

ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLVII - 1960

MEMORIE

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

SERIE VIII - VOLUME VI

SEZIONE I^a (Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

FASCICOLO 1

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Le calcul opérationnel pour des
opérateurs à spectre non borné



ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1960

RELAZIONE

letta e approvata nella seduta del 16 gennaio 1960 sulla Memoria di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, presentata nella seduta del 12 dicembre 1959 dal Socio M. PICONE, intitolata: *Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné* (*).

Le ricerche di molti Autori intese a dare una base rigorosa all'applicazione dei cosiddetti metodi simbolici od operazionali per la risoluzione dei problemi iniziali, al contorno o misti relativi alle equazioni differenziali hanno ricevuto un nuovo vigoroso impulso dai più recenti progressi dell'analisi funzionale. In questo ordine di idee il Silva aveva già ottenuto vari risultati, conseguendo tra l'altro una notevole generalizzazione del calcolo operazionale di Fantappiè. Nella presente Memoria egli compie un ulteriore passo avanti nello sviluppo della teoria, passando a considerare il caso di operatori a spettro non necessariamente limitato. Interessante è anche la considerazione introdotta dal Silva di spazi astratti più generali di quelli delle distribuzioni.

La trattazione di alcuni problemi classici, svolta a titolo di esempio con tali metodi, lascia intravedere la possibilità di valersi dei risultati di questa Memoria anche per lo studio di problemi assai più generali.

Pertanto la Commissione ritiene che la Memoria del prof. José Sebastião e Silva sia degna di essere integralmente accolta negli Atti dell'Accademia.

MAURO PICONE
GIOVANNI SANSONE
CARLO MIRANDA, *relatore*.

(*) Alle spese di stampa della presente Memoria ha generosamente concorso il Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné.

Memoria di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

RIASSUNTO. — Generalizzando risultati ottenuti in lavori precedenti, vengono stabilite le basi di un calcolo operativo relativo ad operatori a spettro non necessariamente limitato, e indicate le sue possibilità di applicazione a problemi misti relativi a equazioni differenziali.

1. INTRODUCTION. — Après le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre borné, introduit par Fantappiè et généralisé dans nos travaux [4] et [5] (voir la Bibliographie à la fin de cet article), et après le calcul relatif à certains opérateurs à spectre vide dans le plan \mathbf{C} (cfr. [8], [9] et [12]), nous nous occupons maintenant du calcul relatif à des opérateurs à spectre non nécessairement borné.

Ce calcul opérationnel comprend, comme cas particuliers, celui des opérateurs à spectre borné et, dans une certaine mesure, celui des opérateurs auto-adjoints dans des espaces hilbertiens. Dans ses applications les plus intéressantes, on est conduit de façon naturelle à considérer des extensions formelles d'espaces normés, selon notre méthode abstraite exposée dans [6], dont la nécessité s'impose ici, les extensions obtenues ne rentrant plus dans le cadre des distributions, dans certains cas concrets. C'est là un fait remarquable que nous avons déjà signalé dans [12].

Dans le calcul opérationnel des opérateurs Θ auto-adjoints (cfr. par exemple [3], chap. VIII et IX), on définissait directement l'algèbre des opérateurs $f(\Theta)$, à *domaine variable*. Mais il est plus commode et plus intéressant de commencer par construire une extension de l'espace de Hilbert, de façon que Θ soit prolongeable à tout l'espace obtenu: c'est ce qu'ont fait, au fond, les physiciens dans la mécanique ondulatoire, en introduisant les distributions de façon heuristique.

Le schéma que nous allons présenter ici n'inclue pas le cas des opérateurs à spectre vide dans \mathbf{C} (en réalité, leur spectre n'est plus vide, si l'on adjoint à \mathbf{C} des points impropres, de façon à le rendre homéomorphe au cercle ou disque fermé). En général, dans les problèmes concrets, ces opérateurs se rapportent à la variable temps, tandis que les opérateurs dont nous allons nous occuper concernent les variables spaciales. Cette seconde méthode opérationnelle s'applique à des problèmes mixtes (avec des conditions initiales

et des conditions aux limites) qui sont traités comme des problèmes de Cauchy abstraits par rapport à t .

D'ailleurs, ces deux méthodes sont intimement reliées (voir n° 8), comprenant comme cas particulier la méthode de la transformation de Laplace de distributions vectorielles, telle que l'a employée Lions (cfr. [1] et [2]). Leur connexion devient plus évidente, avec le calcul opérationnel à plusieurs variables, que nous nous proposons d'exposer dans une prochaine Note.

Nous nous bornons à exposer ici nos résultats sans démonstration.

