

ATTI  
DELLA  
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLIII

1956

---

SERIE OTTAVA

---

RENDICONTI

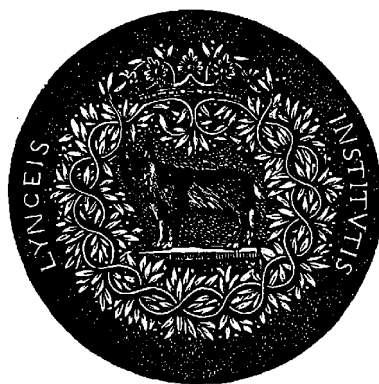
---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

VOLUME XXI

(2° semestre 1956)



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1956

**Matematica.** — *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes.* Nota II (\*) di J. SEBASTIÃO E SILVA, presentata (\*\*) dal Socio M. PICONE.

4. DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR. — Considérons  $n + 1$  espaces localement convexes  $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$  et, dans chaque espace  $X_i$ , un ensemble  $\mathfrak{B}_i$  de bornés de  $X_i$  vérifiant les conditions indiquées au n. 1. Désignons par  $\mathbf{X}$  l'espace produit  $\prod_i X_i$  et par  $\mathbf{B}$  l'ensemble des bornés  $B_1 \times \dots \times B_n$  de  $\mathbf{X}$ , avec  $B_i \in \mathfrak{B}_i$ . Nous représenterons par  $\Lambda(\mathbf{X}; Y)$  l'espace vectoriel des fonctions multilinéaires  $G(x_1, \dots, x_n)$  définies dans  $\mathbf{X}$  et prenant leurs valeurs dans  $Y$ . Par le symbole

$$\Lambda_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}; Y) \quad [\text{ne pas confondre avec } \Lambda_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}, Y)]$$

nous désignerons le sous-espace de  $\Lambda(\mathbf{X}; Y)$  constitué par les fonctions  $G(x_1, \dots, x_n)$  qui sont bornées sur tout ensemble  $B \in \mathbf{B}$ , cet espace étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles  $B \in \mathbf{B}$ .

Nous supposerons maintenant  $X_1 = \dots = X_n$  et  $\mathfrak{B}_1 = \dots = \mathfrak{B}_n = \mathfrak{B}$ ; alors  $\mathbf{X} = X^n$ . Posons

$$Y^{(0)} = Y, \quad Y^{(n)} = \Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y^{(n-1)}), \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

(\*) Cette Note est la continuation d'une autre avec le même titre publiée dans ces « Rendiconti », 8, XX, pp. 743-750.

(\*\*) Nella seduta del 12 maggio 1956.

Alors on démontre que, si l'on pose pour tout  $\Theta \in Y^{(n)}$ :

$$\hat{\Theta}(h_1, \dots, h_n) = (((\Theta h_1) h_2) \dots) h_n, \quad \text{pour } h_1, \dots, h_n \in X,$$

la correspondance  $\Theta \leftrightarrow \hat{\Theta}$  est un isomorphisme entre les espaces vectoriels topologiques  $Y^n$  et  $\Lambda_{\mathbf{B}}(X^n; Y)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (cf. [12], pp. 20, 21). Nous pourrions donc identifier  $\Theta$  avec  $\hat{\Theta}$ . Pour  $h_1 = \dots = h_n = h$ , nous écrivons

$$\Theta \cdot h^{[n]} \text{ comme abbréviation de } \Theta(h, \dots, h).$$

Cela étant, reprenons la fonction  $f(x)$  définie dans l'ouvert  $D$  de  $X$ , à valeurs dans  $Y$ , et soit  $a$  un point de  $D$ . Nous dirons que  $f(x)$  est *une fois différentiable* ( $\mathfrak{B}$ ) *en*  $a$ , si elle est différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) en  $a$ ; et nous poserons  $f^{(1)}(a) = f'(a)$ . Cela étant, nous dirons, pour  $n = 2, 3, \dots$ , que  $f(x)$  est  *$n$  fois différentiable* ( $\mathfrak{B}$ ) *en*  $a$ , si  $f(x)$  est  $n - 1$  fois différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans un voisinage de  $a$  et  $f^{(n-1)}(x)$  est différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) en  $a$ ; nous désignerons alors par  $f^{(n)}(a)$  (*dérivée d'ordre  $n$  de  $f(x)$  en  $a$* ) la dérivée de  $f^{(n-1)}(x)$  en  $a$ ; il est évident que  $f^{(n)}(a) \in Y^{(n)}$ . Nous pouvons donc envisager  $f^{(n)}(a)$  comme opérateur multilinéaire, élément de  $\Lambda_{\mathbf{B}}(X^n; Y)$ . On a en outre le résultat suivant:

