

PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 14

1 9 5 5

Publicação subsidiada por

Publication subventionnée par

Publication sponsored by

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA e SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Edição de

«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua de Serpa Pinto, 17, 4.º-E.
LISBOA (PORTUGAL)

HERMANN & C.^{ie}, Editeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5^{eme})

LE CALCUL OPÉRATIONNEL AU POINT DE VUE DES DISTRIBUTIONS *

PAR J. SEBASTIÃO E SILVA

Lisbonne

Introduction. Ce travail se place dans la ligne de recherches que nous avons suivie dans [19], [20], [21] et [23] ⁽¹⁾.

On sait que le calcul opérationnel basé sur des formules telles que

$$\varphi(\Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - \Theta} d\lambda$$

a été déjà envisagé par POINCARÉ, dans un mémoire sur les groupes continus. C'est un calcul opérationnel de ce type que M. FANTAPPIÉ a fondé, à l'aide de sa théorie des fonctionnelles analytiques, et qui a reçu, à la suite de travaux de I. GELFAND, E. R. LORCH, A. E. TAYLOR et N. DUNFORD, une formulation abstraite, plaçant les opérateurs Θ dans le cadre des applications linéaires continues d'un espace de BANACH dans lui-même (voir [6], [24] ou [11], pp. 116-126).

Dans [19], [20] et [21], nous avons apporté certains perfectionnements à ce calcul opérationnel, en employant notre systématisation de la théorie des fonctionnelles analytiques, qui a été complètement incorporée dans la théorie des espaces localement convexes, après les travaux de MM. KÖTHE, GROTHENDIECK et SILVA DIAS (cf. [12]).

Dans la généralisation du calcul opérationnel, que nous avons présentée dans [21], les opérateurs Θ considérés sont déjà des applications linéaires continues d'un espace localement convexe E quelconque, dans lui-même, pourvu que cet espace soit complet par rapport aux suites de CAUCHY.

Depuis 1946, nous cherchions à établir la connexion entre ce calcul opérationnel et les méthodes basées sur la transformation de LAPLACE, simple ou multiple. Mais, pour y réussir, il nous manquait un outil essentiel, qui venait alors d'être créé, mais dont

* Reçu le 30 Septembre 1955.

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie.

nous n'avons pris connaissance que plus tard : la théorie des distributions. Il nous fallait, d'autre part, élargir le concept d'espace fonctionnel analytique, de façon à embrasser le cas de ces fonctions holomorphes qui sont des images de LAPLACE de distributions. Plus précisément, on devait caractériser, algébriquement et topologiquement, d'une part, l'espace des distributions *laplacisables*, et, d'autre part, l'espace de leurs images par la transformation de LAPLACE, de façon à rendre *bicontinue* cette transformation.

La première partie de cette tâche était déjà effectuée par M. L. SCHWARTZ (cf. [17] et [18]) ; nous y avons seulement ajouté une définition *directe* de la structure algébrique et topologique, sans avoir recours à l'espace dual. De même, l'ensemble des images de LAPLACE des distributions (que nous désignons ici par \mathfrak{Q}_ω) était parfaitement déterminé par MM. LIONS et SCHWARTZ (cf. [17]). Il restait à résoudre la question topologique.

Avec le présent travail nous croyons avoir atteint notre but, dans le cas d'une seule variable. La généralisation de ces résultats au cas de plusieurs variables fera l'objet d'un travail de M. MIGUEL DA SILVEIRA, à paraître bientôt.

Naturellement, le calcul opérationnel dont il est question ici est beaucoup plus général que la méthode de la transformation de LAPLACE. Celle-ci concerne uniquement le cas de l'opérateur D de dérivation, tandis que notre calcul opérationnel est applicable à une classe très étendue d'opérateurs linéaires. Parmi ces opérateurs, ceux qui se présentent d'abord à l'esprit, après l'opérateur D , sont ceux de VOLTERRA, c'est-à-dire les opérateurs Θ du type

$$\Theta f = \int_a^x \theta(x, y) f(y),$$

dont l'opérateur d'intégration est un cas particulier et qui interviennent dans la résolution des équations à coefficients variables. Évidemment, ce ne sont pas ces opérateurs, mais leurs inverses à gauche, qui doivent jouer le rôle correspondant à celui de D . D'ailleurs, le problème de l'inversion des opérateurs de VOLTERRA, au moins dans certains cas, exigera peut-être des extensions formelles des espaces fonctionnels, de même que l'inversion de l'opérateur d'intégration a exigé la construction de l'espace des distributions.

Lorsqu'on applique la formule générale du calcul opérationnel (voir th. 2, n.º 6) au cas de l'opérateur D restreint à l'espace des distributions de support limité à gauche, on retrouve la *formule d'in-*

version complexe de la transformation de LAPLACE [voir n.º 8, (8.1) et (8.2)]. D'ailleurs, on parvient, d'une façon naturelle, à une caractérisation de la transformation de LAPLACE, semblable à celles qui ont été obtenues par MM. DOETSCH et SAN JUAN, dans le cas où les éléments laplacisables sont des fonctions appartenant à certains espaces (cf. [3], [4], [14] et [15]); mais maintenant, les éléments laplacisables étant des distributions, la caractérisation s'effectue d'une façon presque immédiate. Ce fait, joint à d'autres simplifications importantes, que l'on pourra constater, montre que les distributions (laplacisables) forment le cadre naturel de la théorie de la transformation de LAPLACE.

*

* *

Nous comptons aborder prochainement l'étude de ce calcul opérationnel, en ce qui concerne ses applications à la résolution de plusieurs types d'équations fonctionnelles. Mais on peut d'ores et déjà prévoir un changement radical de point de vue, qui nous rapproche de la méthode naïve des pionniers du calcul symbolique. Il ne s'agit plus d'appliquer la transformation de LAPLACE aux deux membres de chaque équation, ce qui exige que le terme connu, ainsi que les inconnues, soient laplacisables (par rapport à une variable). Il s'agit maintenant, comme jadis, de *réaliser* certaines fonctions de D ; mais on a maintenant une idée précise de ce que l'on doit entendre par cette *réalisation*, suivant l'ordre d'idées qui conduit au théorème 2 et à ses conséquences.⁽¹⁾ En particulier, on évite les deux « hypothèses » classiques, concernant la permutabilité de la transformation de LAPLACE avec les dérivations et avec les passages aux limites.

Considérons, pour fixer les idées, le cas d'une équation aux dérivées partielles

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\varphi = f$$

à coefficients *indépendants de t* . Par un procédé typique de tronquement, faisant intervenir les conditions initiales (pour $t = 0$, par exemple), on réussit à remplacer⁽²⁾ l'inconnue φ par une distribution

(1) C'est là déjà l'esprit de la méthode de M. FANTAPPIÈ, dont le caractère restrictif est dû en partie à l'absence d'une théorie des distributions.

(2) On suppose que f et φ sont, pour toute valeur de x , des distributions de t que nous appelons « distributions de HEAVISIDE » (cf. [9]).

$\bar{\varphi}$, de support limité à gauche par rapport à t , ce qui entraîne seulement une modification de f . On peut alors concevoir l'inconnue $\bar{\varphi}$ comme une fonction (ou une distribution) de x , prenant ses valeurs dans l'espace des distributions de t de support limité à gauche, et interpréter le symbole $\frac{\partial}{\partial t}$ comme notre opérateur D , appliqué à ces

distributions. L'équation proposée devient ainsi une équation différentielle par rapport à la seule variable x (qui peut bien être un système de variables numériques). On résout cette équation symbolique, en tenant compte des valeurs aux limites et en appliquant le calcul opérationnel relatif à D , d'une façon automatique.

Ce nouveau point de vue élargit d'une part le domaine des solutions possibles (par rapport à t) et le rétrécit d'autre part (par rapport à x). Mais les restrictions introduites nous semblent assez faibles et permettraient de contrôler parfaitement les questions d'unicité, par une analyse préalable, générale, des équations symboliques, au moyen de la méthode de la variation des constantes arbitraires. D'ailleurs, il serait facile de distinguer, parmi les solutions, celles qui le sont au sens usuel, tout en évitant la vérification directe.

Mais c'est là seulement une esquisse, bien entendu.

Dans le cas des équations du 2^{d} ordre du type hyperbolique, comme celle des télégraphistes, les fonctions de D , que l'on doit considérer, appartiennent à l'espace $\tilde{\mathfrak{A}}_{\omega}$ des images de LAPLACE généralisées (n.º 10). Mais, dans le cas elliptique, on a à faire à des fonctions telles que $\sin D$, $\cos D$, etc., qui n'appartiennent pas à $\tilde{\mathfrak{A}}_{\omega}$; on est alors conduit à une extension de cet espace et à une extension isomorphe de l'espace des distributions laplacisables, qui nous fait sortir du cadre des distributions. Ces «ultra-distributions» auraient un caractère analogue à celui des «Randverteilungen» de M. KÖTHE. Il s'agit là d'une question très délicate, que nous nous limitons à effleurer dans le n.º 11 et dans la NOTE FINALE.