2. L'ESPACE DES FONCTIONS HOLOMORPHES A CROISSANCE LENTE SUR UN ENSEMBLE FERMÉ. — Par la suite, nous désignerons par F un vrai sous-ensemble, fermé et non vide, du plan \mathbf{C} de la variable complexe, et par F_k l'ensemble des points de \mathbf{C} dont la distance à F est $< 1/k$ (pour tout $k = 1, 2, \dots$) ⁽¹⁾. Dans [10] nous avons défini l'espace $\mathfrak{U}_\omega(F)$, des *fonctions holomorphes à croissance lente sur F* , de la façon suivante:

D'abord nous considérons, pour tout k , l'espace $\mathfrak{U}_k(F)$ des fonctions complexes $\varphi(z)$, définies et holomorphes dans F_k , telles que pour chaque φ il existe un nombre k vérifiant la condition $|\varphi(z)| \leq k|z|^k$ pour tout $z \in F_k$, cet espace étant muni des notions usuelles de somme et de produit par scalaires, et d'une topologie \mathfrak{T}_k définie par la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k}.$$

Si l'on identifie chaque fonction $\varphi \in \mathfrak{U}_k(F)$ à la fonction $\bar{\varphi} \in \mathfrak{U}_{k+1}(F)$ qui est la restriction de φ à F_{k+1} , on peut écrire $\mathfrak{U}_k(F) \subset \mathfrak{U}_{k+1}(F)$ (pour tout k). Nous posons alors, par définition:

$$\mathfrak{U}_\omega(F) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{U}_k(F).$$

Dans $\mathfrak{U}_\omega(F)$ on définit d'une façon évidente des notions de somme et de produit par scalaires. Nous y introduisons la topologie, \mathfrak{T}_ω , de la limite inductive des espaces normés $\mathfrak{U}_k(F)$. On démontre alors que $\mathfrak{U}_\omega(F)$ est un espace (\mathfrak{S}_2) .

Remarque. — Le fait que $\mathfrak{U}_\omega(F)$ soit un espace (\mathfrak{S}_2) (ou un espace (\mathfrak{RN}^*) comme nous disons dans [7]) entraîne plusieurs conséquences importantes, dont il suffit de retenir, pour la suite, les deux critères suivants:

I) *Pour qu'une suite (φ_n) d'éléments de $\mathfrak{U}_\omega(F)$ converge, au sens de \mathfrak{T}_ω , vers un élément ψ de $\mathfrak{U}_\omega(F)$, il faut et il suffit qu'il existe un k tel que:*
1° ψ et φ_n appartiennent à $\mathfrak{U}_k(F)$ pour tout n ; 2° *la fonction $\varphi_n(z) - \psi(z)$, divisée par $(1+|z|)^k$, converge vers ψ , uniformément sur F_k , lorsque $n \rightarrow \infty$.*

II) *Pour qu'un ensemble $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{U}_\omega(F)$ soit borné au sens de \mathfrak{T}_ω , il faut et il suffit qu'il existe un k et un μ tels que, pour tout $\varphi \in \mathfrak{H}$, on ait: $\varphi \in \mathfrak{U}_k(F)$ et $|\varphi(z)| < \mu|z|^k$ sur F_k .*

(1) Dans certains cas, il sera probablement nécessaire de considérer, au lieu des F_k , une autre suite décroissante de voisinages F_k^* de F , tels que $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k^* = F$ et que $F_k \subset F_k^*$ pour tout k .

3. REPRÉSENTATION CANONIQUE DES ÉLÉMENTS DE $\mathfrak{A}_\omega(F)$. — Nous dirons qu'un ensemble ouvert V est un *voisinage normal* de F , s'il existe deux entiers k et k' , tels que $k' < k$ et que $F_{k'} \subset V \subset F_k$. En s'appuyant sur la propriété de Heine-Borel, on démontre aisément que, pour tout k , il existe un voisinage normal V de F tel que $\bar{V} \subset F_k$ et que, dans tout cercle $|z| \leq \rho$, la frontière de V soit formée d'un nombre fini de lignes simples rectifiables. Il en sera de même, donc, pour la frontière de l'intersection de V avec le cercle $|z| \leq \rho$; nous désignerons par C_ρ la frontière de cette intersection, que nous supposerons orientée de façon à laisser à droite les points de F . D'autre part, nous désignerons par $\mathfrak{A}_k^*(F)$ l'ensemble des fonctions $\varphi \in \mathfrak{A}_k(F)$ telles que $z\varphi(z)$ soit bornée dans F_k . Alors, on voit aussitôt que, pour toute $\varphi \in \mathfrak{A}_k^*(F)$ et tout $\rho > 0$, on a

