PORTUGALIAE MATHEMATICA

Revista editada
por
ANTÓNIO MONTEIRO
com
a cooperação de
HUGO B. RIBEIRO, JOSÉ DE ALBUQUERQUE, JOSÉ S. PAULO, M. ZALUAR NUNES

VOLUME 3
1942

FACULDADE DE CIÊNCIAS
LISBOA — PORTUGAL

Publicação subsidiada pelo Instituto para a Alta Cultura

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 3—Fasc. 2—Junho, 1942

LES ENSEMBLES FERMÉS ET LE PROBLÈME DE WIENER

par J. SEBASTIÃO E SILVA[1] (À LISBONNE)

(Recebido em 1942, Abril, 9)

Dans cette note, on applique à l'étude du problème de Wiener quelques propriétés concernant la notion d'ensemble fermé, ce qui permet d'établir, d'une façon nouvelle, quelques résultats dûs à M. Wiener, et encore d'autres résultats. Au § 4, on démontre l'identité entre les espaces (S), considérés par M. Wiener, et les espaces (F) denses en soi. Au § 6, on indique trois conditions, nécessaires et suffisantes pour qu'un espace (S) soit un espace (J_1); la première et la troisième de ces conditions portent directement sur la famille Σ d'applications, au moyen de laquelle est définie la topologie de l'espace (S) considéré.

1. Les espaces (F). Soit 1 un ensemble abstrait et soit $\overline{}$ un opérateur, qui, à chaque ensemble $A \subset 1$, fasse correspondre un ensemble $\overline{A} \subset 1$, nommé ensemble de fermeture de A.

Nous dirons, avec M. A. Monteiro[2], que le système $(1, \overline{})$ constitue un espace (F), si l'on a: $\overline{\mathrm{I}}$) $A \subset \overline{A}$; $\overline{\mathrm{II}}$) $\overline{0} = 0$; $\overline{\mathrm{III}}$) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$; $\overline{\mathrm{IV}}$) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, quels que soient les ensembles A et B. Un espace (F) est donc un espace (V) qui satisfait à la condition $\overline{\mathrm{IV}}$).

Les espaces (F) possèdent cette propriété importante, que leur topologie est complètement déterminée par la famille $\mathfrak{F}$ des ensembles fermés, c'est-à-dire, des ensembles F tels que $\overline{F} = F$. En effet, dans un espace (F), l'ensemble de fermeture d'un ensemble A quelconque est le produit de tous les ensembles F qui contiennent A; c'est-à-dire, $\overline{A} = \prod_{\alpha} F_{\alpha}$, où $F_{\alpha} \in \mathfrak{F}; \supset A$. Alors, nous écrirons $(1, \overline{}) = (1, \mathfrak{F})$.

Deux topologies τ et τ^* étant définies sur un même ensemble abstrait 1, par l'intermédiaire des familles des ensembles fermés $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}^*$, respectivement, nous dirons que la topologie τ «contient» la topologie τ^*, et nous

[1] Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura.

[2] *Les ensembles fermés et les fondements de la topologie*, «Port. Math.», vol. 2, 1941, pág.

écrirons $\tau \supset \tau^*$, si l'on a $\mathfrak{F} \supset \mathfrak{F}^*$ (ou, ce qui revient au même, si la topologie τ n'est pas modifiée quand on adjoint à $\mathfrak{F}$ la famille $\mathfrak{F}^*$).