1. L'espace \mathfrak{A}_{ω} des fonctions holomorphes à croissance lente à droite. Pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$, nous désignerons par \mathfrak{A}_k l'espace des fonctions complexes $\varphi(z)$ de la variable complexe z , telles que $\varphi(z)/z^k$ soit une fonction continue bornée sur le demi-plan $\Re z \geq k$ et holomorphe pour $\Re z > k$; nous considérons \mathfrak{A}_k muni des notions usuelles de somme et de produit par scalaires et d'une topologia, \mathfrak{T}_k , au moyen de la norme suivante :

$$\|\varphi\|_k = \sup_{\Re z \geq k} \left| \frac{\varphi(z)}{z^k} \right|.$$

Il est aisé de voir qu'avec ces définitions l'application $\varphi(z) \rightarrow \varphi(z)/z^k$ est un isomorphisme de \mathfrak{A}_k sur l'espace (de BANACH) des fonctions continues bornées sur $\Re z \geq k$ et holomorphes pour $\Re z > k$.

PROPOSITION 1. *Quel que soit k , \mathfrak{T}_{k+1} induit dans \mathfrak{A}_k une topologie moins fine que \mathfrak{T}_k et la boule de \mathfrak{A}_k est relativement compacte par rapport à \mathfrak{T}_{k+1} .*

La première partie de la proposition est une conséquence immédiate du fait que $\|\varphi\|_{k+1} \leq \|\varphi\|_k$ pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{A}_k$.

Quant à la deuxième partie, il suffit d'employer le théorème de ASCOLI. La boule fermée de centre 0 et rayon 1 dans \mathfrak{A}_k est l'ensemble \mathfrak{B}_k des fonctions φ telles que

$$|\varphi(z)/z^k| \leq 1 \text{ pour } \Re z \geq k.$$

Alors, si l'on pose, $\psi(z) = \varphi(z)/z^{k+1}$, $\psi(\infty) = 0$, on en déduit

$$|\psi(z)| < \frac{1}{|z|} \text{ pour } \Re z > k, \varphi \in \mathfrak{B}_k,$$

et on voit que ces fonctions $\psi(z)$ sont équicontinues au point ∞ . D'autre part, puisque l'on a, pour $\Re z_0 > k+1$

$$\psi(z) - \psi(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\psi(\lambda)}{\lambda - z} - \frac{\psi(\lambda)}{\lambda - z_0} \right) d\lambda = \frac{z_0 - z}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda - z)(\lambda - z_0)} d\lambda,$$

où Γ est un cercle orienté de centre z_0 et rayon $\rho < \Re z_0 - k - 1$, on trouve, pour $|z - z_0| < \rho/2$:

$$|\psi(z) - \psi(z_0)| \leq \frac{|z - z_0|}{2\pi} \cdot \frac{2\pi\rho}{\rho \cdot \rho/2} = \frac{2}{\rho} |z - z_0|,$$

ce qui veut dire que les fonctions $\psi(z)$ considérées sont équicontinues en tout point propre z_0 intérieur au demi-plan $\Re z \geq k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$). Alors, en observant que ce demi-plan, accru du point ∞ , est un compact et que l'ensemble des fonctions $\psi(z)$ est borné, on arrive à la thèse.

Nous avons ainsi démontré que la suite \mathfrak{A}_k d'espaces normés est régulière. Sa limite inductive est donc un espace (\mathfrak{RN}^*) , d'après les définitions que nous avons introduites dans [22].

Nous désignerons par \mathfrak{A}_ω la limite inductive des espaces \mathfrak{A}_k et par \mathfrak{T}_ω la topologie de \mathfrak{A}_ω . Comme chaque élément de \mathfrak{A}_ω se représente par une fonction $\varphi(z)$ appartenant à un au moins des espaces \mathfrak{A}_k , nous appellerons encore fonctions les éléments de \mathfrak{A}_ω .

Tout ce que nous avons établi dans [22] sur les espaces $(\mathfrak{L}\mathfrak{N}^*)$ est donc applicable à l'espace \mathfrak{A}_ω . En particulier, on a le critère de convergence suivant :

Pour qu'une suite (φ_n) d'éléments de \mathfrak{A}_ω converge vers $\varphi_0 \in \mathfrak{A}_\omega$ il faut et il suffit qu'il existe un entier k tel que les fonctions $\varphi_n(z)/z^k$ soient holomorphes sur le demi-plan $\Re z > k$ et convergent uniformément vers $\varphi_0(z)/z^k$ dans ce demi-plan.

2. Quelques remarques sur les intégrales impropres de fonctions vectorielles. Il est déjà bien connu que l'on peut généraliser beaucoup de propriétés des fonctions ordinaires aux fonctions vectorielles d'une variable numérique. Nous nous bornerons à quelques remarques sur les intégrales impropres de telles fonctions.

Soit $f(t)$ une fonction définie et *continue* dans l'axe réel, \mathbf{R} , et prenant ses valeurs dans un espace vectoriel topologique \mathbf{E} , *localement convexe et complet pour les suites*. On pose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty} \int_x^y f(t) dt$$

lorsque la limite du second membre existe; et de même pour les symboles $\int_a^{+\infty} f(t) dt$, $\int_{-\infty}^a f(t) dt$, avec $a \in \mathbf{R}$. On établit aisément les résultats suivants :

(2.1) *Si, pour toute semi-norme $\|\dots\|$ continue sur \mathbf{E} , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t) dt\|$ existe, il en est de même pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ et on a $\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \right\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t)\| dt$ pour cette semi-norme.*

(2.2) *Pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ existe, il suffit qu'il existe un nombre $\alpha > 1$ tel que la fonction $t^\alpha \cdot f(t)$ soit bornée sur \mathbf{R} .*

(2.3) *Si la fonction $t^\alpha f(t)$, avec $\alpha \geq 2$, est bornée sur \mathbf{R} , on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(tg u) \sec^2 u du,$$

le et second membre est une intégrale propre de RIEMANN,

3. l'espace \mathfrak{A}_k^* . Pour tout $k = 0, 1, \dots$, nous désignons par \mathfrak{A}_k^* l'ensemble des éléments φ de \mathfrak{A}_k tels que $z\varphi(z)$ soit une fonction holomorphe bornée dans le demi-plan $\Re z > k$, et nous posons $\mathfrak{A}_\omega^* = \bigcup_0^\infty \mathfrak{A}_k^*$.

PROPOSITION 2. *L'ensemble \mathfrak{A}_ω^* est dense dans \mathfrak{A}_ω .*

Nous démontrerons même que tout élément φ de \mathfrak{A}_ω est la limite d'une suite d'éléments de \mathfrak{A}_ω^* . Soit $\varphi \in \mathfrak{A}_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$ et posons

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^k} \varphi(z) \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots.$$

On voit aussitôt que $\varphi_n \in \mathfrak{A}_{k-1}^*$ pour tout n . D'autre part on a

$$\frac{\varphi(z) - \varphi_n(z)}{z^{2k}} = \frac{\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{z^k}}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^k} \cdot \frac{\varphi(z)}{z^k}.$$

Puisque $\varphi \in \mathfrak{A}_k$, il existe $M > 0$, tel que

$$\left| \frac{\varphi(z)}{z^k} \right| < M \quad \text{pour } \Re z \geq k.$$

D'autre part, pour $\Re z \geq k$, on a $|z| \geq k \geq 1$ et, par suite,

$$\sup_{\Re z \geq k} \left| \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{n}\right)^k - \frac{1}{z^k} \right| = \sup_{\Re z \geq k} \left| \sum_{s=1}^k \binom{k}{s} \left(\frac{1}{n}\right)^s \left(\frac{1}{z}\right)^{k-s} \right| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1,$$

$$\inf_{\Re z \geq k} \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^k \right| = \inf_{\Re z \geq k} \frac{|z - (-n)|^k}{n^k} \geq \frac{k+n}{n}$$

d'où

$$\sup_{\Re z > k} \left| \frac{\varphi_n(z) - \varphi(z)}{z^{2k}} \right| \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1}{1 + \frac{k}{n}} M \rightarrow 0, \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

ce qui démontre le théorème.—Plus précisément, nous avons démontré le théorème suivant :

PROPOSITION 2a. *Quel que soit $k = 0, 1, \dots$, l'ensemble \mathfrak{A}_k^* est dense dans \mathfrak{A}_k , par rapport à la topologie \mathfrak{T}_{2k+2} .*

4. Représentation canonique des éléments de \mathfrak{A}_ω . Pour tout $k = 0, 1, \dots$, nous désignerons par C_k la droite $\Re z = k$ orientée vers la haut. Soit $\varphi \in \mathfrak{A}_k^*$, k quelconque. Alors, on établit, par des moyens tout à fait classiques :

$$(4.1) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{z - \lambda} d\lambda, \quad \text{pour } \Re z > k.$$

Observons que, pour toute valeur de λ finie, $(z - \lambda)^{-1}$ représente un élément de \mathfrak{A}_ω appartenant à \mathfrak{A}_k pour $k > \Re \lambda$. Nous désignerons par h l'application $\lambda \rightarrow (z - \lambda)^{-1}$ de la droite complexe \mathbf{C} dans \mathfrak{A}_ω c'est-à-dire, nous poserons

$$h(\lambda) = \frac{1}{z - \lambda}, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{C},$$

où le point sert à indiquer que z est une variable apparente.

