \in \mathfrak{S},$$

il che vuol dire, tenuto conto della (9), che:

a) Se  $\varphi(\chi) \equiv \chi^0 \equiv 1$ , allora  $\varphi(F) u = u$ , per ogni  $u \in \mathfrak{S}$ , e quindi  $\varphi(F) = F$

b) Se  $\varphi(\chi) \equiv \chi$ , allora  $\varphi(F) u = F u$ , per ogni  $u \in \mathfrak{S}$ , e quindi  $\varphi(F) = F$  <sup>(64)</sup>.

Quanto alla VII), osserviamo che è

$$\begin{aligned} \varphi(F) \psi(F) &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\vec{\gamma}} \left[ \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - F} \int_{\vec{\gamma}} \frac{\psi(\beta)}{\beta - F} d\beta \right] d\alpha \\ &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\vec{\gamma}} \left[ \int_{\vec{\gamma}} \frac{\varphi(\alpha) \cdot \psi(\beta)}{(\alpha - F)(\beta - F)} d\alpha \right] d\beta, \end{aligned}$$

(62) La condizione di annullamento all'infinito vi è già implicita.

(63) Per convincersene basterà osservare che  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{n+1}} u_n = \Theta_\chi \frac{1}{\alpha - \chi} = \Theta_\chi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^n}{\alpha^{n+1}}$

tener conto che l'operatore  $\Theta$  è lineare e continuo.

(64) Questa parte della dimostrazione non è che un adattamento alle ipotesi presenti di quella data dal prof. FANTAPPIÈ.

essendo  $\vec{\gamma}$  la frontiera debitamente orientata di un conveniente dominio di olomorfia della  $\varphi$  e della  $\psi$ .

Ma d'altra parte si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha - F)(\beta - F)} &= \frac{1}{\beta - \alpha} \frac{(\beta - F) - (\alpha - F)}{(\alpha - F)(\beta - F)} \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} [(\beta - F)(\beta - F)^{-1}(\alpha - F)^{-1} - (\alpha - F)(\beta - F)^{-1}(\alpha - F)^{-1}] \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} \left( \frac{1}{\alpha - F} - \frac{1}{\beta - F} \right) \quad (65). \end{aligned}$$

Inoltre, possiamo sostituire il percorso  $\vec{\gamma}$  cui si riferisce il secondo integrale, con un altro percorso  $\vec{\gamma}^*$  *interno* al dominio D. E allora verrà:

$$\begin{aligned} \varphi(F) \cdot \psi(F) &= \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{\vec{\gamma}} \psi(\beta) \left[ \int_{\vec{\gamma}^*} \frac{\varphi(\alpha)}{(\alpha - F)(\beta - \alpha)} d\alpha \right] d\beta - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}^*} \frac{\varphi(\alpha)}{\beta - \alpha} d\alpha \right] \frac{\psi(\beta)}{\beta - F} d\beta. \end{aligned}$$

Rappresentando ora con  $K_1$  il primo termine del secondo membro, è facile vedere<sup>(66)</sup> che si ha

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}^*} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \frac{\psi(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta \right] \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - F} d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}^*} \frac{\varphi(\alpha) \psi(\alpha)}{\alpha - F} d\alpha = (\varphi \cdot \psi)(F), \end{aligned}$$

tenuto conto del fatto che, mentre descrive  $\vec{\gamma}^*$ , il punto  $\alpha$  si mantiene *interno* a  $\vec{\gamma}$ .

Quanto al secondo termine,  $K_2$  si vede subito come sia  $K_2 = 0$ , osservando che, per descrivere  $\vec{\gamma}$ , il punto  $\beta$  deve mantenersi *esterno* a  $\vec{\gamma}^*$ .

E sarà quindi  $\varphi(F) \cdot \psi(F) = (\varphi \cdot \psi)(F)$ , q. e. d.

(65) Osserviamo che in questo punto interviene la linearità dell'operatore F. Si ha, infatti,  $[(\alpha - F)(\beta - F)]^{-1} = [F^2 - (\alpha + \beta)F + \alpha\beta]^{-1}$  e quindi  $(\beta - F)^{-1}(\alpha - F)^{-1} = (\alpha - F)^{-1}(\beta - F)^{-1}$ .

(66) Il lettore potrà vedere come, anche qui, sia lecita l'inversione dell'ordine delle integrazioni.

14. SERIE DI POTENZE DI OPERATORI. — Abbiamo visto al numero precedente che, data una funzione  $\varphi$  appartenente a  $f[C]$  e tale che  $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ , con  $\varphi_n \in f[C]$ , ed essendo  $F$  un operatore della famiglia  $T_{\mathfrak{E}}$  soddisfacente la condizione B) ivi enunciata, si avrà  $\varphi(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(F)$ .

In particolare possiamo stabilire che: *Condizione necessaria e sufficiente perchè una serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n F^n$  sia convergente, è che l'operatore  $(\alpha - F)^{-1}$  sia una funzione di  $\alpha$  univocamente definita e analitica nel complementare di un insieme chiuso interno al cerchio di convergenza della  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$*  <sup>(67)</sup>.

Ora si vede facilmente che, rispetto all'operatore lineare  $\mathfrak{J}$  definito dalla formula  $\mathfrak{J}\psi(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \psi(\zeta) d\zeta$  (in qualunque spazio vettoriale analitico il cui insieme caratteristico  $C$  abbia una sola componente e contenga il punto  $\zeta_0$ ) <sup>(68)</sup> si ha che l'operatore  $\alpha - \mathfrak{J}$  è invertibile per ogni  $\alpha \neq 0$ , essendo precisamente:

$$\frac{1}{\alpha - \mathfrak{J}} \eta(\zeta) = \frac{1}{\alpha} \eta(\zeta) + \frac{1}{\alpha^2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{\frac{\zeta-t}{\alpha}} \eta(t) dt.$$

Allora, qualunque serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathfrak{J}^n$  sarà convergente, purchè il raggio  $\rho$  di convergenza della  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$  non sia nullo, e si potrà scrivere inoltre

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathfrak{J}^n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n}{\alpha - \mathfrak{J}} d\alpha$$

essendo  $\vec{\gamma}$ , per esempio, una circonferenza con centro nell'origine e di raggio  $< \rho$ .

In particolare si ritrova il noto risultato:

$$\mathfrak{J}^{n+1} \eta(\zeta) = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(\zeta - \alpha)^n}{n!} \eta(\alpha) d\alpha,$$

(67) Questo risultato generalizza un altro, ben noto, della teoria delle matrici finite, secondo il quale la condizione di convergenza è che lo *spettro* della matrice  $F$  sia interno al cerchio di convergenza della serie considerata.

(68) FANTAPPIÈ, Mem. cit., p. 19.

donde, badando a (11), e ponendo  $\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ , si è ricondotti alla formula di Duhamel

$$\varphi(\mathfrak{z}) \eta(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} \int_{\zeta}^{\mathfrak{z}} \mu(\zeta - \alpha) \eta(\alpha) d\alpha$$

dove la funzione  $\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$  è manifestamente il risultato dell'operatore  $\varphi(\mathfrak{z})$  applicato alla funzione  $\zeta(\zeta) \equiv 1$ , con  $t = \zeta - \zeta_0$ .

NOTA FINALE. — La scarshezza di tempo mi ha costretto a condensare la redazione di questa Memoria, omettendo gran numero di particolari che mi sembrano rilevanti, specialmente per quanto riguarda il calcolo operatorio.