

CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Extrait du

COLLOQUE

SUR

L'ANALYSE
FONCTIONNELLE

TENU A LOUVAIN

LES 25, 27, ET 28 MAI 1960

CBRM

LIBRAIRIE UNIVERSITAIRE
10, RUE DE LA MONNAIE
LOUVAIN-BELGIQUE

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS
PARIS

1961

LA DÉFINITION DE SPECTRE D'UN OPÉRATEUR ET LES OPÉRATEURS A SPECTRE ÉLÉMENTAIRE NON BORNÉ

PAR

J. SEBASTIAO E SILVA (Lisbonne)

Soit E un espace localement convexe séparé, sur le corps complexe. Etant donnée une application linéaire Δ d'un sous-espace vectoriel E_Δ de E sur E , j'appellerai *spectre élémentaire* de Δ l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\Delta - \lambda$ n'est pas une application biunivoque de E_Δ sur E . M. Waelbroeck a observé que cette notion de spectre ne se prête pas à une généralisation de la théorie spectrale classique, telle qu'on l'a développée dans le cas des algèbres de Banach, et il présente comme exemple typique d'opérateurs, auxquels ne peut jamais s'appliquer cette théorie, les opérateurs différentiels, dont le spectre élémentaire est non borné ou bien vide (d'après les espaces dans lesquels on les considère définis).

Il s'agirait donc de voir maintenant comment la définition de M. Waelbroeck s'applique à ces opérateurs et, plus généralement, aux opérateurs Δ à spectre non borné ou vide, que j'ai considéré dans certaines formes de calcul opérationnel, dont le calcul relatif aux opérateurs auto-adjoints, dans des espaces hilbertiens, peut être envisagé comme un cas particulier (voir Bibliographie, [2], [5] et [6]). A chacun de ces opérateurs Δ on peut associer une algèbre localement convexe, de la façon suivante :

En employant notre méthode générale d'extension algébrique exposée dans [1] (pour le cas simple considéré au n° 1), on construit d'abord un espace vectoriel \tilde{E} contenant E comme sous-espace, de façon que Δ soit prolongée en une application linéaire $\tilde{\Delta}$ de \tilde{E} dans \tilde{E} , vérifiant les deux conditions suivantes 1) Si $\tilde{\Delta}u = 0$, on a aussi $\Delta u = 0$; 2) tout élément U de E est de la forme $U = \tilde{\Delta}^n u$, avec $u \in E$ et n entier.

On voit alors que le spectre élémentaire de $\tilde{\Delta}$ coïncide avec celui de Δ , et on pourra, pour commodité désigner ce prolongement de Δ par le même symbole Δ . En posant $E_n = \Delta^n(E)$, pour $n = 0, 1, 2, \dots$, la condition 2) équivaut à écrire

$$\tilde{E} = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$$

Désignons par \mathfrak{T} la topologie de E . Suivant notre méthode générale de prolongement topologique (cf. [1], §2), on peut attribuer à \tilde{E} la plus fine topologie, \mathfrak{T}_{∞} , qui rende *continu* l'opérateur $\tilde{\Delta}$ et induise dans E une topologie moins fine que \mathfrak{T} . Dans les cas courants, E est un espace normé et il existe un inverse à droite de Δ qui est une application continue de E sur E_{Δ} . Alors E sera la limite inductive des espaces normés $E_n = \Delta^n(E)$, images de E par les puissances entières de Δ , l'application identique de E_n dans E_{n+1} étant continue pour tout n . Dans nombre de cas concrets cette application est même *complètement continue*: alors E sera un espace du type (\mathfrak{S}_2) , i.e. le dual d'un espace de Schwartz métrisable, ce qui simplifie beaucoup les questions.

Cela posé, une algèbre localement convexe ayant Δ comme élément est, par exemple, l'algèbre $\mathfrak{L}_b(\tilde{E})$ des applications linéaires continues de \tilde{E} dans \tilde{E} , munie de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés. C'est là une algèbre localement convexe, où le produit est séparément continu (et même hypocontinu relativement aux parties bornées, si E est tonnelé). En général cette algèbre n'est pas commutative, mais il existe des cas non triviaux de sous-algèbres commutatives de $\mathfrak{L}_b(\tilde{E})$, contenant l'élément Δ . Nous allons en indiquer un exemple.

Soit F un vrai sous-ensemble, fermé et non vide, du plan \mathbf{C} de la variable complexe. Pour tout $k = 1, 2, \dots$, nous désignons par F_k l'ensemble des points de \mathbf{C} dont la distance à F est $< 1/k$, et par $\mathfrak{U}_k(F)$ l'ensemble des fonctions complexes $\varphi(z)$ définies et holomorphes dans F_k , telles que, pour chaque φ , il existe un k vérifiant la condition $|\varphi(z)| \leq k|z|^k$ pour tout $z \in F_k$. On considère cet ensemble muni des notions usuelles de somme et de produit de deux fonctions, et d'une topologie τ_k définie par la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \frac{|\varphi(z)|}{(1 + |z|)^k}$$

On voit aussitôt que, pour tout k , $\mathfrak{A}_k(F)$ est une algèbre de Banach commutative complexe.

Si l'on identifie chaque fonction $\varphi \in \mathfrak{A}_k(F)$ à la fonction $\bar{\varphi} \in \mathfrak{A}_{k+1}(F)$ qui est la restriction de φ à F_k , on peut écrire $\mathfrak{A}_k(F) \subset \mathfrak{A}_{k+1}(F)$ (pour tout k). Posons alors

$$\mathfrak{A}_\infty(F) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}_k(F)$$

Les notions de somme et de produit de deux fonctions, déjà définies dans les espaces $\mathfrak{A}_k(F)$, rendent $\mathfrak{A}_\infty(F)$ une algèbre commutative complexe, munie d'élément unité. On y introduit la topologie, τ_∞ , de la limite inductive (localement convexe) des espaces normés $\mathfrak{A}_k(F)$; alors $\mathfrak{A}_\infty(F)$ devient un espace (\mathfrak{S}_2) , où le produit $\varphi \cdot \psi$ est continu.

Or nous avons démontré le théorème suivant, sous des hypothèses assez larges relatives à F :

Pour qu'il existe un homomorphisme continu \mathfrak{H} de $\mathfrak{A}_\infty(F)$ dans $\mathfrak{L}_b(\tilde{E})$, faisant correspondre à la fonction $\varphi(z) \equiv 1$ l'opérateur identité 1, et à la fonction $\varphi(z) \equiv z$ l'opérateur Δ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

- I) F est contenu dans le spectre élémentaire de Δ ;
- II) la fonction $(\Delta - \lambda)^{-1}$ de λ , à valeurs dans $\mathfrak{L}_b(\tilde{E})$, est bornée dans $\mathbb{C} - F_k$, pour tout k .

Dans ces conditions l'homomorphisme \mathfrak{H} est donné univoquement par la formule

$$\mathfrak{H}(\varphi) = \frac{\Delta^p}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^p(\Delta - \lambda)} d\lambda, \quad \varphi \in \mathfrak{A}_\infty(F)$$

où Γ est la frontière d'un voisinage de F dépendant de φ , orientée de façon à laisser à droite les points de F , et p un entier suffisamment élevé pour que l'intégrale existe au sens usuel relativement à la topologie de $\mathfrak{L}_b(\tilde{E})$.

Ce résultat nous suggère d'écrire

$$\varphi(\Delta) = \mathfrak{H}(\varphi), \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{A}_\infty(F)$$

Or une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{L}_b(\tilde{E})$ ayant Δ comme élément est précisément celle constituée par ces opérateurs $\varphi(\Delta)$. On peut considérer cet espace muni de la topologie image de τ_∞

par l'homomorphisme continu \mathfrak{H} , donc plus fine que celle induite par la topologie de $\mathfrak{L}_b(\tilde{E})$.

D'ailleurs, on pourrait considérer directement l'algèbre $\mathfrak{A}_\infty(F)$ et se demander comment la définition de M. Waelbroeck s'applique à l'élément z , dont le spectre élémentaire est précisément F .

Voilà les questions les plus importantes que m'a suggéré la belle conférence de M. Waelbroeck, et auxquelles on trouve peut-être sans difficulté la réponse, en réfléchissant avec plus de délai sur son exposé.

Il y a encore le cas où le spectre élémentaire de Δ est vide, cas auquel s'appliquent, sous des hypothèses variables, d'autres types de calcul opérationnel. M. Waelbroeck a bien voulu nous expliquer, en détail, comment sa définition s'adapte au cas particulier où Δ est l'opérateur D de dérivation, défini dans l'espace des distributions (d'une variable) de support limité à gauche, et auquel s'applique le calcul opérationnel correspondant à la transformation de Laplace.

Dans le travail «Sur le calcul symbolique à une ou plusieurs variables», à paraître dans «Annali di Matematica», j'utilise quelques idées de M. Waelbroeck sur le théorie spectrale, qui m'ont permis d'arriver à une synthèse de tous les types de calcul symbolique que j'avais considérés auparavant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. SEBASTIÃO E SILVA. *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*. Revista da Fac. de Ciências de Lisboa, 2a. série, A, vol. 4 (1954-55) p. 79-186.
- [2] ———, *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*. Portugaliae Math., 14 (1956), p. 105-132.
- [3] ———, *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*. Port. Math. 17 (1958), p. 1-17.
- [4] ———, *Corrections et compléments de l'article « Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite »*. Port. Math., 18 (1959), p. 155-156.
- [5] ———, *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables*. Rend. Accad. Lincei, serie 8, vol. 27 (1959), p. 42-47, 118-122.
- [6] ———, *Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné*. Memorie Accad. Lincei, serie 8, vol. 6 (1960), p. 1-13.