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{\varphi(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda, \quad \text{avec } z \in V, |z| < \rho.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par D_ρ la partie de C_ρ n'appartenant pas à la frontière de V , on voit encore que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{D_\rho} \frac{\varphi(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda = 0, \quad \text{pour tout } z \in V,$$

compte tenu du fait que $\lambda\varphi(\lambda)$ est bornée dans F_k . Nous pouvons donc écrire, d'après une généralisation naturelle de l'intégrale:

$$(3.1) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{V}} \frac{\varphi(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda, \quad \text{pour tout } z \in V,$$

où \dot{V} désigne la frontière de V , supposée orientée de façon à laisser à droite les points de F . Cette intégrale peut se décomposer en une *partie propre* et une *partie impropre*, en posant $\dot{V} = \Gamma \cup \Delta$, où Γ est, par exemple, la partie de \dot{V} contenue dans $|z| \geq 1$. Par le changement de variable $\lambda \rightarrow 1/\lambda$, l'intégrale sur Γ se transforme en une intégrale sur l'image, Γ^* , de Γ par l'inversion $\lambda \rightarrow 1/\lambda$. Nous désignerons par Γ_ε^* ($0 < \varepsilon < 1$) la partie de Γ^* contenue dans la couronne $\varepsilon \leq |z| \leq 1$ et nous admettrons, pour commodité, l'hypothèse suivante:

$\alpha)$ La longueur totale de Γ_ε^* tend vers une limite finie lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Dans les cas courants de la pratique (où F est une droite, une bande, etc.) on peut toujours choisir V de façon que cette hypothèse soit vérifiée.

Cela posé nous désignerons par \mathfrak{h} l'application $\lambda \rightarrow (\hat{z} - \lambda)^{-1}$ de $\mathbf{C} - F$ dans $\mathfrak{A}_\omega(F)$, c'est-à-dire nous posons

$$\mathfrak{h}(\lambda) = \frac{1}{\hat{z} - \lambda}, \quad \text{pour tout } \lambda \notin F.$$

On voit aisément que la fonction $\mathfrak{h}(\lambda)$ à valeurs dans $\mathfrak{A}_\omega(F)$ est bornée dans $\mathbf{C} - F_k$, pour tout k (au sens de \mathfrak{T}_ω). Il en découle, d'une part, que $\lambda\mathfrak{h}(\lambda)$

est aussi bornée dans tout $\mathbf{C} - F_k$ (cfr. [11]) et, d'autre part, que $h(\lambda)$ est holomorphe dans $\mathbf{C} - F$ (cfr. [9], p. 10). Cela permet d'établir, compte tenu de α), que l'intégrale (3.1) est convergente même au sens de \mathfrak{T}_ω ; on peut donc écrire, pour toute $\varphi \in \mathfrak{A}_k^*(F)$:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\mathbf{V}}} \frac{\varphi(\lambda)}{\hat{z} - \lambda} d\lambda, \quad \text{au sens de } \mathfrak{T}_\omega.$$

Alors, pour toute $\varphi \in \mathfrak{A}_k(F)$, on aura:

$$\varphi = \frac{\hat{z}^{k+1}}{2\pi i} \int_{\dot{\mathbf{V}}} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^{k+1}(\hat{z} - \lambda)} d\lambda.$$

Mais nous conviendrons d'écrire encore, dans le cas général:

$$(3.2) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\mathbf{V}}} \frac{\varphi(\lambda)}{\hat{z} - \lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\xi \rightarrow \varphi, \xi \in \mathfrak{A}_k^*(F)} \int_{\dot{\mathbf{V}}} \frac{\xi(\lambda)}{\hat{z} - \lambda} d\lambda$$

pourvu que l'espace $\mathfrak{A}_k^*(F)$ soit dense dans $\mathfrak{A}_k(F)$ au sens de \mathfrak{T}_ω . Or, suivant une technique semblable à celle employée dans [8], n° 3, on démontre que cette condition est impliquée par l'hypothèse suivante:

$\beta)$ *Le complémentaire de chaque composante de F contient au moins un angle du plan \mathbf{C} .*

Nous admettrons pour commodité cette hypothèse, qui se trouve vérifiée dans les cas courants de la pratique. Puisque k est arbitraire, la formule (3.2) donne une représentation canonique des éléments de $\mathfrak{A}_\omega(F)$; elle montre que, lorsque λ parcourt $\mathbf{C} - F$, les vecteurs $h(\lambda)$ forment une base vectoriel-topologique de l'espace $\mathfrak{A}_\omega(F)$. Cette formule fournit donc un moyen pour obtenir l'expression générale des applications linéaires continues de $\mathfrak{A}_\omega(F)$ dans un espace localement convexe E , complet pour les suites. Mais, pour le moment, il nous intéresse seulement le cas où E est une algèbre et où les applications linéaires conservent le produit.

