

CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHÉMATIQUES

Extrait du

COLLOQUE

SUR

L'ANALYSE
FONCTIONNELLE

TENU A LOUVAIN

LES 25, 27, ET 28 MAI 1960

CBRM

LIBRAIRIE UNIVERSITAIRE
10, RUE DE LA MONNAIE
LOUVAIN-BELGIQUE

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS
PARIS

1961

LES ESPACES A BORNÉS ET LA NOTION DE FONCTION DIFFÉRENTIABLE

PAR

J. SEBASTIÃO E SILVA (Lisbonne)

Les remarques de M. Waelbroeck au sujet de la conférence de M. Köthe m'intéressent particulièrement, étant donné que moi-même j'ai été conduit à des conclusions analogues, en tâchant de généraliser aux espaces localement convexes, réels ou complexes, la notion de fonction différentiable, ainsi que les théorèmes fondamentaux du calcul différentiel et intégral, et de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes (voir la Bibliographie, [4] et [5]).

Je me suis persuadé que, pour cette généralisation, c'est la notion d'ensemble borné, plutôt que celle de voisinage (ou de seminorme), qui doit jouer un rôle essentiel. Je considère deux espaces localement convexes X et Y , réels ou complexes, et, dans X , un ensemble arbitraire \mathfrak{B} de parties bornées, vérifiant les deux conditions suivantes :

1°. Si B appartient à \mathfrak{B} , l'enveloppe convexe cerclée de B appartient aussi à \mathfrak{B} ;

2° Tout ensemble formé d'un seul élément de X appartient à \mathfrak{B} .

Pour chaque $B \in \mathfrak{B}$ on désigne par \widehat{B} l'enveloppe convexe cerclée de B et par X_B le sous-espace vectoriel de X engendré par B et muni de la norme correspondante à la boule \widehat{B} :

$$\|x\|_B = \inf \{ \delta; \delta > 0, x \in \delta \widehat{B} \}$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction définie dans un ouvert D de X et à valeurs dans Y . Cela étant, je dis que f est *différentiable en un point a de D par rapport à \mathfrak{B}* , ou simplement *différentiable (\mathfrak{B}) en a* , s'il existe une application linéaire Φ de X dans Y , telle que, à

tout ensemble $B \in \mathfrak{B}$, on puisse associer une partie bornée C de Y , de façon que $\Phi(B) \subset C$ et que

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \Phi h\|_C}{\|h\|_B} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|h\|_B \rightarrow 0$$

[On dit alors que Φ est la dérivée de f en a et on écrit $\Phi = f'(a)$].

Nous avons ainsi obtenu toute une gamme de notions de différentiabilité, parmi lesquelles on retrouve, dûment généralisées, quelques-unes des notions déjà connues — depuis la différentiabilité au sens de Gâteaux-Lévy, jusqu'à la différentiabilité au sens de Fréchet. Par exemple, on peut considérer les cas suivants (en considérant f différentiable (\mathfrak{B}) en a) :

1) \mathfrak{B} est formé par les bornés de X de dimension 1. Je dis alors que f est *uni-différentiable en a* , et on voit que cette notion est équivalente à celle de fonction différentiable au sens de Gâteaux-Lévy, dans le cas où X, Y sont des espaces normés.

2) \mathfrak{B} est formé par les bornés de X de dimension ≤ 2 . Je dis alors que f est *bi-différentiable en a* . Ce cas est essentiel pour la généralisation de certains théorèmes.

3) \mathfrak{B} est formé par les bornés de X de dimension finie. Je dis alors que f est *finiment différentiable en a* .

4) \mathfrak{B} est formé par tous les bornés de X . Je dis alors que f est *différentiable en a sur les bornés*, et on voit que, dans le cas des espaces normés, cette notion coïncide avec celle de fonction différentiable au sens de Fréchet.