Nous verrons que les vecteurs $h(\lambda)$, pour $\lambda \in \mathbf{C}$, forment une base de l'espace \mathfrak{A}_ω , c'est-à-dire qu'ils permettent de définir tout élément de \mathfrak{A}_ω en termes de «somme», «multiplicateurs scalaires» et «limite» — notions primitives de la structure \mathfrak{A}_ω . À cet effet, nous établirons encore quelques résultats préalables.

PROPOSITION 3. *La fonction vectorielle $h(\lambda)$ est une fonction entière; on a précisément*

$$h'(\lambda) = \frac{1}{(z - \lambda)^2}, \quad \text{quel que soit } \lambda \in \mathbf{C}.$$

En effet, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \frac{h(\lambda) - h(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{1}{(z - \lambda_0)^2} &= \frac{1}{(z - \lambda)(z - \lambda_0)} - \frac{1}{(z - \lambda_0)^2} \\ &= \frac{(\lambda - \lambda_0)}{(z - \lambda)(z - \lambda_0)^2}, \quad \text{pour tout } \lambda_0 \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Or, si l'on prend $k > \Re \lambda_0$, $\delta = k - \Re \lambda_0$, $\rho < \delta$, on trouve

$$\sup_{\Re z > k} \left| \frac{(\lambda - \lambda_0)}{(z - \lambda)(z - \lambda_0)^2} \right| < \frac{|\lambda - \lambda_0|}{|\delta - \rho| \delta^2}, \quad \text{pour } |\lambda - \lambda_0| < \rho$$

ce qui montre que

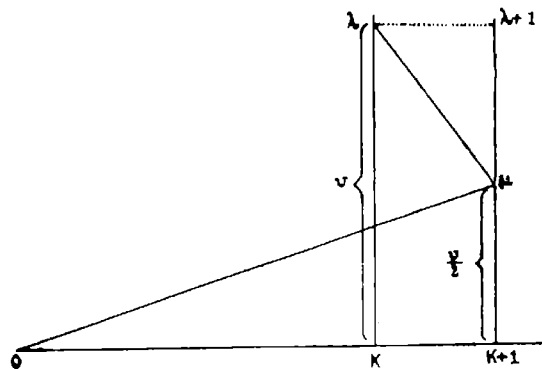
$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{h(\lambda) - h(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{1}{(z - \lambda_0)^2} \quad \text{c. q. f. d.}$$

PROPOSITION 4. La fonction $\lambda h(\lambda)$ est bornée sur tout demi-plan gauche, c. a. d., sur tout ensemble du type $\Re z \leq k$.

Pour la démonstration il convient de recourir à une figure.

Supposons $\lambda \leq k$, avec k arbitraire. Il suffit de démontrer que la fonction $\lambda h(\lambda)$ est alors bornée par rapport à la topologie de \mathfrak{A}_{k+1} , cette topologie étant plus fine que celle induite dans \mathfrak{A}_{k+1} par \mathfrak{T}_ω . Il suffira donc de montrer que la fonction de λ et z

$$\frac{\lambda}{z-\lambda} : z = \frac{\lambda}{z(z-\lambda)}$$



est bornée pour $\Re \lambda \leq k$, $\Re z \geq k+1$.

Il est évident que, dans ces conditions, l'infimum de $|z(z-\lambda)|$ est atteint pour $\Re \lambda = k$, $\Re z = k+1$. Posons $\lambda = u + iv$, $z = x + iy$, $\mu = (k+1) + iv/2$ (avec $x, y, u, v \in \mathbb{R}$). Alors, pour $u = k$, $x = k+1$ on a

$$|z(z-\lambda)| \geq \begin{cases} |\mu| & , \text{ si } |y| \geq |v| : 2 \text{ avec } yv \geq 0 \\ |\lambda - \mu|(k+1) & , \text{ en tout autre cas.} \end{cases}$$

Et, puisque $|\mu| = \sqrt{(k+1)^2 + v^2/4}$, $|\lambda - \mu| = \sqrt{1 + v^2/4}$, pour $u = k$, on en déduit

$$\sup_{\substack{\Re z > k+1 \\ \Re z \leq k}} \frac{|\lambda|}{|z(z-\lambda)|} \leq \sup_{v \in \mathbb{R}} \left(\frac{\sqrt{k^2 + v^2}}{\sqrt{(k+1)^2 + v^2/4}}, \frac{\sqrt{k^2 + v^2}}{(k+1)\sqrt{1 + v^2/4}} \right) \leq 2$$

Cela étant, nous pouvons affirmer [cf. (2.2)] que, pour tout k et toute fonction $\varphi \in \mathfrak{A}_k^*$, il existe, par rapport à \mathfrak{T}_ω , l'intégrale

$$\int_{C_k} h(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = i \int_{-\infty}^{+\infty} h(k+iv) \varphi(k+iv) dv$$

puisque, φ appartenant à \mathfrak{A}_k^* , la fonction $\lambda \varphi(\lambda)$ est bornée sur la droite C_k et, par suite, en vertu de la proposition précédente, la fonction

$$\lambda^2 [h(\lambda) \varphi(\lambda)] = [\lambda h(\lambda)] \cdot [\lambda \varphi(\lambda)]$$

est bornée sur la même droite. On aura donc, précisément, compte tenu de la formule (4.1):

$$(4.2) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} h(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad \text{par rapport à } \mathfrak{T}_\omega.$$

Nous avons donc obtenu une représentation canonique pour tout élément de \mathfrak{A}_ω^* .

Cette formule se généralise immédiatement à tout élément φ de \mathfrak{A}_ω , si l'on pose, par définition :

$$\int_{C_k} h(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = \lim_{\zeta \rightarrow \varphi} \int_{C_k} h(\lambda) \zeta(\lambda) d\lambda, \text{ avec } \zeta \in \mathfrak{A}_k^*,$$

en tenant compte de la proposition 2.

5. Applications linéaires continues de \mathfrak{A}_ω dans une espace localement convexe. Considérons maintenant un espace localement convexe, E , qui soit *complet par rapport aux suites*. Nous nous proposons de déterminer une expression générale des applications linéaires continues de \mathfrak{A}_ω dans E .

a) Soit F une telle application et désignons par φ un élément quelconque de \mathfrak{A}_ω . Soit k un entier tel que $\varphi \in \mathfrak{A}_k$. Alors la formule (4.2) s'applique et, puisque le symbole F est permutable avec le signe d'intégrale dans cette formule (ce signe indiquant des additions successives et trois passages à la limite), on aura

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} F[h(\lambda)] \varphi(\lambda) d\lambda$$

ou

$$(5.1) \quad F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda,$$

en posant

$$(5.2) \quad f(\lambda) = F[h(\lambda)] = F\left[\frac{1}{z - \lambda}\right], \text{ pour tout } \lambda \in C$$

et en adoptant la convention

$$\int_{C_k} f(\lambda) \varphi(\varphi) d\lambda = \lim_{\zeta \rightarrow \varphi} \int_{C_k} f(\lambda) \zeta(\lambda) d\lambda, \text{ avec } \zeta \in \mathfrak{A}_{k-1}^*;$$

$f(\lambda)$ se nomme la *fonction indicatrice* de l'application F .

Donc, si F est une application linéaire continue de \mathfrak{A}_ω dans E , elle est donnée nécessairement par la formule (5.1) avec (5.2).

Cherchons à caractériser la fonction $f(\lambda)$ en termes primitifs de la structure \mathfrak{A}_ω . Nous avons vu (propositions 3 et 4) que la fonction $h(\lambda)$ est entière et que $h(\lambda)$ est bornée sur tout demi-plan gauche. Or ces propriétés sont respectées par n'importe quelle application linéaire continue F de \mathfrak{A}_ω dans E , puisque F permute avec la dérivation

par rapport à λ et transforme tout borné de \mathfrak{A}_ω en un borné de \mathbf{E} ; on aura précisément :

$$D_\lambda f(\lambda) = D_\lambda F_z \left[\frac{1}{z-\lambda} \right] = F_z \left[\frac{1}{(z-\lambda)^2} \right]. \quad (1)$$

Donc, la fonction indicatrice $f(\lambda)$ vérifie nécessairement les conditions suivantes :

P 1. $f(\lambda)$ est une fonction entière.

P 2. $\lambda f(\lambda)$ est bornée sur tout demi-plan gauche.

