

ATTI
DELLA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLIII

1956

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Volume XX - 1° semestre 1956

Fascicolo 6 – giugno 1956



ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1956

Matematica. — *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes.* Nota I di J. SEBASTIÃO E SILVA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Dans cette Note et dans une autre qui la suivra, nous indiquerons, sans démonstrations, une façon naturelle de généraliser, aux espaces localement convexes les plus généraux, plusieurs de nos résultats contenus dans [11], [12] et [13] ⁽¹⁾. Tout d'abord, nous nous sommes convaincus que, pour obtenir une bonne généralisation du concept de « fonction différentiable », il faut renoncer, dans le cas général, à la condition de continuité (qui subsistera, néanmoins, dans les cas courants des applications). On sait que, dans les espaces l. c., la propriété d'être bornée, pour les fonctions linéaires, est plus générale que la propriété d'être continue. Eh bien, c'est la notion de fonction linéaire *bornée*, qui nous a conduit, d'une façon naturelle, à la notion de fonction analytique et, en dernière analyse, à celle de fonction différentiable. Pour atteindre la plus grande généralité, nous considérons des fonctions qui sont bornées seulement sur certaines parties bornées de l'espace de la variable indépendante; dans cet ordre d'idées, nous introduisons toute une gamme de notions de différentiabilité, parmi lesquelles on retrouve, généralisées, quelques-unes des notions déjà connues – depuis la différentiabilité au sens de Gâteaux-Lévy, jusqu'à la différentiabilité au sens de Fréchet. Avec ces prémisses, on réussit à généraliser un grand nombre de théorèmes, avec des hypothèses assez larges et sous une forme assez simple, ce qui induit à croire que l'on est sur la bonne route.

La dérivée d'une fonction en un point est toujours conçue comme une application linéaire, d'après une idée de Michal. D'autre part, pour étudier la réciproque de l'opération de dérivation, on est conduit, nécessairement, à la notion d'intégrale de ligne, que nous avons déjà définie dans [12] pour les espaces de Banach et que, même dans ce cas particulier, nous n'avons trouvée nulle part, définie d'une façon équivalente.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la Bibliographie, qui sera publiée à la fin de la Note suivante.

Dans le cas des scalaires complexes, on réussit à généraliser aux espaces l. c. plusieurs résultats de la théorie des fonctions analytiques dans les espaces de Banach. *C'est le résultat fondamental de Hille, concernant les fonctions G-analytiques localement bornées* (cf. [7], p. 81–82), *qui conduit, d'une façon naturelle, à nos notions de différentiabilité.*

Dans une troisième Note, nous nous occuperons de la généralisation de l'analyse dans les algèbres de Banach (cf. travaux de Gelfand, Lorch, etc.). À cet effet, nous considérerons des algèbres X commutatives, munies d'élément unité et d'une topologie d'espace localement convexe telle que l'application $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ de X^2 dans X soit bornée sur tout borné de X^2 .

1. NOTIONS DE FONCTION DIFFÉRENTIABLE ET DE DERIVÉE. – Sauf mention expresse du contraire, tous les espaces considérés par la suite seront des *espaces vectoriels localement convexes, sur le corps réel, R , ou sur le corps complexe, C* . Dans toute question où l'on considère deux ou plusieurs espaces, on sous-entend qu'ils sont relatifs au même corps de scalaires.

Soient X, Y deux tels espaces et soit \mathfrak{B} un ensemble de parties bornées de X , fixé arbitrairement, de façon que: 1) si B appartient à \mathfrak{B} , l'enveloppe absolument convexe ⁽²⁾ de B , appartient aussi à \mathfrak{B} ; 2) \mathfrak{B} contient tous les ensembles formés d'un seul élément de X . Cela étant, considérons une fonction $\varphi(x)$ définie dans une partie de X et prenant ses valeurs dans Y ; et soit μ un nombre réel > 0 ; alors:

(1.1) Nous dirons que $\varphi(x)$ est un *infinitement petit avec x , d'ordre supérieur à μ , par rapport à \mathfrak{B}* , si, pour tout ensemble $B \in \mathfrak{B}$, il existe un borné C de Y , tel que, à tout nombre $\delta > 0$, corresponde un nombre $\varepsilon > 0$, vérifiant la condition

$$\frac{\varphi(tx)}{t^\mu} \in \delta C, \text{ pour } |t| < \varepsilon, \text{ quel que soit } x \in B.$$