4. LE CALCUL OPÉRATIONNEL RELATIF À $\mathfrak{A}_\omega(F)$. — Soit \mathbf{A} une algèbre munie d'élément unité e et d'une topologie d'espace localement convexe, par rapport à laquelle le produit soit séparément continu (pour commodité nous posons $\lambda e = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$). En raisonnant à peu près comme dans [8] et [9], th. 2, on démontre aisément le résultat suivant:

THÉORÈME. *Il existe une correspondance biunivoque $\mathfrak{H} \longleftrightarrow \mathbf{a}$ entre les homomorphismes continus \mathfrak{H} de $\mathfrak{A}_\omega(F)$ dans \mathbf{A} , qui font correspondre à la fonction $\varphi(z) \equiv 1$ l'élément unité de \mathbf{A} , et les éléments \mathbf{a} de \mathbf{A} vérifiant les conditions suivantes:*

1) *pour tout $\lambda \in \mathbb{C} - F$, $\mathbf{a} - \lambda$ est un élément inversible de \mathbf{A} (i.e. le spectre de \mathbf{a} est contenu dans F).*

II) la fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ , à valeurs dans \mathbf{A} , est bornée dans $\mathbf{C} - \mathbf{F}_k$, pour tout $k = 1, 2, \dots$.

Cette correspondance est définie par les formules réciproques

$$\mathfrak{H}(\hat{z}) = \mathbf{a} \quad , \quad \mathfrak{H}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\mathbf{V}}} \frac{\varphi(\lambda)}{\mathbf{a} - \lambda} d\lambda, \quad \text{pour } \varphi \in \mathfrak{A}_\omega(\mathbf{F}),$$

le chemin $\dot{\mathbf{V}}$ étant choisi comme on l'a précisé au n° 3 et l'intégrale étant définie par prolongement continu:

$$\int_{\dot{\mathbf{V}}} \frac{\varphi(\lambda)}{\mathbf{a} - \lambda} d\lambda = \lim_{\xi \rightarrow \varphi, \xi \in \mathfrak{A}_\omega^*(\mathbf{F})} \int_{\dot{\mathbf{V}}} \frac{\xi(\lambda)}{\mathbf{a} - \lambda} d\lambda.$$

On pose alors

$$\mathfrak{H}(\varphi) = \varphi(\mathbf{a}),$$

ce qui est justifié par les propriétés caractéristiques du calcul opérationnel:

$$(\varphi + \psi)(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a}) + \psi(\mathbf{a}), \quad (\varphi \cdot \psi)(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a}) \cdot \psi(\mathbf{a}), \quad (\lim \varphi_n)(\mathbf{a}) = \lim \varphi_n(\mathbf{a}),$$

avec les conditions: si $\varphi(z) \equiv 1$, $\varphi(\mathbf{a}) = 1$; si $\varphi(z) \equiv z$, $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. Dans la pratique, pour calculer $\varphi(\mathbf{a})$, on emploiera plutôt la formule

$$\varphi(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a}^p}{2\pi i} \int_{\dot{\mathbf{V}}} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^p (\mathbf{a} - \lambda)} d\lambda,$$

où p est un entier suffisamment élevé pour que l'intégrale existe au sens usuel [relativement à la topologie de $\mathfrak{A}_\omega(\mathbf{F})$].

5. CAS OÙ \mathbf{F} EST SCONNEXE. – Supposons que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$, où \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 sont deux ensembles séparés. Alors, si l'on pose:

$$\mathbf{e}_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\dot{\mathbf{V}}_k} \frac{d\lambda}{\mathbf{a} - \lambda}, \quad \text{pour } k = 1 \text{ ou } 2,$$

les chemins $\dot{\mathbf{V}}_k$ étant choisis d'après les indications du n° 3, on démontre aisément que

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_2.$$

On a donc ainsi une *partition de l'unité en deux projecteurs*, \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 . Si l'on pose encore $\mathbf{a}_k = \mathbf{e}_k \mathbf{a} = \mathbf{a} \mathbf{e}_k$, pour $k = 1$ ou 2 , on voit de même que

$$\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{a}_1) + \varphi(\mathbf{a}_2), \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{A}_\omega(\mathbf{F}).$$

En particulier, \mathbf{F} peut être la réunion d'une suite d'ensembles connexes $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$, chacun étant séparé de la réunion de tous les autres. Alors on a évidemment $\varphi(\mathbf{a}) = \sum_1^\infty \varphi(\mathbf{a}_n)$, où $\mathbf{a}_n = \mathbf{e}_n \mathbf{a}$, \mathbf{e}_n étant défini comme plus haut, pour tout n . Plus particulièrement encore, il se peut que les \mathbf{F}_n se

réduisent à des points λ_n (valeurs propres de \mathbf{a}) et que les λ_n soient des pôles de $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$, tels que, par exemple, on ait:

$$(\mathbf{a} - \lambda)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathbf{c}_{n,1}}{\lambda_n - \lambda} + \cdots + \frac{\mathbf{c}_{n,\nu_n}}{(\lambda_n - \lambda)^{\nu_n}} \right), \quad \text{avec } \mathbf{c}_{n,r} \in \mathbf{A}.$$

Alors on aura, pour tout n , $\varphi(\mathbf{a}_n) = \sum_{k=0}^{\nu_n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \varphi^{(k)}(\lambda_n) \mathbf{c}_{n,k}$.