D'ailleurs il est aisé de voir que $f(\lambda)$ doit vérifier encore la condition suivante [vérifiée par $h(\lambda)$] :

P 3. Pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega$, il existe un élément \mathbf{u} de \mathbf{E} tel que

$$\mathbf{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_k} f(\lambda) \zeta_n(\lambda) d\lambda$$

quelle que soit la suite (ζ_n) d'éléments de \mathfrak{A}_ω^* convergeant vers φ et quel que soit k tel que $\varphi \in \mathfrak{A}_k$.

b) Soit réciproquement $f(\lambda)$ une fonction de λ à valeurs dans \mathbf{E} , vérifiant P 1, P 2, P 3 et posons

$$(5.3) \quad F^*(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda, \text{ pour tout } k \text{ et tout } \varphi \in \mathfrak{A}_k^*.$$

Cette intégrale existe évidemment, la fonction $\lambda^2 \varphi(\lambda) f(\lambda)$ étant bornée sur C_k . En outre, la valeur de $F(\varphi)$ ne dépend pas du choix de k , comme on le voit aisément à l'aide du théorème de CAUCHY [si $k' > k$, la fonction $f(\lambda) \varphi(\lambda)$ est holomorphe sur la bande $k \leq \Re \lambda \leq k'$ et on a $f(\lambda) \varphi(\lambda) \rightarrow 0$ uniformément lorsque $\lambda \rightarrow \infty$]. On voit alors, sans difficulté, que l'application $\varphi \rightarrow F^*(\varphi)$ de \mathfrak{A}_ω^* dans \mathbf{E} est *linéaire*.

Cela étant, désignons par \mathfrak{T}'_k la topologie induite dans \mathfrak{A}_k par \mathfrak{T}_{2k+2} . Il est aisé de voir que la topologie de l'espace \mathfrak{A}_k coïncide avec la topologie de la limite inductive des espaces normés $\mathfrak{A}_k[\mathfrak{T}'_k]$. Or, puisque $f(\lambda)$ vérifie la condition P 3 et que l'ensemble \mathfrak{A}_k^* est dense dans \mathfrak{A}_k par rapport à \mathfrak{T}'_k pour tout k (prop. 2a), on peut employer ici le principe du prolongement par continuité (voir [1], pp. 53-55): la restriction, F_k^* , de F^* à chaque ensemble \mathfrak{A}_k^* est univoquement prolongeable en une application linéaire continue, F_k , de

(1) On écrit z comme indice de F , pour indiquer que z est une variable apparente.

$\mathfrak{A}_k[\mathfrak{T}'_k]$ dans \mathbf{E} et F est ainsi prolongée en une application linéaire continue, F , de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} . On aura donc, pour $\varphi \in \mathfrak{A}_k, k=0, 1, 2, \dots$:

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\zeta \rightarrow \varphi} \int_{C_k} f(\lambda) \zeta(\lambda) d\lambda \quad \text{sur } \mathfrak{A}_\omega^*$$

et nous désignerons encore cette limite par

$$\int_{C_k} f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Enfin, on vérifie aussitôt que

$$F_z \left[\frac{1}{z - \lambda} \right] = f(\lambda).$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant

THÉORÈME 1. *Il existe une correspondance biunivoque $F \leftrightarrow f$, entre les applications linéaires continues F de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} et les fonctions $f(\lambda)$ de la variable complexe, à valeurs dans \mathbf{E} , ayant les propriétés P1, P2, P3. Cette correspondance est définie par les formules:*

$$f(\lambda) = F_z \left[\frac{1}{z - \lambda} \right], \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{C},$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour toute fonction } \varphi \in \mathfrak{A}_\omega,$$

k étant un entier tel que $\varphi \in \mathfrak{A}_k$.

6. Le calcul opérationnel par rapport à l'anneau \mathfrak{A}_ω . Si l'on définit dans \mathfrak{A}_ω une multiplication d'après la notion usuelle de produit de deux fonctions, l'espace \mathfrak{A}_ω devient un *anneau topologique*. Soit encore \mathbf{E} un espace localement convexe, complet par rapport aux suites, et désignons par $\Lambda_c(\mathbf{E})$ l'anneau des applications linéaires continues de l'espace \mathbf{E} dans lui-même, avec la topologie, \mathfrak{T}_s , de la *convergence simple* sur \mathbf{E} . Considérons le problème suivant: *Étant donné un opérateur $\Theta \in \Lambda_c(\mathbf{E})$, faire correspondre à chaque fonction $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega$ un élément de $\Lambda_c(\mathbf{E})$, que l'on désignera par $\varphi(\Theta)$, de façon que:*

- I. *Si $\chi = \varphi + \psi$, alors $\chi(\Theta) = \varphi(\Theta) + \psi(\Theta)$.*
- II. *Si $\chi = \varphi \psi$, alors $\chi(\Theta) = \varphi(\Theta) \psi(\Theta)$.*

III. Si $\varphi = \lim_n \varphi_n$, alors $\varphi(\Theta) = \lim_n \varphi_n(\Theta)$.

IV. Si $\varphi(z) \equiv k$ (constante numérique quelconque), alors $\varphi(\Theta) = k$.⁽¹⁾

V. Si $\varphi(z) \equiv z$, alors $\varphi(\Theta) = \Theta$.

Désignons par F l'application $\varphi \rightarrow \varphi(\Theta)$ de \mathfrak{A}_ω dans $\Lambda_c(\mathbf{E})$, c'est-à-dire, posons :

$$F(\varphi) = \varphi(\Theta).$$

Les conditions I—V peuvent s'exprimer de la façon suivante : F est une application linéaire continue de \mathfrak{A}_ω dans $\Lambda_c(\mathbf{E})$ telle que

$$F(\varphi\psi) = F(\varphi) \cdot F(\psi), \quad F_z(1) = 1, \quad F_z(z) = \Theta.$$

Le problème est donc partiellement résolu. *Il reste à caractériser la fonction indicatrice, $f(\lambda)$, de F , au moyen de la nouvelle notion primitive adjointe à la structure \mathfrak{A}_ω : celle de produit.*

Observons que

$$(\dot{z} - \lambda)h(\lambda) = h(\lambda)(\dot{z} - \lambda) = 1 \quad (\text{fonction unité}).$$

On aura donc, d'après I, II, IV et V :

$$(\Theta - \lambda)f(\lambda) = f(\lambda)(\Theta - \lambda) = 1 \quad (\text{opérateur identique})$$

d'où

$$f(\lambda) \equiv \frac{1}{\Theta - \lambda}$$

On devra donc avoir

$$F(\varphi) = \varphi(\Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\Theta - \lambda} d\lambda, \quad \text{pour } \varphi \in C_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

D'autre part, on trouve

$$(6.1) \quad \lim_{\Re \lambda \rightarrow -\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \dot{z}} = 1, \quad \text{par rapport à } \mathfrak{T}_\omega.$$

En effet, on a

$$\frac{1}{z} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda - z} - 1 \right) = \frac{1}{\lambda - z}$$

et on obtient, pour $\Re \lambda < 0$:

$$\sup_{\Re z > 1} \left| \frac{1}{\lambda - z} \right| = \frac{1}{1 - \Re \lambda} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } \Re \lambda \rightarrow -\infty.$$

(1) Pour commodité d'exposition, nous identifierons par la suite le nombre complexe k soit avec la fonction $\varphi(z) \equiv k$ soit avec l'opérateur kI .

Or, si l'on applique F aux deux membres de (6.1), on trouve

$$P4. \quad \lim_{\Re \lambda \rightarrow -\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \Theta} = 1.$$

Donc, la fonction $(\Theta - \lambda)^{-1}$ doit vérifier, outre les conditions P1—P2 du n.º précédent, encore la condition P4. Mais nous verrons que P3 est maintenant une conséquence des autres conditions.

b) Soit réciproquement Θ un élément de $\Lambda_c(\mathbf{E})$ tel que $(\Theta - \lambda)^{-1}$ soit une fonction de λ à valeurs dans $\Lambda_c(\mathbf{E})$ vérifiant les conditions P1, P2, P4 et posons

$$F^*(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\Theta - \lambda} d\lambda, \text{ pour } \varphi \in \mathfrak{A}_k^*, k = 0, 1, \dots.$$

Nous savons déjà, d'après l'analyse du n.º précédent, que cette formule définit une application linéaire continue de \mathfrak{A}_ω^* dans $\Lambda_c(\mathbf{E})$. Pour voir que l'on a $F^*(\varphi \cdot \psi) = F^*(\varphi) \cdot F^*(\psi)$, on peut raisonner à peu près comme dans la démonstration que nous avons exposée dans [20], p. 63 :

Soient $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}_k^*$; alors, on peut écrire :

$$F^*(\varphi) \cdot F^*(\psi) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{k+1}} \left[\int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda_1) \psi(\lambda_2)}{(\Theta - \lambda_1)(\Theta - \lambda_2)} d\lambda_1 \right] d\lambda_2$$

et comme

$$\frac{1}{(\Theta - \lambda_1)(\Theta - \lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{1}{\Theta - \lambda_2} - \frac{1}{\Theta - \lambda_1} \right),$$

il vient

$$F^*(\varphi) \cdot F^*(\psi) = \mathbf{u} - \mathbf{v},$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{k+1}} \left[\int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda_1) \psi(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\Theta - \lambda_2)} d\lambda_1 \right] d\lambda_2 \\ \mathbf{v} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{k+1}} \left[\int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda_1) \psi(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\Theta - \lambda_1)} d\lambda_1 \right] d\lambda_2. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{k+1}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} d\lambda_1 \right] \frac{\psi(\lambda_2)}{\Theta - \lambda_2} d\lambda_2 \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{k+1}} \frac{\varphi(\lambda_2) \psi(\lambda_2)}{\Theta - \lambda_2} d\lambda_2 = F^*(\varphi \psi); \end{aligned}$$

D'autre part, les intégrales considérées étant convertibles en des intégrales de RIEMANN, on peut intervertir l'ordre des intégrations.

Donc :

$$v = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda_1)}{\Theta - \lambda_1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{k+1}} \frac{\psi(\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} d\lambda_2 \right] d\lambda_1 = 0,$$

puisque, pour décrire C_k , le point λ_1 doit rester à gauche de C_{k+1} .

On a donc bien

$$F^*(\varphi) \cdot F^*(\psi) = F^*(\varphi\psi).$$

D'autre part, on voit aussitôt que

$$F^*\left(\frac{1}{z - \lambda}\right) = \frac{1}{\Theta - \lambda}, \text{ quel que soit } \lambda,$$

et donc

$$F^*(z^{-k}) = \Theta^{-k}, \text{ quel que soit } k.$$

Cela étant, nous pouvons établir que la condition P 3 du n.º précédent est vérifiée par la fonction $f(\lambda) = (\Theta - \lambda)^{-1}$.

Soit φ un élément quelconque de \mathfrak{A}_ω et soit (ζ_n) une suite d'éléments de \mathfrak{A}_ω^* convergeant vers φ dans l'espace \mathfrak{A}_{k-1} , pour une valeur convenable de k . Il s'ensuit que la fonction $\varphi(z)/z^k$ appartient à \mathfrak{A}_k^* et que la suite de fonctions $\zeta_n(z)/z^k$ converge uniformément vers $\varphi(z)/z^k$ sur la droite C_k . On aura donc

$$\begin{aligned} F^*[\varphi(z)/z^k] &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_k} \frac{\zeta_n(\lambda)}{(\Theta - \lambda) \cdot \lambda^k} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Theta^{-k} \int_{C_k} \frac{\zeta_n(\lambda)}{\Theta - \lambda} d\lambda \right]. \end{aligned}$$

Alors, puisque l'application Θ est continue, on trouve

$$\Theta^k F^*[\varphi(z)/z^k] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_k} \frac{\zeta_n(\lambda)}{\Theta - \lambda} d\lambda$$

et il est aisé de voir que cette limite ne dépend pas du choix de la suite (ζ_n) . On peut donc écrire, d'après les considérations du n.º précédent :

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\Theta - \lambda} d\lambda = \frac{\Theta^k}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\Theta - \lambda) \lambda^k} d\lambda$$

Cette formule permet de voir aussitôt que la propriété $F(\varphi\psi) = F(\varphi) \cdot F(\psi)$ se conserve dans ce prolongement.

Il reste à voir que les conditions $F(1) = 1$, $F_z(z) = \Theta$ sont vérifiées. Pour la première, il suffit d'observer que, l'application F étant continue, on a, en vertu de (8) et de la condition P4 :

$$F(1) = F_z \left(\lim_{\Re \lambda \rightarrow -\infty} \frac{\lambda}{\lambda - z} \right) = \lim_{\Re \lambda \rightarrow -\infty} \frac{\lambda}{\lambda - \Theta} = 1.$$

Enfin, puisque $z \cdot 1/z = 1$, on trouve

$$F_z(z) \cdot F_z \left(\frac{1}{z} \right) = 1 \quad \text{d'où} \quad F_z(z) = 1 : F_z \left(\frac{1}{z} \right) = \Theta.$$

Nous avons donc établi le théorème suivant :

THÉOREME 2. *Étant donné un élément Θ quelconque de $\Lambda_c(\mathbf{E})$, il ne peut pas exister plus d'un homomorphisme continu, F , de l'anneau \mathfrak{A}_ω dans l'anneau $\Lambda_c(\mathbf{E})$, faisant correspondre à la fonction 1 l'opérateur 1 et à la fonction z l'opérateur Θ . Pour qu'il existe un tel homomorphisme il faut et il suffit que :*

- I) $(\Theta - \lambda)^{-1}$ soit une fonction entière de λ , à valeurs dans $\Lambda_c(\mathbf{E})$, telle que
- II) $\lambda(\Theta - \lambda)^{-1}$ soit bornée sur tout demi-plan $\Re \lambda \leq k$ et
- III) $\lim_{\Re \lambda \rightarrow -\infty} \lambda(\lambda - \Theta)^{-1} = 1$.

Ces conditions étant vérifiées, on a

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\Theta - \lambda} d\lambda, \text{ pour tout } k \text{ et tout } \varphi \in \mathfrak{A}_k.$$

On pose alors $\varphi(\Theta) = F(\varphi)$.

7. L'espace des distributions de support limité à gauche. Produit de composition. Nous désignons par \mathfrak{E}_π^+ l'espace des distributions sur \mathbf{R} de support limité à gauche, avec la topologie que M. SCHWARTZ y a définie au moyen de l'espace dual. On peut expliciter la topologie de \mathfrak{E}_π^+ de la façon suivante: Soit $\mathfrak{E}_{k,h}$, pour $k, h = 1, 2, \dots$, l'espace des distributions T de la forme $T = D^k f$, où f est une fonction

complexe, sommable sur $[-k, h]$ et nulle pour $t < k$, et introduisons dans $\mathfrak{E}_{k,h}$ une norme comme suit :

$$\|T\|_k = \int_{-k}^h |f(t)| dt \quad (T = D^k f). \quad (1)$$

Cela posé, nous désignons par $\mathfrak{E}_{\omega,h}^+$, pour tout $h=1,2,\dots$, la limite inductive des espaces $\mathfrak{E}_{k,h}^+$ ($k=1,2,\dots$); et par \mathfrak{E}_{π}^+ la limite projective des espaces $\mathfrak{E}_{\omega,h}^+$. Nous signalons les critères suivants :

(7.1) *Pour qu'une suite (T_n) converge vers T dans \mathfrak{E}_{π}^+ , il faut et il suffit que, pour tout entier, h , il existe un entier k et des fonctions f, f_n sommables sur $[-k, h]$ et nulles pour $t < -k$, telles que : $T = D^k f$, $T_n = D^k f_n$, $f_n \rightarrow f$ en moyenne sur $[-k, h]$.*

(7.2) *Pour qu'un ensemble \mathfrak{H} soit borné dans \mathfrak{E}_{π}^+ , il faut et il suffit que, pour tout h , il existe un entier k et un ensemble \mathfrak{X} de fonctions sommables sur $[-k, h]$, et nulles pour $t < -k$, telles que $\mathfrak{H} = D^k \mathfrak{X}$ et $|f(t)| < k$ sur $[-k, h]$ pour toute $f \in \mathfrak{X}$.*

Soit \mathbf{E} un espace localement convexe, complet pour les suites. Nous pouvons déterminer l'expression générale des applications linéaires continues F de chaque espace $\mathfrak{E}_{\omega,h}^+$ dans \mathbf{E} , comme nous l'avons fait pour quelques cas similaires dans [23], en partant de la formule intégrale de DIRAC. On trouve alors qu'il existe une correspondance biunivoque $F \leftrightarrow f$ entre ces applications F et les fonctions $f(u)$ à valeurs dans \mathbf{E} , indéfiniment différentiables sur \mathbf{R} et nulles pour $u \geq h$, cette correspondance étant exprimée par les formules :

$$f(u) = F[\delta(\dot{t} - u)]^{(2)}$$

$$F[T] = \int_{-\infty}^h f(u) T(u) du = (-1)^k \int_{-k}^h f^{(k)}(u) g(u) du,$$

où $T = D^k g$, $g(t)$ étant une fonction sommable sur $[-k, h]$ et nulle pour $t < k$.

Si, au lieu des espaces $\mathfrak{E}_{\omega,h}^+$, on considère l'espace \mathfrak{E}_{π}^+ , ce résultat subsiste avec de petits changements, en imposant certaines restrictions à l'espace \mathbf{E} .

En particulier, on retrouve ce résultat remarquable (cf. [16], vol. II, pp. 27-29) :

(1) Il est aisé de voir que la fonction $f(t)$ est univoquement déterminée par la donnée de T et k .