Cette définition peut sembler un peu artificielle et plutôt restrictive. On verra mieux sa raison d'être dans le cas des scalaires complexes (fonctions analytiques). D'ailleurs toutes les propositions que nous indiquerons par la suite, excepté le théorème des fonctions composées, restent valables si l'on remplace (1.1) par la définition suivante: «On dit que $\varphi(x)$ est un *infinitement petit avec x , d'ordre supérieur à μ , par rapport à \mathfrak{B}* , si le rapport $\varphi(tx)/t^\mu$ converge vers 0, uniformément sur tout $B \in \mathfrak{B}$, lorsque $t \rightarrow 0$ ». Ces deux définitions s'accordent avec la notion usuelle d'infinitement petit d'ordre supérieur à μ , dans le cas où X, Y sont des espaces normés et \mathfrak{B} est formé par tous les bornés de X . Plus généralement, ces deux définitions sont équivalentes, lorsque Y vérifie la *seconde condition de dénombrabilité de Mackey* (cf. [3], p. 77), ainsi que la *condition de convergence de Mackey stricte* (cf.

(2) D'après M. KÖTHE, nous appelons *enveloppe absolument convexe* de B l'ensemble des éléments de X de la forme $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_r x_r$, avec $x_i \in B$, $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_r| \leq 1$ et r quelconque (notion équivalent à celle de *enveloppe convexe et cerclée*).

[6], p. 105), ce qui est assez fréquent dans l'analyse fonctionnelle concrète, nommément dans la théorie des distributions et dans la théorie des fonctionnelles analytiques.

Soit maintenant $f(x)$ une fonction définie dans un ouvert D de X et à valeurs dans Y :

(1.2) Nous dirons que $f(x)$ est *différentiable en un point a de D par rapport à \mathfrak{B}* , ou, simplement, *différentiable (\mathfrak{B}) en a* , s'il existe une application linéaire L de X dans Y , bornée sur tout borné $B \in \mathfrak{B}$, telle que la différence

$$f(x) - f(a) - L(x - a)$$

soit un infiniment petit avec $x - a$, d'ordre supérieur à 1, par rapport à \mathfrak{B} .

On voit aussitôt qu'il ne peut exister plus d'un opérateur L vérifiant cette condition. S'il en existe un, nous le nommerons la *dérivée de $f(x)$ en a* (par rapport à \mathfrak{B}) et nous le désignerons par $f'(a)$ ou par $[df/dx]_a$, en écrivant

$$f'(a)h \quad \text{au lieu de } L(h).$$

D'ailleurs, on voit que le rapport $[f(a + th) - f(a)]/t$, où t est une variable, converge vers $f'(a)h$ (uniformément sur tout $B \in \mathfrak{B}$), lorsque $t \rightarrow 0$. La fonction $f'(a)h$ de h s'appellera la *différentielle de $f(x)$ au point a , correspondante à l'accroissement h* .

La fonction $f(x)$ sera dite *différentiable (\mathfrak{B}) dans D* , si elle est différentiable (\mathfrak{B}) en tout point de D . Alors, n'importe quel des symboles $f'(x)$, $(d/dx)f(x)$, $D_x f$, \dots , désignera la *fonction dérivée* (ou simplement la *dérivée*) de $f(x)$ dans D .

Avec ces définitions de dérivée, plusieurs propriétés élémentaires de la notion classique sont conservées: *la dérivée d'une somme est la somme des dérivées, la dérivée d'une constante est l'opérateur nul, la dérivée de x est l'opérateur identique*, etc. Mais, pour les autres propriétés, il faut introduire des restrictions convenables.

Pour chaque $B \in \mathfrak{B}$, nous désignerons par \hat{B} l'enveloppe absolument convexe de B et par $[B]$ le sous-espace vectoriel de X engendré par B et muni de la norme correspondante à la boule \hat{B} . On appelle *dimension* de B le nombre de dimensions de $[B]$.

Supposons que $f(x)$ est différentiable (\mathfrak{B}) en a . Nous distinguerons les cas suivants:

1° \mathfrak{B} est formé par les bornés de X de dimension 1. Nous dirons alors que $f(x)$ est *uni-différentiable en a* . On voit tout de suite que cette notion est équivalente à celle de fonction différentiable au sens de Gâteaux-Lévy, dans le cas où X, Y sont des espaces normés.