En général, la connaissance de *tous* les ensembles fermés dans un espace (F) n'est pas nécessaire pour déterminer la topologie de cet espace. En effet, la famille $\mathfrak{F}$ des ensembles fermés, satisfait aux conditions suivantes: 1) les ensembles 0 et 1 appartiennent à $\mathfrak{F}$; 2) une sous-famille quelconque $\{F_\alpha\}$ de la famille $\mathfrak{F}$ étant donnée, on a $\prod\limits_\alpha F_\alpha \in \mathfrak{F}$, ce que l'on exprime en disant que la famille $\mathfrak{F}$ est complètement multiplicative. Alors, si l'on désigne par $\mathfrak{U}$ une sous-famille de $\mathfrak{F}$, telle que tout ensemble $F \in \mathfrak{F}$ puisse s'exprimer au moyen d'un produit d'ensembles appartenant à $\mathfrak{U}$, la connaissance de $\mathfrak{U}$ est suffisante pour déterminer la topologie de l'espace considéré, l'ensemble de fermeture d'un ensemble A quelconque étant donné par l'expression $\overline{A} = \prod U_\alpha$, où $U_\alpha \in \mathfrak{U}$; $\supset A$. Dans ces conditions, nous dirons que la famille $\mathfrak{U}$ constitue une *base* de l'espace $(1, \mathfrak{F})$. Réciproquement, soit $\mathfrak{V}$ une famille *quelconque* de sous-ensembles de 1 et désignons par $[\mathfrak{V}]$ la famille complètement multiplicative, contenant les ensembles 0 et 1, engendrée par $\mathfrak{V}$. Il est évident que, si l'on prend la famille $\mathfrak{V}$ pour base, on peut définir sur 1 une topologie, par rapport à laquelle $[\mathfrak{V}]$ est la famille des ensembles fermés.

Nous dirons que deux familles $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ de sous-ensembles de 1 constituent des bases équivalentes, si la topologie τ définie au moyen de la base $\mathfrak{U}$ est identique à la topologie τ^* définie au moyen de la base $\mathfrak{V}$; c'est-à-dire, si l'on a $[\mathfrak{U}] = [\mathfrak{V}]$. Il est d'ailleurs immédiat que, si $[\mathfrak{U}] \supset [\mathfrak{V}]$, la topologie τ contiendra la topologie τ^*.

2. Les applications continues. Soit θ une application biunivoque de l'ensemble 1 sur lui-même, et soit A un sous-ensemble quelconque de 1; nous désignerons par $\theta(A)$ (image de A) l'ensemble des éléments $\theta(x)$, où $x \in A$. Nous désignerons de même par $\theta(\mathfrak{A})$ ($\mathfrak{A}$ étant une famille quelconque de sous-ensembles de 1) la famille des ensembles $\theta(X)$, où $X \in \mathfrak{A}$. Il est aisé de voir que

A) $[\theta(\mathfrak{U})] = \theta([\mathfrak{U}])$ quelle que soit la famille $\mathfrak{U}$.

On dit que l'application θ est «continue», par rapport à la topologie τ définie sur 1, au moyen de l'opérateur $\overline{}$, si l'on a

1) $$\theta(\overline{A}) \subset \overline{\theta(A)} \quad \text{quel que soit} \quad A \subset 1.$$

On dit que l'application θ est «bicontinue» par rapport à la topologie τ, si l'on a

2) $$\theta(\overline{A}) = \overline{\theta(A)} \quad \text{quel que soit} \quad A \subset 1;$$

ou, ce qui revient au même, si les applications θ et θ^{-1} sont toutes deux continues par rapport à τ.

Nous appellerons, avec M. M. Fréchet, *déformations* d'un espace, les applications bicontinues de cet espace sur lui-même. Il est aisé de voir que l'ensemble Γ des déformations d'un espace constitue un groupe d'applications biunivoques (par rapport à la composition ordinaire des applications biunivoques).

Nous rappellerons aussi les propriétés suivantes :

B) *Soit θ une application biunivoque d'un espace $(1, \mathfrak{F})$ sur lui-même ; pour que θ soit continue, il faut et il suffit que l'application θ^{-1} transforme les ensembles fermés en des ensembles fermés.* La condition 1) est donc équivalente, dans un espace (F), à la condition suivante

3) $$\theta^{-1}(\mathfrak{F}) \subset \mathfrak{F}.$$

Il en résulte immédiatement que

C) *Les déformations de l'espace $(1, \mathfrak{F})$ sont précisément ces applications biunivoques (de cet espace sur lui-même) qui transforment les ensembles fermés en des ensembles fermés et les ensembles non-fermés en des ensembles non-fermés ; c'est-à-dire, la condition 2) est équivalente, dans l'espace $(1, \mathfrak{F})$, à la condition suivante*