(2) On pose $\delta(\dot{t} - u) = \tau_u \delta$; le point indique que t est une variable apparente.

Il existe une correspondance biunivoque $S \leftrightarrow \hat{S}$, entre les éléments S de \mathfrak{E}_π^+ et les applications linéaires continues \hat{S} de l'espace \mathfrak{E}_π^+ dans lui-même, permutant avec la dérivation D ; cette correspondance est exprimée par les formules

$$S = \hat{S}(\delta), \quad \hat{S}(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t-u) T(u) du,$$

où $S(t-u) = \tau_u S$.

On pose alors $S * T = \hat{S}(T)$ et on appelle $S * U$ le produit de composition de S par T . Le calcul de $S * T$ devient très simple, si l'on observe qu'il suffit de connaître la restriction $(S * T)_h$ de $S * U$ à l'intervalle $] -\infty, h[$, pour tout $h > 0$. Désignons par μ, ν les extrêmes inférieurs des supports de S, T ; alors, la restriction de $\tau_u S$ à cet intervalle est une fonction de u nulle pour $u > h - \mu$, et, si l'on pose

$$S = D^r f, \quad T = D^s g, \quad \text{dans }] -\infty, h - \mu[,$$

f, g étant des fonctions sommables à support borné, on aura

$$S * T = D_x^{r+s} \int_v^{t-\mu} f(t-u) g(u) du, \quad \text{dans }] -\infty, h[.$$

Cela permet de voir aussitôt que $S * T = T * S$ et que le support de $S * T$ est la somme des supports de S et U . On voit de même que l'espace \mathfrak{E}_π^+ , avec le produit de composition devient une algèbre sans diviseurs de zéro (cf. [16], vol. 2, p. 29).

8. Le calcul symbolique de l'opérateur D .—L'espace \mathfrak{E}_π^+ contient toutes les fonctions de support limité à gauche qui puissent présenter quelque intérêt dans les applications. D'autre part, l'opérateur D , restreint à l'espace \mathfrak{E}_π^+ , a cette propriété remarquable: son ensemble résolvant coïncide avec la droite complexe, \mathbf{C} (cf. [9]). On a précisément:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D - \lambda} T &= \int_{-\infty}^t e^{\lambda(t-u)} T(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda(t-u)} H(t-u) T(u) du \\ &= e^{\lambda t} H * T, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{C} \text{ et } T \in \mathfrak{E}_\pi^+, \end{aligned}$$

où H est la fonction de HEAVISIDE:

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}.$$

Pour s'en convaincre, il suffit de résoudre l'équation en U

$$D U - \lambda U = T,$$

en employant, par exemple, la méthode de la variation de la constante arbitraire et en observant que, si l'on a

$$T = D^r f \quad \text{dans l'intervalle }]-\infty, h[,$$

$f(t)$ étant une fonction sommable dans cet intervalle et nulle pour $t < \mu$, on aura

$$D^{-1}T = D^r \int_{\mu}^t f(u) du, \quad \text{dans }]-\infty, h[.$$

Avec la même hypothèse sur T , la restriction de $e^{\lambda t} H * T$ à $]-\infty, h[$ sera

$$e^{\lambda t} H * D^r f = D^r (e^{\lambda t} H * f) = D^r \int_{\mu}^t e^{\lambda(t-u)} f(u) du.$$

Cela étant, pour établir le calcul symbolique de l'opérateur D , il nous reste à constater que les conditions I), II), III), exigées par le th. 2, sont vérifiées.

À cet effet, rappelons que l'on considère ici l'anneau $\Lambda_c(\mathfrak{C}_{\pi}^+)$ muni de la *topologie de la convergence simple* et que, d'autre part, le produit de composition $S * T$ est une fonction séparément continue de S et de T , pour $S, T \in \mathfrak{C}_{\pi}^+$. Donc, pour la condition I), il suffit de montrer que la fonction $e^{\lambda t} H$ de λ est analytique en tout point $\lambda \in \mathbf{C}$, par rapport à la topologie de \mathfrak{C}_{π}^+ . Or on a

$$\frac{e^{(\lambda+h)t} H - e^{\lambda t} H}{h} = \frac{e^{ht} - 1}{h} e^{\lambda t} H$$

et, puisque ce rapport converge partout vers $te^{\lambda t} H$ lorsque $h \rightarrow 0$, en restant borné sur tout intervalle borné, on aura, d'après le critère (7.1):

$$D_{\lambda}(e^{\lambda t} H) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ht} - 1}{h} e^{\lambda t} H = te^{\lambda t} H,$$

par rapport à la topologie de \mathfrak{C}_{π}^+ .

Pour les conditions II), III), il suffit de remarquer que

$$\lambda e^{\lambda t} H = D_t(e^{\lambda t} H) - \delta$$

et d'appliquer les critères (7.2) et (7.1).

On aura donc, d'après le théorème 2:

$$\begin{aligned} \varphi(D)T &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{D - \lambda} T d\lambda \quad (\text{dans } \mathfrak{C}_{\pi}^+), \quad \text{pour tout } k = 1, 2, \dots \\ &\text{et tout } \varphi \in \mathfrak{A}_k. \end{aligned}$$

Mais, puisque $(D - \lambda)^{-1} T = e^{\lambda t} H * T = T * e^{\lambda t} H$ et que $S * T$ est une fonction continue de S , on aura,

$$\int_{C_k} \varphi(\lambda) [e^{\lambda t} H * T] d\lambda = \left[\int_{C_k} e^{\lambda t} H \varphi(\lambda) d\lambda \right] * T.$$

Alors, si l'on pose

$$(8.1) \quad \boxed{\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} e^{\lambda t} H(t) \varphi(\lambda) d\lambda},$$

on trouve la formule :

$$(8.2) \quad \boxed{\varphi(D) T = \Phi * T}.$$

Le calcul de l'opérateur D est donc ramené à la transformation $\varphi \leftrightarrow \Phi$ (linéaire continue) de \mathfrak{A}_ω dans \mathfrak{E}_π^+ . Nous désignerons par \mathfrak{K} cette transformation :

$$\Phi = \mathfrak{K}(\varphi).$$

Il s'agit naturellement de l'*antitransformation de LAPLACE généralisée*. Il ne faut pas oublier que Φ n'est pas en général une fonction mais une distribution *de type spécial*. On voit aussitôt que

$$\mathfrak{K}(\varphi\psi) = \mathfrak{K}(\varphi) * \mathfrak{K}(\psi), \text{ quelles que soient } \varphi, \psi \in \mathfrak{A}_\omega,$$

et que

$$(8.3) \quad \mathfrak{K}[z\varphi(z)] = D\mathfrak{K}(\varphi), \quad \mathfrak{K}(1) = \delta,$$

c'est-à-dire, \mathfrak{K} transforme «multiplication par z » en «dérivation» et «fonction 1» en «distribution δ ».

On peut vérifier aussi que

$$(8.4) \quad \mathfrak{K}_z[e^{-uz}\varphi(z)] = \tau_u \mathfrak{K}(\varphi), \text{ pour } u \geq 0,$$

c'est-à-dire, \mathfrak{K} transforme «multiplication par e^{-uz} ($u \geq 0$)» en «translation τ_u ».

9. L'espace image de \mathfrak{A}_ω par \mathfrak{K} ; transformation de LAPLACE. Nous chercherons maintenant à déterminer le transformé de \mathfrak{A}_ω par \mathfrak{K} , muni de la topologie la plus fine qui rend continue la transformation \mathfrak{K} . À cet effet, remarquons que, si l'on a $\varphi \in \mathfrak{A}_k$ et si l'on pose $\psi(z) \equiv \varphi(z)/z^{k+2}$, on aura

$$\mathfrak{K}(\varphi) = \frac{D^{k+2}}{2\pi} e^{(k+2)t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivt} \psi(k+2+v) dv$$

et, puisqu'il existe un nombre M tel que $|z^2 \psi(z)| < M$ pour $\Re z > k$, on pourra écrire $\mathfrak{K}(\varphi)$ sous la forme

$$\mathfrak{K}(\varphi) = D^h e^{ht} \Psi(t),$$

$\Psi(t)$ étant une fonction continue bornée, nulle pour $t \leq 0$.

Cela nous invite à poser les définitions suivantes :

Pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$, désignons par \mathfrak{F}_k l'espace des distributions sur \mathbf{R} , de la forme

$$\Phi = D^k e^{kt} F(t),$$

F étant une fonction continue bornée sur \mathbf{R} , nulle pour $t \leq 0$, et adoptons sur \mathfrak{F}_k la définition de norme suivante :

$$\|\Phi\|_k = \sup_{t > 0} |F(t)|.$$

Cela posé, désignons par \mathfrak{F}_ω la limite inductive des espaces \mathfrak{F}_k . Nous allons voir que \mathfrak{F}_ω est l'image cherchée de l'espace \mathfrak{A}_ω . À cet effet nous essayerons d'invertir l'opérateur \mathfrak{K} .

Observons que, s'il existe \mathfrak{K}^{-1} , on doit avoir, en vertu de (8.3):

$$(9.1) \quad \mathfrak{K}^{-1}(D\Phi) = z \mathfrak{K}^{-1}(\varphi), \quad \mathfrak{K}^{-1}(\partial) = 1.$$

D'autre part, on a

$$\Phi = \partial * \Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial(t-u) \Phi(u) du,$$

cette intégrale étant convergente par rapport à la topologie de \mathfrak{F}_ω , comme on peut le vérifier. On devra donc avoir, s'il existe \mathfrak{K}^{-1} :

$$\mathfrak{K}^{-1}(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta(z, u) \Phi(u) du,$$

où $\vartheta(z, u) = \mathfrak{K}^{-1}[\partial(t-u)]$ (fonction indicatrice de \mathfrak{K}^{-1}). Cherchons à caractériser $\partial(t-u) = \tau_u \partial$:

1) $\partial(t-u)$ est une fonction de u , à valeurs dans \mathfrak{F}_ω indéfiniment différentiable sur \mathbf{R} , décroissant, pour $u \rightarrow \infty$, plus rapidement que toute exponentielle e^{-tk} , ainsi que chacune de ses dérivées :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} [e^{ku} \partial^{(p)}(t-u)] = 0, \quad \text{pour } k, p = 0, 1, 2, \dots$$

Donc, il en sera de même pour la fonction $\vartheta(z, u)$ de u , à valeurs dans \mathfrak{A}_ω .

$$2) \quad \text{On a } D_u \partial(t-u) + D_t \partial(t-u) = 0.$$

Il en découle, compte tenu de (9.1) et du fait que \mathfrak{R}^{-1} doit être continue :

$$D_u \theta(z, u) + z \theta(z, u) = 0, \quad (1)$$

d'où

$$\theta(z, u) = e^{-zu}, \quad \text{puisque} \quad \theta(z, 0) = \mathfrak{R}^{-1}(\delta) = 1.$$

On devra donc avoir (en échangeant les rôles de u et t) :

$$(9.2) \quad \mathfrak{R}^{-1}(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} \Phi(t) dt.$$

Nous désignerons par \mathfrak{L} la transformation définie par cette intégrale (*transformation de LAPLACE généralisée*). Il est maintenant aisé de voir que \mathfrak{L} est une application linéaire continue de \mathfrak{F}_ω dans \mathfrak{A}_ω , vérifiant les conditions (9.1). Il suffit de remarquer que, si $\Phi \in \mathfrak{F}_k$ et si l'on pose $F = e^{-kt} D^{-k} \Phi$, F est une fonction continue et bornée sur \mathbf{R} , nulle pour $t \leq 0$, et on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\Phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} D^k [e^{kt} F(t)] dt \\ &= (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} (D_t^k e^{-zt}) [e^{kt} F(t)] dt \\ &= z^k \int_0^{+\infty} e^{-(z-k)t} F(t) dt; \end{aligned}$$

et que, si l'on pose $t = -\log u$, on trouve

$$\mathfrak{L}(\Phi) = z^k \int_0^1 u^{z-k-1} F(\log u) du.$$

Il reste à voir que l'on a, en effet, $\mathfrak{L} = \mathfrak{R}^{-1}$.

Puisque

$$\mathfrak{R}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} e^{\lambda t} H(t) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour} \quad \varphi \in \mathfrak{A}_k, k = 0, 1, \dots$$

et que \mathfrak{L} est une application linéaire continue de \mathfrak{F}_ω dans \mathfrak{A}_ω , on a

$$\mathfrak{L} \mathfrak{R}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \mathfrak{L}_t [e^{\lambda t} H(t)] \varphi(\lambda) d\lambda$$

et comme, d'autre part,

(1) Lorsqu'il n'y a pas danger de confusion, nous n'indiquons pas les variables que l'on doit considérer apparentes.

$$\mathfrak{L}[e^{\lambda t} H(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\lambda)t} dt = \frac{1}{z-\lambda}$$

on aura

$$\mathfrak{L} \mathfrak{R}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda = \varphi(z),$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{L} \mathfrak{R} = 1.$$

On voit de même que

$$\mathfrak{R} \mathfrak{L}(\Phi) = \int_0^{+\infty} \mathfrak{R}_z(e^{-zt}) \Phi(t) dt$$

et puisque, d'après (8.2):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_z(e^{-zu}) &= \tau_u \mathfrak{R}(1) = \tau_u \delta \\ &= \delta(t-u), \quad \text{pour } u \geq 0, \end{aligned}$$

on aura

$$\mathfrak{R} \mathfrak{L}(\Phi) = \int_0^{+\infty} \delta(t-u) \Phi(u) du = \Phi,$$

ce qui veut dire que

$$\mathfrak{R} \mathfrak{L} = 1.$$

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Les espaces vectoriels topologiques \mathfrak{A}_ω et \mathfrak{F}_ω sont isomorphes. Il existe une, et seulement une, application linéaire continue \mathfrak{L} de \mathfrak{F}_ω dans \mathfrak{A}_ω telle que $\mathfrak{L}(D\Phi) = z \mathfrak{L}(\Phi)$ et $\mathfrak{L}(\delta) = 1$. Cette application est donnée par la formule*

$$\mathfrak{L}(\Phi) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \Phi(t) dt$$

et admet une inverse continue, donnée par la formule (1)

$$\mathfrak{L}^{-1}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} e^{\lambda t} \varphi(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour } \varphi \in \mathfrak{A}_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

On a en outre

$$\mathfrak{L}(\Phi * \Psi) = \mathfrak{L}(\Phi) \mathfrak{L}(\Psi), \quad \text{quelles que soient } \Phi, \Psi \in \mathfrak{F}_\omega.$$

(1) Il est aisé de voir que l'on peut dispenser le facteur $H(t)$ dans la formule d'inversion, qui devient alors identique à celle classique.

Les éléments de \mathfrak{F}_ω sont précisément les *distributions laplacisables*, d'après M. SCHWARTZ [18].

10. Les espaces $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega, \tilde{\mathfrak{A}}_\omega$. Nous désignons par $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ l'espace des distributions Ψ de la forme

$$\Psi = \tau_h \Phi = \Phi(t - h), \quad \text{où } \Phi \in \mathfrak{F}_\omega, \quad h \in \mathbf{R},$$

avec la topologie la plus fine qui rend continues les translations τ_h et induit dans \mathfrak{F}_ω la topologie de cet espace. Il est facile de définir directement la topologie de $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$. On voit d'ailleurs que *pour tout* $h \in \mathbf{R}$, l'ensemble $\tau_h(\mathfrak{F}_\omega)$ est un sous-ensemble fermé de $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$.

D'autre part, nous désignons par $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ l'espace des fonctions ψ de la forme

$$\psi(z) = e^{hz} \varphi(z), \quad \text{où } h \in \mathbf{R}, \quad \varphi \in \mathfrak{A}_\omega,$$

avec la topologie la plus fine qui rend continues les applications $\varphi \rightarrow e^{hz} \varphi$ et induit dans \mathfrak{A}_ω la topologie de cet espace.

On trouve alors ce résultat :

*Les espaces vectoriels topologiques $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega, \tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ sont isomorphes. L'application \mathfrak{K} de \mathfrak{A}_ω sur \mathfrak{F}_ω peut se prolonger, d'une seule manière, en un isomorphisme $\tilde{\mathfrak{K}}$ de $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ sur $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$, tel que $\tilde{\mathfrak{K}}_z[z \varphi(z)] = D \tilde{\mathfrak{K}}(\varphi)$, et $\tilde{\mathfrak{K}}(\varphi \psi) = \tilde{\mathfrak{K}}(\varphi) * \tilde{\mathfrak{K}}(\psi)$.*

Nous poserons alors

$$\tilde{\mathfrak{L}} = \tilde{\mathfrak{K}}^{-1}$$

et on aura encore

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} \Phi(t) dt$$

Pour simplifier les notations, nous adopterons encore les symboles $\mathfrak{K}, \mathfrak{L}$, au lieu de $\tilde{\mathfrak{K}}, \tilde{\mathfrak{L}}$.

L'espace $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ contient déjà des fonctions telles que $e^z, \sin z, \cos z$. On aura, par exemple

$$\mathfrak{K}_z(e^{hz}) = \delta(t + h), \quad \text{quel que soit } h \in \mathbf{R},$$

donc

$$e^{hD} U = \delta(t + h) * U = \tau_h^{-1} U = U(t + h),$$

pour tout $h \in \mathbf{R}$ et $U \in \mathfrak{C}_\pi^+$.

Mais il y manque encore des fonctions telles que $e^{iz}, \sin z, \cos z$. Pour y adjoindre ces fonctions, nous ferons un nouveau prolongement.