2° \mathfrak{B} est formé par les bornés de X de dimension ≤ 2 . Nous dirons alors que $f(x)$ est *bi-différentiable en a* .

3° \mathfrak{B} est formé par les bornés de X de dimension finie. Nous dirons alors que $f(x)$ est *finiment différentiable en a* .

4° \mathfrak{B} est formé par tous les bornés de X . Nous dirons alors que $f(x)$ est *totalelement différentiable en a* . Il est aisé de voir que, dans le cas des espaces normés, cette notion coïncide avec celle de fonction différentiable au sens de Frechét (cf. [4]).

En général, quand $\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2$, la différentiabilité par rapport à \mathfrak{B}_1 implique la différentiabilité par rapport à \mathfrak{B}_2 (avec la même dérivée).

Remarque. – Si X se réduit au corps des scalaires, les notions considérées deviennent équivalentes. Dans ce cas, on définit la dérivée de $f(x)$ en a simplement comme la limite de $[f(a+h) - f(a)]/h$ lorsque $h \rightarrow 0$, si cette limite existe; et de même pour les dérivées d'ordre supérieur. Mais on peut démontrer alors que, si $f(x)$ admet dérivée seconde continue dans l'ouvert D , alors $f(x)$ est différentiable dans D (au sens ici considéré).

Le théorème des fonctions composées s'énonce maintenant de la façon suivante:

(1.3) Soient X, Y, Z trois espaces localement convexes, $F(y)$ une fonction définie dans un ouvert D^* de Y et prenant ses valeurs dans Z , $f(x)$ une fonction définie dans un ouvert D de X et prenant ses valeurs dans D^* . Si la fonction $f(x)$ est différentiable (\mathfrak{B}) en a et la fonction $F(y)$ est totalelement différentiable en $f(a)$, alors $F(f(x))$ est différentiable (\mathfrak{B}) en a , quel que soit \mathfrak{B} , et on peut écrire

$$\frac{d}{dx} [F(f(x))]_a = F'(f(a)) \cdot f'(a).$$

On en déduit aussitôt que, si la fonction $f(x)$ est totalelement différentiable en a , elle est différentiable en a au sens de Hadamard généralisé. Mais la réciproque n'est pas vraie (cf. [4] et [9]).

Une question importante à décider est celle de la continuité des fonctions différentiables. En employant une technique semblable à celle de la démonstration de la prop. 6 dans [3], on arrive à la conclusion suivante:

(1.4) Dans le cas où X est métrisable, on peut affirmer que, si la fonction $f(x)$ est totalelement différentiable en a , elle est continue en a .

Dans le cas général, on a le résultat suivant:

(1.5) Si $f(x)$ est différentiable (\mathfrak{B}) en a , $f(x) - f(a)$ est un infiniment petit avec $x - a$ (d'ordre supérieur à 0) par rapport à \mathfrak{B} .

Observons que, si $B_1 \subset B_2$, la topologie de $[B_1]$ est plus fine que la topologie induite dans $[B_1]$ par celle de $[B_2]$, et que la topologie naturelle de X est moins fine que la topologie de la limite inductive localement convexe des $[B]$, pour $B \in \mathfrak{B}$. Nous désignerons par $T_{\mathfrak{B}}^*$ cette topologie.

Mais il sera encore utile de considérer, au lieu de $T_{\mathfrak{B}}^*$, la topologie de la limite inductive topologique des $[B]$, c'est-à-dire la plus fine des topologies sur X qui induisent, dans chaque espace $[B]$, avec $B \in \mathfrak{B}$, une topologie moins fine que celle déterminée par la boule \hat{B} . Cette topologie, que nous désignerons par $T_{\mathfrak{B}}$ (plus fine que $T_{\mathfrak{B}}^*$), n'est pas nécessairement une topologie d'espace localement convexe. Dans le cas où \mathfrak{B} est formé par les bornés de dimension finie, on obtient de cette façon une topologie, disons T_0 , que l'on

pourrait nommer la *topologie finie*: les ensembles ouverts par rapport à T_0 ne sont que les ensembles *finiment ouverts*, considérés par l'école américaine (cf. [7], def. 4.3.1).