6. CAS OÙ F EST CONTENU DANS L'AXE RÉEL. — Supposons que F est contenu dans \mathbf{R} . Alors il est aisé de voir que la fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ définit une ultra-distribution de frontière $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}$ sur \mathbf{R} , à valeurs dans \mathbf{A} et à décroissance presque-rapide ⁽²⁾. Dans ce cas on peut calculer $\varphi(\mathbf{a})$, soit par la « formule d'intégration complexe » (3.2), où $\dot{\mathbf{V}}$ peut être la frontière d'une bande horizontale symétrique dépendante de φ (orientée de façon à laisser \mathbf{R} à gauche), soit par la « formule d'intégration réelle »:

$$\varphi(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}_{\mathbf{a}}(x) \varphi(x) dx.$$

Evidemment, le support de l'ultra-distribution $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}$ sera contenu dans F. En particulier, $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}$ peut être une distribution (à valeurs dans \mathbf{A}) à décroissance rapide; alors, on peut étendre le calcul opérationnel à l'espace \mathfrak{M} des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente sur \mathbf{R} [$\mathfrak{M}_0(\mathbf{R})$ est un sous-espace dense de \mathfrak{M} et sa topologie est plus fine que celle induite par \mathfrak{M}]. On peut encore, dans certains cas, prolonger le calcul opérationnel à d'autres espaces: par exemple, dans le cas des opérateurs auto-adjoints dans des espaces hilbertiens, on arrive de cette façon à l'espace des fonctions continues à croissance lente sur \mathbf{R} ou même à des espaces plus étendus, associés à la mesure $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}$. Cela confirme ce que nous avons annoncé à ce sujet dans l'Introduction.

7. TYPES D'ALGÈBRES \mathbf{A} AUXQUELLES S'APPLIQUE LE CALCUL OPÉRATIONNEL ÉTABLI. — Outre le cas trivial des algèbres de Banach, il y a un type assez général d'algèbres \mathbf{A} qui se présentent couramment dans les applications, de la façon suivante:

Dans beaucoup de problèmes concernant des équations aux dérivées partielles, on est induit à construire un calcul opérationnel pour des opérateurs linéaires *non continus* Θ , dont le domaine D_{Θ} , est un vrai sous-ensemble d'un espace localement convexe E (qui est souvent un espace hilbertien) et dont le contre-domaine est E. Dans plusieurs cas (ceux qui nous intéressent en ce moment) il existe au moins un $\lambda_0 \in \mathbf{C}$ tel que $\Theta - \lambda_0$ est inversible (c'est-à-dire, λ_0 n'appartient pas au spectre de Θ). Posons

(2) Dans [10] nous nous sommes occupé de ultra-distributions scalaires, mais l'extension au cas vectoriel n'offre pas de difficultés sérieuses; nous comptons d'y revenir.

$\Phi = \Theta - \lambda_0$. Alors, d'après la méthode générale exposée dans [6] (pour le cas particulier considéré au n° 1), on peut construire une extension formelle \tilde{E} de E (et seulement une, à un isomorphisme près), de façon que l'on puisse prolonger Φ en une application linéaire $\tilde{\Phi}$ biunivoque de \tilde{E} dans lui-même, telle que \tilde{E} soit la fermeture de E par rapport à $\tilde{\Phi}$, c'est-à-dire: tout élément U de \tilde{E} soit de la forme $U = \tilde{\Phi}^n u$, avec $u \in E$ et n entier.

Les règles de calcul dans \tilde{E} sont très simples. En général, on pourra écrire, sans danger de confusion, Φ au lieu de $\tilde{\Phi}$. Deux éléments $\Phi^m u$ et $\Phi^n v$ peuvent toujours se mettre sous la forme d'exposant commun: si on avait, par exemple, $m > n$, on aurait aussi $\Phi^n v = \Phi^m \bar{v}$, avec $\bar{v} = (\Phi^{-1})^{m-n} v \in E$. Cela étant, la somme, le produit par scalaires et l'opération Φ se calculent dans \tilde{E} d'après les formules:

$$\Phi^n u + \Phi^n v = \Phi^n (u + v) \quad , \quad \Phi^n (\alpha u) = \alpha \Phi^n u \quad , \quad \Phi (\Phi^n u) = \Phi^{n+1} u$$

Enfin le critère de l'égalité (les exposants étant égaux) sera:

$$\Phi^n u = \Phi^n v, \quad \text{si et seulement si} \quad u = v.$$

Puisque l'on a $\Theta = \Phi + \lambda_0$, l'opérateur Θ lui-même peut alors se prolonger en une application linéaire (non nécessairement biunivoque) de \tilde{E} sur \tilde{E} . D'ailleurs, il est aisé de voir que le spectre de $\tilde{\Theta}$ coïncide avec celui de Θ .