11. L'algèbre $\hat{\mathfrak{A}}_\omega$ des fonctions holomorphes de type exponentiel à droite et son corps de quotients. Pour tout $k=0, 1, \dots$, nous désignerons par $\hat{\mathfrak{A}}_k$ l'espace des fonctions $\varphi(z)$ holomorphes pour $\Re z > k$, telles que la fonction $\varphi(z)/e^{k|z|}$ soit bornée sur $\Re z > k$, avec les définitions usuelles de somme et de produit par scalaires et avec la topologie, $\hat{\mathfrak{T}}_k$, définie par la norme suivante

$$\|\varphi\|_k = \sup_{\Re z > k} \frac{|\varphi(z)|}{e^{k|z|}}.$$

On démontre encore que, pour tout k , $\hat{\mathfrak{T}}_{k+1}$ induit dans $\hat{\mathfrak{A}}_k$ une topologie moins fine que $\hat{\mathfrak{T}}_k$ et la boule de $\hat{\mathfrak{A}}_k$ est relativement compacte par rapport à $\hat{\mathfrak{T}}_{k+1}$. La démonstration est semblable à celle de la prop. 1, mais plus délicate.

Nous désignerons par $\hat{\mathfrak{A}}_\omega$ la limite inductive des $\hat{\mathfrak{A}}_k$ et par $\hat{\mathfrak{T}}_\omega$ la topologie de $\hat{\mathfrak{A}}_\omega$. C'est encore un espace $(\mathcal{L}\mathfrak{N}^*)$.

Il est évident que $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega \subset \hat{\mathfrak{A}}_\omega$ et que $\hat{\mathfrak{T}}_\omega$ induit dans $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ une topologie moins fine que celle de $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$. Mais nous ne savons pas encore si $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ est dense dans $\hat{\mathfrak{A}}_\omega$.

D'autre part, il est aisé de voir que, par rapport à la multiplication usuelle, \mathfrak{A}_ω devient une algèbre sans diviseurs de zéro. Il est donc possible de définir le corps des quotients

$$\frac{\varphi}{\psi}, \quad \text{avec } \varphi, \psi \in \mathfrak{A}_\omega.$$

Nous désignerons par \mathfrak{Q}_ω ce corps. En employant notre théorème 6 établi dans [23], on voit que, parmi les topologies qui induisent dans $\hat{\mathfrak{A}}_\omega$ une topologie moins fine que $\hat{\mathfrak{T}}_\omega$ et qui rendent continues les applications $\varphi \rightarrow \varphi/\psi$ de $\hat{\mathfrak{A}}_\omega$ sur \mathfrak{Q}_ω il en existe une, \mathfrak{T}_q , plus fine que toutes les autres: c'est la topologie de la limite inductive des espaces images de $\hat{\mathfrak{A}}_\omega$ par les applications $\varphi \rightarrow \varphi/\psi$.

Puisque la transformation \mathfrak{R} est un isomorphisme algébrique et topologique de l'espace $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ sur l'espace $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$, échangeant le produit ordinaire avec le produit de composition, on peut concevoir une extension, \mathfrak{G}_ω l'espace topologique $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$, avec une extension simultanée du produit de composition, de manière que \mathfrak{R} soit prolongeable comme application linéaire bicontinue de \mathfrak{Q}_ω sur \mathfrak{G}_ω , échangeant le produit ordinaire avec le produit de composition.

Les éléments de \mathfrak{G}_ω n'appartenant pas à $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ pourront s'interpréter de plusieurs façons, mais il nous semble que ces éléments ne peuvent plus être des distributions.

En particulier, on parviendrait ainsi à donner un sens à des séries de puissances de l'opérateur D , qui étaient employées d'une façon empirique par les pionniers du calcul symbolique. Par exemple, on réalisait le symbole e^{hD} de la façon suivante :

$$\begin{aligned} e^{hD} \Phi(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n D^n}{n!} \right) \Phi(t) \\ &= \Phi(t) + h \Phi'(t) + \dots + \frac{h^n}{n!} \Phi^{(n)}(t) + \dots \\ &= \Phi(t + h). \end{aligned}$$

De tels procédés trouveraient maintenant sa justification. Mais il serait intéressant, même au point de vue pratique, de définir directement la topologie induite dans \mathfrak{F}_ω par la topologie de \mathfrak{G}_ω .

REMARQUE FINALE

Le dual fort de l'espace \mathfrak{A}_ω est isomorphe à l'espace \mathfrak{H}_ω des fonctions complexes $f(\lambda)$, entières, à décroissance rapide sur toute verticale et telles que

P2. $\lambda f(\lambda)$ soit bornée sur toute demi-plan gauche, la topologie de \mathfrak{H}_ω étant définie par la famille de normes

$$\|f\|_k = \sup_{\Re \lambda < k} |\lambda^k f^{(k)}(\lambda)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Puisque \mathfrak{A}_ω est un espace $(\mathfrak{L} \mathfrak{N}^*)$, il est réflexif et son dual fort est un espace (\mathfrak{M}^*) (cf. [22]). L'isomorphisme naturel $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ de \mathfrak{A}_ω sur \mathfrak{H}'_ω est défini par les formules (cf. [12]):

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(f) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = \langle f, \varphi \rangle \\ \varphi &= \bar{\varphi}_\lambda \left(\frac{1}{z - \lambda} \right), \end{aligned}$$

où k est un entier tel que la fonctionnelle $\bar{\varphi}$ soit continue par rapport à la norme d'ordre k et où l'on suppose la fonctionnelle $\bar{\varphi}$ prolongée à l'espace des fonctions entières vérifiant seulement P2.

Si l'on désigne par \mathfrak{H}_ω^* l'espace des fonctions $f \in \mathfrak{H}_\omega$ qui décroissent pour $\Re \lambda \rightarrow -\infty$, plus vite que toute exponentielle e^{kz} , ainsi que chacune de leurs dérivées, et si l'on pose

$$\bar{\Phi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) f(-t) dt, \quad \text{avec } \Phi \in \mathfrak{F}_\omega,$$

on définit dans \mathfrak{H}_ω^* une fonctionnelle linéaire continue. Or, nous croyons que \mathfrak{H}_ω^* est dense dans \mathfrak{H}_ω . Alors on pourrait prolonger univoquement $\bar{\Phi}$ à \mathfrak{H}_ω , et même à l'espace des fonctions entières vérifiant P 2; et la fonction indicatrice de Φ serait donnée par la formule

$$\bar{\Phi}_\lambda\left(\frac{1}{\lambda-z}\right) = - \int_{\mu}^{+\infty} \frac{\Phi(t)}{t+z} dt \quad \text{pour } \Re z > -\mu,$$

où l'on désigne par μ l'infimum du support de Φ .

Il s'agirait, donc, de la transformation de STIELTJES généralisée (cf. [27], pp. 325-391). Elle devrait respecter la dérivation, la multiplication et transformer le produit de composition réel en produit de composition complexe.

On pourrait ainsi considérer \mathfrak{H}'_ω comme une extension de l'espace $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ et on aurait là peut-être une réalisation utile de l'espace $\mathfrak{R}(\hat{\mathfrak{A}}_\omega)$.

Les éléments de $\mathfrak{R}(\hat{\mathfrak{A}}_\omega)$ se présenteraient alors comme des *ultra-distributions*, à rapprocher des «Randverteilungen» de M. KÖTHE (cf. [13] et [25]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chapitres I-II. Actual. Scient. Ind., 858-1142, Hermann, Paris (1934-1951).
- [2] ———, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I-II, Actual. Scient. Ind. 1189 (1953).
- [3] G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung des Laplace-Transformation*, Berlin (1937), New York (1943).
- [4] ———, *Charakterisierung der Laplace-Transformation durch ihr Differentiationsgesetz*. Math. Nachr. **5**, pp. 219-230 (1951).
- [5] ———, *Caratterizzazione della trasformazione di Laplace mediante la relativa regola di derivazione negli spazi L^p e U* , Rend. Acc. N. Lincei, serie VIII, **16** (1954).
- [6] N. DUNFORD, *Spectral theory*. Trans. Amer. Math. Soc. (1943).
- [7] L. FANTAPPIÈ, *La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni a derivate parziali*. Mem. Acc. d'Italia, **1** (1930).
- [8] ———, *Les nouvelles méthodes d'intégration, en termes finis, des équations aux dérivées partielles*, CBRM, Second Colloque sur les équations aux dérivées partielles, à Bruxelles (1954), pp. 95-128.
- [9] A. C. DE FREITAS, *Sur les distributions qui interviennent dans le calcul symbolique des électrotechniciens*, Rev. Fac. Ciências Lisboa, 2.^a Série — A, **3**, pp. 279-310 (1954-55).
- [10] O. HEAVISIDE, *Electromagnetic theory*, vol. I, II, III, London (1893, 1899, 1912).
- [11] E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., New York (1948).
- [12] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*. J. Reine Angew. Math., **191** (1953) pp. 29-49.