Or, on voit que, *si $f(x)$ est différentiable (\mathfrak{B}) dans l'ouvert D , $f(x)$ sera continue dans D par rapport à $T_{\mathfrak{B}}$.*

Dans plusieurs cas qui se présentent dans cette étude, on pourra élargir les hypothèses des propositions, en remplaçant la topologie naturelle de X par la topologie $T_{\mathfrak{B}}$. Par exemple, lorsqu'on parle de « ensemble ouvert », « voisinage de a », etc. on pourra souvent rapporter ces expressions à cette topologie – comme on le faisait déjà par rapport à la topologie finie, dans les espaces de Banach.

Il y a d'ailleurs certaines classes importantes d'espaces l. c., dont la topologie coïncide avec celle de la limite inductive topologique de tous les sous-espaces $[B]$, où B est un borné quelconque: par exemple, les espaces que nous avons étudiés dans [14], sous la désignation d'espaces (LN^) .*

En outre, on déduit de (1.4):

(1.6) *Si l'espace X est la limite inductive topologique d'une famille d'espaces métrisables, toute fonction $f(x)$ totalement différentiable dans un ouvert D de X est continue dans D .*

2. LA NOTION D'INTÉGRALE DE LIGNE. – Nous définirons maintenant une notion d'intégrale, en correspondance avec la notion antérieure de dérivée.

Tout en conservant les conventions précédentes, nous désignerons par $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires de X dans Y , bornées sur tout ensemble $B \in \mathfrak{B}$, avec la topologie de la convergence uniforme sur ces ensembles. En raisonnant comme dans la démonstration de la prop. 7 dans [3], on voit aussitôt que

(2.1) *Si Y est complet [resp. complet par rapport aux suites], l'espace $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ est aussi complet [resp. complet par rapport aux suites].*

Soit maintenant $F(x)$ une fonction définie dans une partie D de X et prenant ses valeurs dans $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$, c'est-à-dire telle que

$$F(x) \in \Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y) \quad \text{pour chaque } x \in D,$$

et soit C une *ligne orientée* de X , contenue dans D , définie paramétriquement par une fonction ponctuelle continue, $x = g(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Considérons une partition π de l'intervalle $[0, 1]$ au moyen d'une suite de points $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ et posons $x_i = g(t_i)$, $|\pi| = \max(t_i - t_{i-1})$, pour $1 \leq i \leq n$. Cela étant, nous appellerons *somme de Riemann de $F(x)$ relative à π* tout élément s_{π} de Y tel que

$$s_{\pi} = \sum_{i=1}^n F(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \text{avec } \bar{x}_i = g(\bar{t}_i), \quad t_{i-1} \leq \bar{t}_i \leq t_i.$$

D'autre part, δ étant un nombre positif, nous désignerons par S_δ l'ensemble de toutes les sommes s_π telles que $|\pi| < \delta$. La famille $\{S_\delta\}$ de ces ensembles est manifestement une base de filtre sur Y . Nous nommerons *ensemble intégrale de $F(x)$ sur C* l'adhérence de ce filtre (cf. [1], p. 49) et nous désignerons cet ensemble par le symbole

$$\int_C^\wedge F(x) dx.$$

On reconnaît facilement que cet ensemble ne dépend pas du paramétrage de C , mais seulement de l'orientation de cette ligne. Nous dirons que $F(x)$ est *intégrable sur C* si la base de filtre $\{S_\delta\}$ est convergente. Sa limite sera dite alors *l'intégrale de $F(x)$ sur C* et on écrira

$$\int_C F(x) dx = \lim \{S_\delta\} = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} s_\pi.$$

On voit de même que, si l'espace Y est complet par rapport aux suites, cette intégrale existe, si (et seulement si) le filtre engendré par $\{S_\delta\}$ est un filtre de Cauchy.

Soient maintenant $F_1(x)$, $F_2(x)$ deux fonctions définies dans D et prenant leurs valeurs dans $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$. On démontre aisément la règle suivante:

(2.2) Si $F_1(x)$ est intégrable sur C , on aura

$$\int_C^\wedge [F_1(x) + F_2(x)] dx = \int_C^\wedge F_1(x) dx + \int_C^\wedge F_2(x) dx.$$

Quant à l'intégrabilité des fonctions continues, la question devient un peu nuancée dans les espaces localement convexes. Nous disons que la fonction $F(x)$ est *continue sur C* , si la fonction $F(g(t))$ est continue sur $[0, 1]$. Posons d'autre part $a = g(0)$, $b = g(1)$; nous disons que la ligne C est *rectifiable* dans X (par rapport à la topologie de cet espace), si, pour toute semi-norme $p(x)$ continue sur X , la fonction $g(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) résulte à variation bornée. Il est aisé de voir que, si la ligne C est rectifiable dans X et s'il existe un ensemble $B \in \mathfrak{B}$ tel que la fonction $g(x)$ — a prend ses valeurs dans $[B]$ et est continue par rapport à la topologie de cet espace, alors C — a est rectifiable par rapport à la topologie de $[B]$. Quand ces conditions sont vérifiées, nous dirons simplement que C est *rectifiable* (\mathfrak{B}). Alors le théorème sur l'intégrabilité des fonctions continues prend la forme suivante:

(2.3) Soit C une ligne rectifiable (\mathfrak{B}) et soit Y un espace complet par rapport aux suites. Alors, si $F(x)$ est continue sur C , $F(x)$ est intégrable sur C .

3. LES RAPPORTS ENTRE LA DÉRIVÉE ET L'INTÉGRALE. — Considérons trois espaces U , X , Y , un ensemble \mathfrak{B} de bornés de X et un ensemble \mathfrak{B}^* de bornés de U , vérifiant les conditions indiquées au n. 1. Soit encore $F(x)$

une fonction définie dans l'ensemble DCX et prenant ses valeurs dans $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$; et soit $\varphi(u)$ une fonction définie et continue dans un ensemble $D^* \subset U$ et prenant ses valeurs dans D . Soit d'autre part Γ une ligne de D^* , rectifiable (\mathfrak{B}^*), définie par la fonction continue $u = \gamma(t)$, et soit C l'image de Γ par φ , c'est-à-dire:

$$C = \varphi(\Gamma), \quad \text{en posant } g(t) = \varphi(\gamma(t)) \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Par une technique semblable à celle qui nous a permis de démontrer le th. [3.1] dans [12], on établit, dans ces conditions, le théorème suivant:

(3.1) *Si la fonction $F(x)$ est intégrable et bornée sur C et que la fonction $\varphi(u)$ soit différentiable (\mathfrak{B}^*) dans D , on a*

$$\int_C F(x) dx \in \int_{\Gamma} F(\varphi(u)) \varphi'(u) du.$$

Naturellement, si $F(\varphi(u)) \varphi'(u)$ est intégrable sur Γ on obtient dans ces conditions une formule pour le changement des variables (en remplaçant le signe « \in » par « $=$ »); en particulier, si U est la droite réelle, on ramène ainsi l'intégrale de ligne à une intégrale d'une fonction de variable réelle.

En échangeant les rôles des variables, on déduit de ce théorème le corollaire suivant:

(3.2) *Si la fonction $f(x)$, définie dans l'ouvert D de X et à valeurs dans Y , est différentiable (\mathfrak{B}) dans D , on aura, pour toute ligne C rectifiable (\mathfrak{B}), d'extrêmes a, b , contenue dans D :*

$$f(b) - f(a) \in \int_C f'(x) dx.$$

Ce théorème remplace, dans les espaces localement convexes, le théorème élémentaire des accroissements finis. On en déduit que, si $F(x)$ est la dérivée d'une fonction $f(x)$ différentiable (\mathfrak{B}) dans D , l'intégrale de $F(x)$ sur une ligne C contenue dans un ensemble $B \in \mathfrak{B}$ (si cette intégrale existe) ne dépend que des limites a, b d'intégration: elle est égale à $f(b) - f(a)$.

En général, toutes les fois qu'une intégrale de ligne, dans les cas où elle existe, ne dépend que des limites a, b d'intégration, nous la désignerons par le symbole

$$\int_a^b F(x) dx.$$

Supposons maintenant, par commodité, que l'ensemble D est *simplement connexe*. Alors on a la généralisation suivante du *théorème fondamental du calcul intégral*:

(3.3) *S'il existe l'intégrale de $F(x)$ au moins sur toute ligne polygonale P contenue dans D et si cette intégrale ne dépend que des extrêmes de cette ligne, la fonction $f(x)$ définie par la formule*

$$f(x) = \int_a^x F(\bar{x}) d\bar{x}, \quad \text{en fixant } a \text{ dans } D,$$

est différentiable (\mathfrak{B}) en tout point x de D tel que $F(x) - F(x_0)$ soit un infiniment petit avec $x - x_0$ par rapport à \mathfrak{B} . Alors on a

$$f'(x_0) = F(x_0).$$