D'après ce qui précède, on aura $\tilde{E} = U_0^\infty \Phi^n(E)$. Désignons par \mathfrak{T} la topologie de E . Suivant la méthode générale exposée dans [6], § 2, nous considérons \tilde{E} muni de la plus fine topologie, \mathfrak{T}_∞ , qui rende continu l'opérateur $\tilde{\Phi}$ et induise dans E une topologie moins fine que \mathfrak{T} .

Dans les cas courants, E est un espace normé et Φ^{-1} une application continue de E sur D_Φ (au sens de \mathfrak{T}). Alors \tilde{E} sera la limite inductive des espaces normés $\Phi^n(E)$, images de E par les puissances entières de Φ , l'application identique de $\Phi^n(E)$ dans $\Phi^{n+1}(E)$ étant continue. Dans nombre de cas concrets cette application sera complètement continue: alors \tilde{E} est un espace du type (\mathfrak{S}_2) , ce qui simplifie beaucoup les questions.

Cela posé, \mathbf{A} pourra être l'algèbre $\mathfrak{L}_b(\tilde{E})$ des applications linéaires continues de \tilde{E} dans \tilde{E} , munie de la topologie de la convergence bornée (dans les cas usuels, il suffit de considérer celle de la convergence simple). Pour essayer de définir $\varphi(\Theta)$, avec $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega(F)$, il reste à voir si les conditions I et II du Théorème du n° 4 sont vérifiées (on peut prendre pour F , en général, le spectre de Θ , et alors il s'agit seulement de II). Supposons ces conditions vérifiées et prenons arbitrairement $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega(F)$ et $U = \Phi^n u$, avec $u \in E$; alors on aura:

$$\varphi(\Theta) U = \frac{1}{2\pi i} \Phi^n \Theta^p \int_{\tilde{V}} \frac{1}{\lambda^p (\Theta - \lambda)} u d\lambda,$$

où l'on suppose p suffisamment élevé pour que l'intégrale ait le sens usuelle, le chemin \tilde{V} étant choisi d'après les indications du n° 4.

Si l'espace E est *tonnellé*, on voit que l'application bilinéaire $(\varphi, U) \rightarrow \varphi(\Theta)U$ de $\mathfrak{A}_\omega(F) \times \tilde{E}$ dans \tilde{E} est *hypocontinue relativement aux parties bornées*. En particulier, si \tilde{E} est un espace (\mathfrak{S}_α) , on peut dire beaucoup plus: pour tout k et tout n , il existe un m tel que la restriction de cette application à $\mathfrak{A}_k(F) \times \Phi^n(E)$ soit une application continue de ce produit (normé) dans l'espace normé $\Phi^m(E)$.

8. PROBLÈMES DE CAUCHY ABSTRAITS. - Considérons d'abord les problèmes du type:

$$(8.1) \quad \frac{dU}{dt} + [a(t) - b(t)\Theta]U = f(t), \quad U(0) = U_0,$$

avec $\Theta \in \mathfrak{L}_b(\tilde{E})$, $U_0 \in E$, $a(t)$ et $b(t)$ étant des fonctions scalaires données, localement sommables, $f(t)$ une fonction l. s. donnée, à valeurs dans \tilde{E} , et $U(t)$ une fonction inconnue à valeurs dans \tilde{E} . Supposons que E est tonnelé, F contenu dans un demi-plan gauche, $\operatorname{Re} z \leq \alpha$, et Θ vérifie les conditions I et II du Théorème du n° 4, avec $\alpha = \Theta$. Si l'on remplace Θ par le paramètre complexe z , le problème est résolu par la formule classique:

$$(8.2) \quad U(t) = e^{A(t) - B(t)z} u_0 + \int_0^t e^{A(t) - A(\tau)} e^{[B(t) - B(\tau)]z} f(\tau) d\lambda,$$

où

$$A(t) = - \int a(t) dt, \quad B(t) = - \int b(t) dt.$$

Or, par une analyse semblable à celle dont nous avons présenté les résultats dans [12], on voit que, si $b(t) \geq 0$ pour tout t , la fonction $e^{[B(t) - B(\tau)]z}$ de t à valeurs (fonctions de z) dans $\mathfrak{A}_\omega(F)$ est continue dans $[\tau, +\infty[$ pour tout τ , et presque partout dérivable dans cet intervalle. Donc, pour tout $t \geq \tau$, l'expression $e^{[B(t) - B(\tau)]\Theta}$ a un sens d'après le calcul opérationnel établi, et, en employant les propriétés caractéristiques de ce calcul, ainsi que l'hypocontinuité de l'application $(\varphi, U) \rightarrow \varphi(\Theta)U$, on démontre aisément que la formule (8.2) donne une solution du problème dans l'intervalle $[0, +\infty]$, si l'on y met Θ à la place de z . Elle donnera encore une solution du problème dans toute la droite, si F est contenu dans une bande verticale (c'est là une situation qui se présente, par exemple, dans le cas de l'équation de Schrödinger, avec $\Theta = i\mathfrak{H}$).