(4.1) *Si  $f(x)$  est  $n$  fois bi-différentiable en  $a$ , sa dérivée d'ordre  $n$  en  $a$ , considérée comme élément de  $\Lambda(X^n; Y)$ , est un opérateur symétrique, c'est-à-dire, la valeur de*

$$F^{(n)}(a)(h_1, h_2, \dots, h_n), \quad \text{pour } h_1, \dots, h_n \in X,$$

*ne dépend pas de l'ordre de  $h_1, h_2, \dots, h_n$ .*

La démonstration est essentiellement la même que l'on donne dans le cas des espaces normés (cf. [12], pp. 25-26). Il convient de souligner que, pour la symétrie de l'opérateur  $f^{(n)}(a)$ , il suffit que  $f(x)$  soit  $n$  fois différentiable en  $a$  par rapport aux bornés de dimension 2. Observons encore que

(4.2) *Quels que soient  $\Theta \in Y^{(n)}$  et  $p = 1, 2, \dots$ , la fonction  $\Theta x^{[n]}$  est  $p$  fois différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $X$ . Si en outre  $\Theta$  est symétrique, on a*

$$\frac{d^p}{dx^p}(\Theta x^{[n]}) = n(n-1) \dots (n-p+1) \Theta x^{[n-p]}, \text{ pour } p \leq n.$$

5. FORMULE DE TAYLOR. RAPPORT ENTRE LES DIFFÉRENCES FINIES ET LES DIFFÉRENTIELLES. — Considérons encore la fonction  $f(x)$  définie dans  $DC X$  et prenant ses valeurs dans  $Y$ . Les propositions (2.2), (3.2) et (4.2) nous permettent d'établir aisément le résultat suivant:

(5.1) *Si  $f(x)$  est  $n$  fois différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) en  $a$ , on aura, dans un voisinage convenable de  $a$ , le développement de Taylor généralisé*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) h^{[i]} + R(h),$$

où  $R(h)$  est un infiniment petit avec  $h$ , d'ordre supérieur à  $n$  par rapport à  $\mathfrak{B}$ .

Avec l'hypothèse que  $f(x)$  soit  $n$  fois différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans un voisinage  $V$  quelconque de  $a$ , la formule de Taylor prend la forme suivante, généralisation de (3.2):

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(a) h^{[i]} + \int_{\Gamma}^{\wedge} f^{(n)}(x) (h-x)^{[n-i]} dx,$$

où  $\Gamma$  est une ligne quelconque, d'extrêmes  $a, a+h$ , contenue dans  $V$  et rectifiable ( $\mathfrak{B}$ ). (En particulier,  $\mathfrak{B}$  peut se réduire aux bornés de dimension 1).

Posons, comme d'habitude,  $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ ,  $\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h(\Delta_h f(x))$ , etc. De (5.1) on déduit alors, avec l'hypothèse de cette proposition, que la différence

$$\Delta_h^n f(a) - f^{(n)}(a) h^{[n]}$$

est un infiniment petit avec  $h$ , d'ordre supérieur à  $n$ , par rapport à  $\mathfrak{B}$ .

6. THÉORÈME DE LA DIFFÉRENTIELLE EXACTE. - Soit  $D$  un ouvert de  $X$ . Nous dirons que  $D$  est *non percé*, si, pour toute ligne polygonale  $P$ , simple et fermée, contenue dans  $D$ , il existe au moins une surface polyédrique de contour  $P$ , contenue dans  $D$ , qui soit homéomorphe à un cercle (disque) du plan <sup>(1)</sup>.