4) $$\theta(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}.$$

Nous pouvons maintenant établir les résultats suivants :

B') *Soit θ une application biunivoque de l'ensemble 1 sur lui-même et $\mathfrak{U}$ une famille de sous-ensembles de 1, au moyen de laquelle on définit sur 1 une topologie τ; pour que θ soit continue par rapport à τ, il faut et il suffit que cette topologie contienne la topologie τ^* que l'on définit sur 1, si l'on prend pour base la famille $\theta^{-1}(\mathfrak{U})$.*

Dém. Posons $\mathfrak{F} = [\mathfrak{U}]$ et $\mathfrak{F}^* = [\theta^{-1}(\mathfrak{U})]$. On a d'après A), $[\theta^{-1}(\mathfrak{U})] = \theta^{-1}([\mathfrak{U}])$, c'est-à-dire, $\mathfrak{F}^* = \theta^{-1}(\mathfrak{F})$.

Alors, en tenant compte de B), la vérité de cette proposition devient immédiate.

C') *Pour que θ soit bicontinue par rapport à τ il faut et il suffit que cette topologie contienne les topologies définies sur 1 au moyen des familles $\theta(\mathfrak{U})$ et $\theta^{-1}(\mathfrak{U})$.*

C'') *Pour que l'application θ soit bicontinue par rapport à τ, il faut et il suffit que les familles $\mathfrak{U}$ et $\theta(\mathfrak{U})$ forment des bases équivalentes.*

La proposition C′) est une conséquence immédiate de B′). Quant à C″), on peut la déduire de C), de la même façon que nous avons démontré B′) partant de B).

3. Le problème de Wiener. Soit 1 un ensemble abstrait quelconque. Si l'on définit sur 1 une topologie, au moyen d'un opérateur $\overline{}$ qui à chaque ensemble $A \subset 1$ fasse correspondre un ensemble $\overline{A}$ (ensemble de fermeture de A) tel que $A \subset \overline{A} \subset 1$, le groupe Γ des déformations de l'espace $(1, \overline{})$ est déterminé.

M. Wiener pose la question inverse[1], précisée par M. M. Fréchet[2] de la façon suivante :

Soit Σ une famille quelconque d'applications biunivoques de l'ensemble 1 sur lui-même ; on demande :

1) Quelles conditions devra vérifier la famille Σ, pour que l'on puisse définir sur 1 une topologie τ, par rapport à laquelle Σ soit: *a)* une famille de déformations de l'espace correspondant; *b)* la famille Γ de toutes les déformations de cet espace ?

2) Dans quel cas la topologie τ est complètement déterminée par la famille Σ ?

3) À quelles conditions devra satisfaire Σ pour que la topologie τ vérifie certaines conditions (pour que l'espace correspondant soit, par exemple, un espace accessible, un espace de Hausdorff, etc.) ?

M. Wiener commence par observer que la topologie usuelle des espaces linéaires peut être déterminée par la connaissance du groupe Γ des déformations de la droite, en utilisant une propriété que nous énoncerons de la façon suivante :

W) *Un ensemble* E *et un point* a *quelconques étant donnés, pour que l'on ait* $a \in \overline{E}$, *il faut et il suffit que toute application appartenant à* Γ *et laissant fixe chacun des points de* E, *laisse aussi fixe le point* a *lui-même.*

Alors, en s'appuyant sur cette propriété qu'il cherche à généraliser, M. Wiener donne une définition que nous présenterons sous la forme suivante :

Définition 1. *Soit* Σ *une famille quelconque d'applications biunivoques de l'ensemble* 1 *sur lui-même ; par commodité, nous supposerons que* Σ *contient l'application identique. On nomme «ensemble de fer-*

[1] N. Wiener, *Limit in terms of continuous transformations* (Bull. Soc. Math. France, t. 150, 1922, p. 51-62).

[2] *Les espaces abstraits*, pp. 196-201.

meture» d'un ensemble $A \subset 1$ *quelconque l'ensemble* $\overline{A}$ *des éléments de* 1 *qui restent fixes pour toutes les applications appartenant à* Σ *et laissant fixe chacun des éléments de* A. *Alors, le système* $(1, \Sigma)$ *est dit un espace* (S).