Quant à l'unicité de la solution, on voit par la méthode de la variation de la constante arbitraire qu'elle est assurée dans le cas particulier où l'opérateur $e^{B(t)\Theta}$ est inversible pour tout $t \geq 0$ (donc, si F est contenu dans une bande verticale). Dans le cas général, la question de l'unicité exige des considérations qu'il ne serait pas facile de résumer ici.

On peut encore traiter, d'une façon analogue, les problèmes du 2^d ordre par rapport à t :

$$(8.3) \quad \frac{d^2 U}{dt^2} + a(t) \frac{dU}{dt} + [b(t) - c(t)\Theta]U = f(t), \quad U(0) = U_0, \quad U'(0) = U_1,$$

en développant une analyse semblable à celle de [12]. Dans ce cas, il faut en général considérer des ensembles F contenus dans des voisinages du demi-axe négatif, \mathbf{R}^- , ayant pour frontière des paraboles du type $x = \alpha^2 - (y/\alpha)^2$ (3).

Supposons que F est précisément un de ces voisinages; alors, si on le préfère, on peut employer, au lieu de $\mathfrak{U}_\omega(F)$, l'espace que l'on en déduit par le changement de variable $\lambda \rightarrow \lambda^2$, ce qui conduit à une formule opérationnelle d'un type déjà considéré dans [12], les rôles de $\varphi(\lambda)$ et $(a - \lambda)^{-1}$ étant maintenant renversés:

$$\varphi(a) = \frac{1}{\pi i} \int_D \frac{\lambda \varphi(\lambda^2)}{\lambda^2 - a^2} d\lambda, \quad \varphi \in \mathfrak{U}_\omega(F).$$

Ici D est une droite $\operatorname{Re} z = m$, avec $m > 0$, parcourue de bas en haut (l'image de F par la substitution $\lambda \rightarrow \lambda^2$ est une bande verticale symétrique).

Revenons maintenant à notre problème, dans le cas particulier où $a(t) \equiv b(t) \equiv 0$, $c(t) \equiv 1$, $U_0 = U_1 = 0$. Alors, si l'on considère un paramètre complexe z au lieu de Θ , on aura

$$U(t) = \int_0^t \sinh z(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Or, si Θ vérifie les conditions exigées, il est aisé de voir que l'on a, pour tout t réel:

$$\sinh t \Theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{m-\infty i}^{m+\infty i} e^{t\lambda} (\lambda^2 - \Theta)^{-1} d\lambda = \mathfrak{L}_\lambda^{-1} \{ (\lambda^2 - \Theta)^{-1} \}$$

où \mathfrak{L} est la transformation de Laplace pour des distributions de t (dans ce cas fonctions) à valeurs dans $\mathfrak{L}_b(\tilde{E})$. Ainsi, dans le cas simple considéré, on retombe pratiquement dans la méthode de la transformation de Laplace, telle que l'a systématisée Lions dans [1]. Dans le cas général, si l'on pose $\mathfrak{D} = \frac{1}{c(t)} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{a(t)}{c(t)} \frac{d}{dt} + \frac{b(t)}{c(t)}$, le calcul opérationnel à plusieurs variables, que nous comptons d'exposer prochainement, permet d'écrire, dans le cas où $U_0 = U_1 = 0$ (auquel on peut toujours se ramener):

$$u = (\mathfrak{D} - \Theta)^{-1} f(t) / c(t).$$

Cette méthode mixte, que nous avons annoncé dans l'Introduction, est plus commode pour la mise au point des questions d'unicité.

9. QUELQUES EXEMPLES CONCRETS. — Pour mieux saisir les traits essentiels de l'application de la méthode exposée dans cette Note, il convient

(3) Dans certains cas, il sera probablement nécessaire de remplacer ici la suite (F_k) par une autre suite (F_k^*) de voisinages de F (cfr. note du n° 2).

de nous borner à des exemples connus *très simples*. Considérons d'abord l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, t),$$