Soit maintenant  $F(x)$  une fonction définie dans l'ouvert  $D$  de  $X$  et prenant ses valeurs dans  $\Lambda_{\mathfrak{B}}(X, Y)$ . Par un raisonnement semblable à celui de Goursat, dans sa démonstration du théorème de Cauchy sur les fonctions holomorphes (cf. [12], pp. 40-41), on démontre le théorème suivant:

(6.1) *Supposons que la fonction  $F(x)$  est différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$  et que, pour tout  $x \in D$ , la dérivée  $F'(x)$  de  $F(x)$ , considérée comme élément de  $\Lambda(X^2; Y)$ , est un opérateur symétrique. Alors, si  $D$  est non percé et si  $\mathfrak{B}$  contient au moins les bornés de dimension 2, on peut affirmer que*

$$\int_C F(x) dx = 0$$

*pour toute ligne  $C$ , fermée et rectifiable ( $\mathfrak{B}$ ), contenue dans  $D$ .*

Il en découle, avec les mêmes hypothèses, que:

(6.2) *Si, en outre,  $Y$  est complet par rapport aux suites, on peut affirmer qu'il existe une fonction  $f(x)$  différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ , telle que  $f(x) = F(x)$  sur  $D$ , cette fonction étant donnée, dans chaque composante  $D_i$  de  $D$ , par la formule*

$$f(x) = \int_{c_i}^x F(x) dx,$$

*en fixant arbitrairement  $c_i$  dans  $D_i$ .*

C'est là une conséquence immédiate de (6.1), (3.3) et (1.5).

(1) Nous considérons seulement des lignes polygonales avec un nombre fini de côtés et de surfaces polyédriques avec un nombre fini de faces.

7. DÉRIVÉES PARTIELLES; THÉORÈME DE SCHWARZ GÉNÉRALISÉ. — Considérons  $n + 1$  espaces  $X_1, \dots, X_n, Y$ , et, dans chaque espace  $X_i$ , une classe  $\mathfrak{B}_i$  de bornés. (Nous adoptons encore ici les notations du n. 4). Soit d'autre part  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  une fonction définie dans un ouvert  $D$  de l'espace  $\mathbf{X} = \prod_i X_i$  et prenant ses valeurs dans  $Y$ . Les notions de différentiabilité partielle et de dérivée partielle s'introduisent ici d'une façon tout à fait semblable à celle classique, avec les mêmes notations; on trouve aussitôt le résultat suivant:

(7.1) Si  $f(\mathbf{x})$  est différentiable ( $\mathbf{B}$ ) en un point  $\mathbf{a}$  de  $\mathbf{X}$ , alors cette fonction est différentiable ( $\mathfrak{B}_i$ ) en  $\mathbf{a}$  par rapport à  $x_i$ , quel que soit  $i = 1, 2, \dots, n$ , et on a précisément

$$f'(\mathbf{a})(h_1, \dots, h_n) = f'_{x_1}(\mathbf{a})h_1 + \dots + f'_{x_n}(\mathbf{a})h_n$$

pour tout élément  $(h_1, \dots, h_n)$  de  $\mathbf{X}$ .

Limitons-nous maintenant au cas d'une fonction  $f(x, y)$  des deux variables  $x, y$  définie dans un ouvert  $D$  de  $X \times Y$  et prenant ses valeurs dans un autre espace  $Z$ . Étant donné un opérateur bilinéaire  $\Theta$  défini dans  $X \times Y$ , nous appelons *opérateur conjugué* de  $\Theta$ , et nous désignons par  $\overleftarrow{\Theta}$ , l'opérateur défini par la condition

$$\overleftarrow{\Theta}(h, k) = \Theta(k, h), \quad \text{pour } h \in X, k \in Y.$$

Cela étant, par un raisonnement semblable à celui classique, en remplaçant le théorème des accroissements finis par le th. (3.1), on parvient à la généralisation suivante du théorème de Schwarz:

(7.1) Supposons que la fonction  $f(x, y)$  est uni-différentiable par rapport à  $x$  et uni-différentiable par rapport à  $y$  dans un voisinage de  $(a, b) \in D$ . Supposons en outre que la fonction  $f'_x(x, y)$  est uni-différentiable par rapport à  $y$  dans un voisinage de  $(a, b)$  et que la différence  $f''_{xy}(x, y) - f''_{xy}(a, b)$  est un infiniment petit avec  $(x - a, y - b)$  par rapport à tous les bornés de  $X \times Y$ . Alors la fonction  $f'_y(x, y)$  est totalement différentiable par rapport à  $(x, y)$  au point  $(a, b)$  et on a

$$f''_{yx}(a, b) = \overleftarrow{f''_{xy}}(a, b).$$

8. FONCTIONS ANALYTIQUES — Nous supposerons maintenant que le corps des scalaires, pour les espaces  $X, Y, \dots$  considérés, est le corps complexe,  $\mathbb{C}$ . Soit encore  $f(x)$  une fonction définie dans un ouvert  $D$  de  $X$  et prenant ses valeurs dans  $Y$ . Le concept le plus général de fonction analytique qui se présente dans la littérature courante est celui de Gâteaux (généralisé): On dit que  $f(x)$  est analytique dans  $D$  au sens de Gâteaux généralisé (ou G-analytique), si  $f(x + \lambda h)$  est une fonction holomorphe de la variable complexe  $\lambda$  pour tout  $x \in D$  et tout  $h \in X$ . Il est aisé de voir que

(8.1) Si  $f(x)$  est  $G$ -analytique dans  $D$ ,  $f(x)$  est finiment différentiable en tout point de  $D$  et réciproquement; et de même pour  $f'(x), f''(x), \dots$ . On a alors le développement en série de Taylor généralisée

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) h^{[n]},$$

pour tout  $x \in D$  et tout  $h$  appartenant à un voisinage de 0 (cf. [7], p. 71-74; le passage des espaces de Banach aux espaces l. c. quelconques n'offre aucune difficulté).

En général, étant donné un ensemble  $\mathfrak{B}$  de bornés de  $X$  vérifiant les conditions indiquées au n. 1, nous employerons maintenant l'expression « analytique ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$  » comme synonyme de « différentiable ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$  » (nous supposons que  $X, Y$  sont des espaces vectoriels complexes!).

Dans le cas où  $Y$  vérifie la seconde condition de dénombrabilité de Mackey (cf. [3], p. 77), on a le critère suivant, assez simple:

(8.2) Pour que  $f(x)$  soit analytique ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ , il faut et il suffit que, pour tout  $x \in D$ , la fonction de  $h$

$$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}$$

soit uniformément convergente sur tout  $B \in \mathfrak{B}$ , lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

Nous dirons que  $f(x)$  est localement bornée dans  $D$  par rapport à  $\mathfrak{B}$ , si, pour tout  $x \in D$ , il existe un scalaire  $\lambda \neq 0$  tel que  $f(x)$  soit bornée dans  $x + \lambda B$ . Compte tenu des propriétés des fonctions vectorielles analytiques d'une variable complexe, on généralise de la façon suivante le résultat de Hille concernant les fonctions localement bornées:

(8.3) La classe des fonctions analytiques ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$  coïncide avec la classe des fonctions  $G$ -analytiques dans  $D$  et localement bornées dans  $D$  par rapport à  $\mathfrak{B}$ .

C'est ce résultat qui justifie notre définition de différentiabilité. D'ailleurs, il permet de démontrer (8.2), ainsi que d'autres propositions, avec la seule hypothèse supplémentaire que  $Y$  vérifie la seconde condition de dénombrabilité de Mackey.

On voit en même temps que:

(8.4) Si  $f(x)$  est analytique ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ , toutes ses dérivées  $f'(x), f''(x), \dots$  seront aussi analytiques ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ .

Nous avons établi l'unicité du prolongement analytique déjà dans [13] th. (8.1), même pour les fonctions  $G$ -analytiques. En outre:

(8.5) Soit  $f_k(x)$  une suite de fonctions analytiques ( $\mathfrak{B}$ ) et localement uniformément bornées par rapport à  $\mathfrak{B}$ . Alors, si  $D$  est connexe et si  $\lim_k f_k(x)$  existe dans un ouvert  $A \subset D$ , cette suite converge partout dans  $D$  vers une fonction  $f(x)$  analytique ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$ .

Ce théorème, et d'autres que l'on pourrait signaler encore, sont des généralisations faciles des théorèmes correspondants pour les espaces normés (cf. [7]).

Le concept de fonction analytique est naturellement lié à celui de série de Taylor. Nous appellerons *série de puissances* ( $\mathfrak{B}$ ) de  $x$  toute expression du type

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{[n]}, \quad \text{où } A_0 \in Y, A_n \in Y_{\mathfrak{B}}^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad \text{et } x^{[0]} = 1;$$

les fonctions  $A_n x^{[n]}$  seront appelées *puissances* ( $\mathfrak{B}$ ) de  $x$ .

De (8.4) on déduit que toute fonction analytique ( $\mathfrak{B}$ ) dans  $D$  est représentable, dans un voisinage de chaque point  $a$  de  $D$ , par une série de puissances ( $\mathfrak{B}$ ) de  $x - a$ .

La réciproque est vraie, si  $Y$  vérifie la seconde condition de dénombrabilité de Mackey. On obtient alors une généralisation intéressante du théorème (4.7.4) démontré dans [7].

Dans [11] et [13] nous avons généralisé la notion de fonctionnelle analytique de Fantappiè de la façon suivante:

(8.6) On dit que  $f(x)$  est *analytique dans  $D$  au sens de Fantappiè généralisé*, si, pour toute fonction analytique  $g(\lambda)$ , de la variable complexe  $\lambda$ , à valeurs dans  $D$ ,  $F(g(\lambda))$ , est aussi une fonction analytique de  $\lambda$ .

Or, dans le cas où  $Y$  vérifie la seconde condition de dénombrabilité de Mackey, on a ce résultat remarquable:

(8.7) *Toute fonction analytique au sens de Fantappiè généralisé est totalement analytique.*

La réciproque est vraie, naturellement, même dans le cas général. Pour la démonstration de (8.7) on doit observer que la topologie de  $X$  induit dans chaque espace  $[B]$ , où  $B$  est un borné quelconque de  $X$ , une topologie moins fine que celle déterminée par la boule  $\hat{B}$ .

Observons encore que les propositions (1.4) et (1.6) permettent de généraliser nos résultats présentés dans [13], sur la continuité des fonctions analytiques au sens de Fantappiè généralisé.

## BIBLIOGRAPHIE.

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. I-II, « Act. Scient. Ind. » n. 846-1141, Paris (1934).
- [2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. I-II, « Act. Scient. Ind. », n. 1189, Paris (1953).
- [3] J. DIEUDONNÉ et L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces (F) et (L F)*, « Ann. Inst. Fourier », 1, pp. 61-101 (1949).
- [4] M. FRÉCHET, *Sur la notion de différentielle dans l'analyse générale*, « Journ. Math. Pures Appl. », T. 16, pp. 233-250 (1937).
- [5] L. M. GRAVES, *Riemann integration and Taylor theorem in general analysis*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 29, pp. 163-177 (1927).
- [6] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces (F) et (DF)*, « Summa Brasiliensis Math. », vol. 3, pp. 57-122 (1954).
- [7] E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », New-York (1948).

- [8] M. KERNER, *Differentiale in allgemeinen Analysis*, « Ann. of Math. », Vol. 34, pp. 546–572 (1933).
- [9] KY FAN, *Sur quelques notions fondamentales de l'analyse générale*, « Jour. Math. Pures Appl. », t. 21, pp. 289–368 (1942).
- [10] E. R. LORCH, *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*, « Trans. Amer. Math. Soc. », 54, pp. 414–425 (1943).
- [11] J. SEBASTIÃO E SILVA, *As funções analíticas e a análise funcional*, Thèse 1948 (Port. Math., 1950).
- [12] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Integração e derivacão em espaços de Banach*, « Rev. Fac. Ciencias », Lisboa, 2ª Série, Vol. I (1950).
- [13] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, « Port. Math. », vol. 12, pp. 1–46, (1953).
- [14] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi*, « Rend. Mat. e Applic. », serie V, vol. XIV, Roma, pp. 388–410 (1955).
- [15] A. E. TAYLOR, *Analytic functions in general analysis*, « Ann. Scuola Norm. Sup. », Pisa, serie 2, vol. 6, pp. 277–292 (1937).
- [16] J. VALIRON, *Théorie des fonctions*, Masson, Paris (1948).
- [17] M. A. ZORN, *Derivatives and Fréchet differentials*, « Bull. Amer. Math. Soc. », vol. 52, pp. 133–137 (1946).