4. Propriétés des espaces (S). Si l'on admet la condition supplémentaire $\overline{0}=0$, il est aisé de voir que tout espace (S) est un espace (F). Les conditions I) $\overline{0}=0$, II) $A \subset \overline{A}$, III) $\overline{A}+\overline{B} \subset \overline{A+B}$, sont évidemment vérifiées. Quant à la condition IV) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$, elle est aussi vérifiée. En effet, $\overline{\overline{A}}$ est l'ensemble de tous les points restant fixes pour toutes les applications de Σ qui laissent fixes les points de $\overline{A}$; or, ces applications sont précisément celles qui laissent fixes les points de A; on a donc, d'après la définition 1, $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

Nous pouvons maintenant donner une autre définition de l'espace (S):

Définition 1 bis. *Faisons correspondre à chaque application* $\theta \in \Sigma$ *l'ensemble* U *de tous les points restant fixes pour l'application* θ. *Alors, on peut définir sur* 1 *une topologie, con prenant pour base la famille* $\mathfrak{U}$ *constituée par ces ensembles* U. *L'espace* (F) *que l'on obtient de cette manière est dit un espace* (S).

Il est aisé de voir que cette définition est équivalente à la définition 1.

Un espace (S) est, en outre, un espace dense en soi, c'est-à-dire, un espace où est vérifiée la condition $\overline{1-(x)}=1$, quel que soit le point x. En effet, toute application laissant fixe chaque point de l'ensemble $1-(x)$ laisse aussi fixe le point x lui-même.

Réciproquement, soit $(1, \overline{})$ un espace (F), dense en soi, dont la topologie est définie au moyen d'une base $\mathfrak{U}$. Faisons correspondre à chaque ensemble $U \in \mathfrak{U}$ une application biunivoque θ de l'ensemble 1 sur lui-même, qui laisse fixe chaque point de U et qui change tous les points de $1-U$. Il est toujours possible de trouver une application comme θ, à moins que $1-U$ soit formé d'un seul point; mais, si l'on avait $1-U=(x)$ ou bien $U=1-(x)$, où x désigne un point quelconque, l'ensemble U ne serait pas fermé, vu que, l'espace étant dense en soi, on aurait $x \in \overline{U}$; donc l'ensemble $1-U$ ne peut pas être formé d'un seul point. Alors, désignons par Σ la famille des applications θ: de ce qui précède, il résulte que l'espace $(1, \overline{})$ est un espace (S), dont la topologie peut être définie au moyen de la famille d'applications Σ.

Nous sommes donc amenés à la proposition suivante:

Les espaces (S) *ne sont que les espaces* (F) *denses en soi.*

5. Les espaces (J) et (J_1). Soit $(1, \Sigma)$ un espace (S) dont la topologie τ ait été définie, d'après la définition 1, au moyen de la famille d'applications Σ; alors, deux cas peuvent se présenter: ou bien il existe une famille Ω d'applications de l'ensemble 1 sur lui-même, bicontinues par rapport à la topologie τ, telle que l'on puisse définir, comme plus haut, la topologie τ, au moyen de Ω (nous dirons allors que les familles Σ et Ω sont équivalentes); ou bien il n'est pas possible de définir comme plus haut, la topologie τ, au moyen d'une famille d'applications qui soient déformations de l'espace $(1, \Sigma)$. Dans le premier cas, nous dirons, avec M. Wiener, que l'espace considéré est un espace (J).

Il se peut que la famille Σ soit équivalente, non seulement à une famille de déformations de l'espace $(1, \Sigma)$, mais au groupe Γ lui-même de *toutes* les déformations de cet espace. On dira, dans ce cas, avec M. Wiener, que l'espace considéré est un espace (J_1). Les espaces (J_1) sont, évidemment, les espaces topologiques les plus généraux où est vérifiée la condition W) (§ 3).

M. Wiener a trouvé une condition pour qu'un espace (S) soit un espace (J). Nous allons établir cette condition de la manière suivante:

Considérons encore l'espace $(1, \Sigma)$. Nous ferons d'abord la remarque suivante: σ et θ étant deux applications quelconques de l'ensemble 1 sur lui-même, si l'on pose $\sigma_1 = \theta\sigma\theta^{-1}$ on aura $\sigma_1[\theta(x)] = \theta[\sigma(x)]$, quel que soit $x \in 1$. Cela dit, nous pourrons, d'après la définition 1 bis, construire une base $\mathfrak{U}$ de l'espace $(1, \Sigma)$; à cet effet, nous ferons correspondre, à chaque application $\sigma \in \Sigma$, un ensemble $U \in \mathfrak{U}$ tel que

$$\begin{cases} \sigma(x) = x & \text{si} \quad x \in U \\ \sigma(x) \neq x & \text{si} \quad x \notin U. \end{cases}$$

Soit θ une application biunivoque quelconque de l'ensemble 1 sur lui-même. Si l'on pose $\sigma_1 = \theta\sigma\theta^{-1}$ on aura, d'après la remarque précédente,

$$\begin{cases} \sigma_1[\theta(x)] = \theta(x) & \text{si} \quad x \in U; \\ \sigma_1[\theta(x)] \neq \theta(x) & \text{si} \quad x \notin U; \end{cases}$$

ou, si l'on pose $\theta(x) = y$,

$$\begin{cases} \sigma_1(y) = y & \text{si} \quad y \in \theta(U); \\ \sigma_1(y) \neq y & \text{si} \quad y \notin \theta(U); \end{cases}$$

cela veut dire que, si l'on définit, comme plus haut (définition 1), une topologie sur l'ensemble 1, au moyen de la famille d'applications $\Sigma_1 = \theta\Sigma\theta^{-1}$, la famille $\theta(\mathfrak{U})$ sera une base de l'espace $(1, \Sigma_1)$. Alors, les propriétés C′) et C″) peuvent s'énoncer sous la forme suivante:

C*) *Pour que l'application* θ *soit une déformation de l'espace* $(1, \Sigma)$, *il faut et il suffit que la topologie* τ *définie au moyen de la famille* Σ, *contienne les topologies* τ_1 *et* τ_2 *définies au moyen des familles* $\theta \Sigma \theta^{-1}$ *et* $\theta^{-1} \Sigma \theta$.

C**) *Pour que l'application* θ *soit une déformation de l'espace* $(1, \Sigma)$, *il faut et il suffit que les familles* Σ *et* $\theta \Sigma \theta^{-1}$ *soient équivalentes, en ce sens, qu'elles définissent sur* 1 *la même topologie.*

La proposition C*) n'est au fond que le résultat dû à M. Wiener et que nous pouvons énnoncer sous la forme suivante:

Pour que la famille Σ *soit contenue dans le groupe* Γ *des déformations de l'espace* $(1, \Sigma)$, *il faut et il suffit que la topologie définie par l'intermédiaire de* Σ *ne soit pas modifiée quand on adjoint aux applications de* Σ *toutes les applications de la forme* $\theta \sigma \theta^{-1}$ *et* $\theta^{-1} \sigma \theta$, *où* $\sigma, \theta \in \Sigma$.

Il convient faire la remarque suivante: pour que l'espace $(1, \Sigma)$ soit un espace (J), il ne faut pas que la famille Σ soit contenue dans le groupe Γ, mais seulement que Σ soit *équivalente* à une famille Σ^* contenue dans Γ.

En particulier, si la famille d'applications Σ *est un groupe, l'espace* $(1, \Sigma)$ *sera, en vertu de* C*), *un espace* (J).

Il serait intéressant de trouver une condition, en termes de *fermeture,* pour qu'un espace $(1, \overline{})$ soit un espace (J) ou un espace (J_1), comme nous l'avons fait pour les espaces (S).

6. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace (J) soit un espace (J_1). M. Wiener a indiqué une condition pour qu'un espace (S) soit un espace (J_1), mais M. M. Fréchet a remarqué que cette condition «... ne donne pas un criterium portant directement sur la famille Σ». Nous avons cherché à résoudre cette question et nous avons trouvé une caractérisation des espaces (J_1), semblable à celle de M. Wiener pour les espaces (J). Voici le résultat que nous avons obtenu:

THÉORÈME. *Pour que la famille d'applications* Σ *soit identique à la famille* Γ *de toutes les déformations de l'espace* $(1, \Sigma)$, *il faut et il suffit que:* 1) Σ *soit un groupe d'applications;* 2) *Tout groupe d'applications équivalent à* Σ *soit contenue dans* Σ; 3) *Le groupe* Σ *ne soit pas un vrai sous-groupe invariant d'un autre groupe d'applications de l'ensemble* 1 *sur lui-même.*

DÉMONSTRATION. Il est évident que les conditions 1) et 2) sont nécessaires. Quant à la condition 3), elle est aussi nécessaire, puisque, s'il

existait une application $\theta \notin \Sigma$ telle que $\theta\Sigma\theta^{-1}=\Sigma$, cette application serait bicontinue, d'après C**); on aurait donc $\theta \in \Gamma$, et, par conséquent, $\Sigma \neq \Gamma$.

Supposons maintenant que les conditions 1), 2), 3), sont toutes vérifiées. En tenant compte de 1), on a, d'après C*), $\Sigma \subset \Gamma$. Soit θ une application quelconque de Γ: d'après C**), les groupes $\theta\Sigma\theta^{-1}$ et $\theta^{-1}\Sigma\theta$ sont équivalents à Σ, et par suite on aura, en vertu de 2), $\theta\Sigma\theta^{-1}\subset\Sigma$, $\theta^{-1}\Sigma\theta\subset\Sigma$. De la première de ces expressions, on déduit $\Sigma\subset\theta^{-1}\Sigma\theta$, d'où, en tenant compte de la dernière expression, $\Sigma=\theta^{-1}\Sigma\theta$. Donc, en vertu de 3), on aura, nécessairement, $\theta\in\Sigma$, et, par conséquent, $\Sigma=\Gamma$. L'ensemble des conditions 1), 2), 3) est donc suffisant.

Remarque. Pour que l'espace $(1, \Sigma)$ soit un espace (J_1), il ne faut pas que l'on ait $\Sigma=\Gamma$, mais seulement que la famille Σ soit équivalente à la famille Γ. Même dans les espaces linéaires, il est possible de déterminer un groupe Ω d'applications, différent du groupe Γ des déformations, au moyen duquel on puisse définir la topologie de l'espace, d'après la définition 1.

Par exemple, nous pouvons prendre pour base, dans l'espace R_1 (droite euclidienne) la famille $\mathfrak{U}$, dont chaque ensemble U est formé des points x, qui vérifient l'une quelconque des conditions $x\leqslant a$, $x\geqslant b$, où a et b désignent deux points arbitraires, tels que $a<b$. Alors, faisons correspondre à chaque ensemble U la fonction $\varphi(x)$, définie de la façon suivante:

$$\begin{cases} \varphi(x)=x & \text{si} \quad x\in U \\ \varphi(x)=2x-a & \text{si} \quad a<x\leq\dfrac{2a+b}{3} \\ \varphi(x)=\dfrac{x+b}{2} & \text{si} \quad \dfrac{2a+b}{3}<x<b. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que la fonction $\varphi(x)$ représente une déformation de l'espace R_1 et qu'elle caractérise l'ensemble U, d'après la définition 1 bis, vu que $\varphi(x)=x$ si $x\in U$ et $\varphi(x)\neq x$ si $x\notin U$. Considérons maintenant le groupe Ω engendré par toutes les applications φ ainsi définies: il est évident que l'on peut définir la topologie de R_1 par l'intermédiaire de Ω. D'autre part, on a $\Omega\neq\Gamma$; en effet, on prouve facilement, par la méthode d'induction complète, que, pour chacune des applications de Ω, il existe au moins un intervalle (α, β), où cette application est représentable par une fonction linéaire. Cet exemple prouve donc ce que nous avons dit plus haut.