On voit aussitôt que, dans la définition de «fonction différentiable (\mathfrak{B}) », les topologies de X et de Y n'interviennent qu'en termes de bornés, sauf lorsqu'on dit que la fonction f est définie dans un ouvert de X . Mais j'ai remarqué que, même pour la définition de «ouvert», il sera plus naturel de remplacer, dans ces considérations, la topologie initiale de X , par la topologie, $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$, de la limite inductive topologique (non nécessairement localement convexe) des espaces métriques $a + X_B$, avec $a \in X$ et $B \in \mathfrak{B}$: un ensemble $D \subset X$ sera ouvert par rapport à $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$, si et seulement si, l'ensemble $D \cap (a + X_B)$ est ouvert par rapport à la topologie de $a + X_B$, pour tout $a \in X$ et tout $B \in \mathfrak{B}$. On voit alors que si f est différentiable (\mathfrak{B}) dans D , f est continue par rapport à $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$.

Il semble donc que le domaine naturel pour la notion de fonction différentiable soit constitué, non pas par les espaces localement convexes, mais bien par les structures $[X, \mathfrak{B}]$ que l'on définit,

en choisissant arbitrairement, dans un espace vectoriel X quelconque, un ensemble \mathfrak{B} de parties de X , vérifiant les conditions suivantes :

- a) *Tout ensemble formé d'un seul élément de X appartient à \mathfrak{B} ;*
- β) *Si $B \in \mathfrak{B}$, l'enveloppe convexe cerclée de B appartient aussi à \mathfrak{B} .*
- γ) *Si $B \in \mathfrak{B}$, toute partie de B appartient à \mathfrak{B} et tout homothétique de B appartient aussi à \mathfrak{B} .*
- δ) *Aucun sous-espace vectoriel non nul de X n'appartient à \mathfrak{B} .*

On pourrait donc développer la théorie que j'ai esquissé dans [4], en remplaçant les espaces localement convexes $[X, \mathfrak{L}]$ et $[Y, \mathfrak{L}^*]$ par deux telles structures $[X, \mathfrak{B}]$ et $[Y, \mathfrak{B}^*]$. Les topologies $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}}$ et $\mathfrak{L}_{\mathfrak{B}^*}$ associées resp. à \mathfrak{B} et à \mathfrak{B}^* , comme on l'a indiqué plus haut, auraient un rôle secondaire, concernant seulement les domaines des fonctions. Le type de convergence qui intervient dans cette théorie serait la généralisation naturelle de convergence au sens de Mackey; en particulier, pour l'étude de l'intégration, on serait conduit à considérer des espaces Y complets par rapport aux suites de Cauchy au sens de Mackey généralisé, ou bien complets au sens de M. Waelbroeck (il faudra y réfléchir).

On peut aussi développer une théorie des fonctions différentiables dans des espaces localement convexes, où la topologie joue un rôle essentiel. Mais cette théorie, qui présente un caractère de *dualité* par rapport à la première, est beaucoup plus difficile et restreinte (cf. [5]), et on n'est pas sûr *a priori* de l'intérêt qu'elle pourra présenter dans les applications.

Les *espaces à bornés* de M. Waelbroeck coïncident, il me semble, avec les structures $[X, \mathfrak{B}]$ vérifiant les conditions énoncées et, en outre, la condition suivante :

- ε) *Toute réunion finie d'ensembles appartenant à \mathfrak{B} appartient aussi à \mathfrak{B} .*

Il reste à voir quels sont les rapports entre les espaces à bornés et les espaces localement convexes : c'est là essentiellement le problème posé par M. Waelbroeck.

Tout espace localement convexe séparé est évidemment un espace à bornés, lorsqu'on y considère l'ensemble de toutes les parties bornées, au sens de la topologie de l'espace.

D'autre part, étant donné un espace X à bornés \mathfrak{B} , il existe au moins une topologie localement convexe sur X (séparée ou non), par rapport à laquelle les ensembles $B \in \mathfrak{B}$ sont bornés : il suffit

de considérer la *topologie bornologique associée* à \mathfrak{B} , limite inductive localement convexe des espaces normés X_B , avec $B \in \mathfrak{B}$ (moins fine que la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$ dont il est question plus haut). Mais, comme l'a montré M. Waelbroeck, il peut arriver qu'il existe des ensembles bornés par rapport à cette topologie, qui n'appartiennent pas à \mathfrak{B} .

Je connais toutefois un cas non trivial où l'on peut affirmer qu'il y a identité entre les ensembles \mathfrak{B} et les bornés au sens de cette topologie : c'est le cas où il existe une suite croissante (B_n) de bornés telle que tout ensemble $B \in \mathfrak{B}$ est contenu dans un des B_n (condition de Mackey) — *pourvu que cette topologie soit séparée*. Cela résulte d'un théorème de Grothendieck (voir [1], th. 9).

Mais je ne sais pas si la limite inductive obtenue dans ce cas est toujours séparée. Je le peux affirmer seulement dans un cas plus particulier : celui où la suite des espaces normés correspondants aux bornés B_n est telle que l'application identique de chacun de ces espaces dans le suivant est complètement continue. Alors la limite inductive (localement convexe) de ces espaces est ce que j'ai appelé d'abord un espace (\mathcal{LN}^*) et ce que j'appelle maintenant un espace (\mathcal{C}_2) , c'est-à-dire le dual d'un espace de Schwartz métrisable (cf. [3]). On peut affirmer en outre que, *dans ce cas, la topologie de la limite inductive localement convexe coïncide avec la topologie $\mathcal{T}_{\mathfrak{B}}$ de la limite inductive topologique*.

Voilà tout ce que je sais répondre aux questions de M. Waelbroeck.

Evidemment, un cas spécial très important, qui a suggéré, je crois, ces considérations à M. Waelbroeck, est celui des *algèbres à bornés*. On donne ce nom à toute algèbre A où l'on ait choisi un ensemble \mathfrak{B} de parties, vérifiant les conditions $\alpha)$ à $\varepsilon)$ et encore la condition suivante : si $B \in \mathfrak{B}$ et $C \in \mathfrak{B}$, on a aussi $B.C \in \mathfrak{B}$.

A ce sujet je voudrais ajouter que les calculs opérationnels que j'ai étudiés précédemment (cf. [6] et [7]) pourraient s'étendre immédiatement au cas des algèbres A à bornés, munies d'élément unité et complètes aux sens de M. Waelbroeck (ou peut-être, plus généralement, complètes pour les suites de Cauchy au sens de Mackey généralisé).

Une autre tâche, dont je ne sais pas si l'on a déjà essayé, serait celle de généraliser la théorie des fonctions analytiques de Lorch à des algèbres localement convexes commutatives complexes, que l'on pourrait peut-être remplacer, avec avantage, par des algèbres à bornés commutatives (munies d'élément unité), et encore de chercher à établir la connexion entre cette théorie et les calculs opérationnels ci-dessus mentionnés. Mais je pense que, dans les cas vraiment intéressants, on y trouvera des difficultés sérieuses.

Dans le travail «Sur le calcul symbolique à une ou plusieurs variables», à paraître dans «Annali di Matematica», je fais déjà un large emploi des structures de «espaces à bornés» et de «algèbres à bornés».

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. GROTHENDIECK. *Sur les espaces (F) et (DF)*. *Summa Brasiliensis Math.*, **3** (1954), p. 57-122.
- [2] E. R. LORCH. *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), p. 414-425.
- [3] J. SEBASTIÃO E SILVA. *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*. *Rend. Mat. e Applic. Università di Roma, serie V*, vol. 14 (1955), p. 338-410.
- [4] ———. *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes*. *Rend. Accad. Lincei, serie 8*, vol. 20 (1956), p. 743-750, vol. 21 (1956), p. 40-46.
- [5] ———. *Conceitos de função diferenciável em espaços localmente convexos*. *Publicações do Centro de Estudos Mathematicos de Lisboa*, 1957.
- [6] ———. *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*. *Portugaliae Math.*, **14** (1958), p. 105-132.
- [7] ———. *Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné*. *Memorie Accad. Lincei, serie 8*, vol. 6, p. 1-13.

Remarque. Voir aussi «La définition de spectre d'un opérateur et les opérateurs à spectre élémentaire non borné», à la suite de la conférence de M. Waelbroeck.

Il y aura encore intérêt à voir le travail de J. GIL DE LAMADRID, «Topology of mappings and differentiation processes», *Illinois Journal of Math.*, vol. 3 (1959), p. 408-420.