avec les conditions aux limites $u(0, t) \equiv u(1, t) \equiv 0$, et les conditions initiales $u(x, 0) \equiv u_0(x)$, $u_t(x, 0) \equiv u_1(x)$, dans l'intervalle $K = [0, 1]$. Soit E maintenant l'espace L_K^2 des fonctions à carré sommable dans K et $\Theta = \partial^2 / \partial x^2 = D_x^2$; on sait que, pour toute fonction $f \in L_K^2$, il existe une et seulement une fonction continue φ telle que $D^2 \varphi = f$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$; ainsi Θ est une application biunivoque d'un sous-espace de L_K^2 sur L_K^2 . On peut donc considérer une extension vectoriel-topologique, $\tilde{E} = \tilde{L}_K^2$ de L_K^2 , comme on l'a indiquée au n° 7, de façon que Θ se prolonge en une application biunivoque de l'espace \tilde{E} dans lui-même, et il n'est pas difficile de reconnaître que \tilde{E} s'identifie à l'espace (vectoriel topologique) des distributions de support contenu dans K , lequel, à son tour, s'identifie à un sous-espace de l'espace des distributions périodiques de période 2. Alors, en général, on peut même poser le problème avec $u_0, u_1 \in \tilde{E}$, en supposant que, pour tout t , $F(x, t)$ et $u(x, t)$ représentent des éléments de \tilde{E} . En rappelant l'expression de $(\Theta - \lambda)^{-1}$ qui fait intervenir la suite des valeurs propres (négatifs) et des fonctions propres de Θ , et en appliquant notre méthode, avec les remarques du n° 5, on arrive automatiquement à la forme usuelle de la solution, obtenue au moyen de séries de Fourier. *Mais maintenant on est sûr, a priori, que le développement ainsi obtenu converge et définit la solution unique du problème, au sens de la topologie de \tilde{E} , c'est-à-dire au sens de la topologie des distributions de support contenu dans K .*

Supposons maintenant que les deux conditions aux limites considérées soient remplacées par la seule condition $u(0, t) \equiv u(1, t)$ (i.e. on exige que la solution soit périodique de période 1). Dans ce cas, on aura encore $E = L_K^2$ et $\Theta = D_x^2$, mais, puisque zéro est maintenant une valeur propre de Θ , on devra prendre, par exemple, $\Phi = \Theta - 1$. Alors il est aisé de voir que l'extension vectoriel-topologique \tilde{E}_Φ de E par rapport à Φ s'identifie à l'espace des distributions périodiques de période 1, et l'application de notre méthode conduit directement à la solution, dans son cadre naturel.

Considérons d'autre part l'équation de la diffusion

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - k^2 \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t) \quad (k \text{ réel}),$$

avec la condition initiale $u(x, 0) = u_0$, en exigeant que la solution soit à croissance lente (il ne s'agit donc pas d'un vrai problème de Cauchy concret, puisque l'on ajoute à la condition initiale une condition aux limites: celle de la croissance à l'infini). Dans ce cas, on peut prendre pour E l'espace L^2 , des fonctions (de x) à carré sommable sur \mathbf{R} et $\Theta = D_x^2$; d'autre part, on pourrait choisir encore $\Phi = \Theta - 1$, mais, pour arriver à l'espace des distributions tempérées, i.e. à croissance lente (auquel on est conduit natu-

rellement dans la mécanique quantique), il faut prendre, par exemple, $\Phi = (\hat{x}^2 + 1)(D_x^2 - 1)$. Maintenant, le spectre de l'opérateur Θ est continu: il coïncide avec le demi-axe négatif \mathbf{R}^- , incluant l'origine. D'après les considérations de n° 8, on conclut que le problème est résoluble seulement pour $t > 0$, ce qui dénonce le caractère non réversible des phénomènes de diffusion.

Ces trois exemples sont très simples, comme on l'avait annoncé. Mais la méthode exposée permettra non seulement de revoir, sous un angle nouveau, les cas beaucoup plus généraux et compliqués que l'on a considéré jusqu'à présent, mais aussi de s'attaquer à de nouveaux problèmes, en particulier ceux des types (8.1) et (8.3), Θ étant un opérateur différentiel, *non nécessairement hermitien*, à coefficients dépendants des seules variables spatiales, x_1, x_2, \dots, x_n .

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. L. LIONS, *Problèmes aux limites en théorie des distributions*. « Acta Mathematica », 94, pp. 1-153 (1955).
- [2] — *Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes*. « Bull. Soc. Math. France », 84, pp. 9-95 (1956).
- [3] F. RIESZ et B. SZ.-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Gautier-Villars, Paris, 3^e édition. 1955.
- [4] J. SEBASTIÃO E SILVA, *As funções analíticas e a análise funcional*. « Portugaliae Math. », 9, pp. 1-129 (1950).
- [5] — *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*. « Port. Math. », 12, pp. 1-46 (1953).
- [6] — *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*. « Rev. Fac. Ciências Lisboa », 2^a série A, 4, pp. 79-186 (1954-55).
- [7] — *Su certe classi di spazi localmente convessi, importanti per le applicazioni*. « Rend. Math. Univ. Roma », série V, 14, pp. 388-410 (1955).
- [8] — *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*. « Port. Math. », 14, pp. 105-132 (1955).
- [9] — *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*. « Port. Math. », 17, pp. 1-17 (1958).
- [10] — *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*. « Math. Annalen », 136, pp. 58-59 (1959).
- [11] — *Corrections et compléments de l'article « Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite »*. « Port. Math. », 18, pp. 155-156 (1959).
- [12] — *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables*. « Rend. Accad. Lincei ».

R. Morghen, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

ROMA, 1960 — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei