

# BOLETIM DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

DIRECTOR  
PEREIRA FORJAZ

NOVA SÉRIE — VOL. XXXV  
MAIO A JULHO DE 1963



ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA  
1963

---

## ANEXO II

### **Novos elementos para a teoria do integral no campo das distribuições**

J. SEBASTIÃO E SILVA

Já tive aqui ocasião de me referir a investigações relacionadas com a teoria das distribuições. Como é sabido, esta teoria foi pela primeira vez estruturada, de maneira sistemática, em 1945, por Laurent Schwartz, que, para esse efeito, tomou como modelo a teoria funcional da medida. Assim, as distribuições segundo Schwartz são definidas como funcionais lineares contínuos sobre determinados espaços de funções.

Porém, a teoria das distribuições, segundo esta orientação, afastou-se consideravelmente da singeleza tão sugestiva dos processos heurísticos usados pelos físicos, que, como é natural, sentem geralmente dificuldades insuperáveis em se adaptar ao método funcional. Por esse motivo, começaram a desenvolver-se, desde 1949, algumas variantes da teoria, segundo orientações mais directas e mais próximas dos métodos intuitivos dos físicos. Entre essas variantes, figura a teoriadirecta das distribuições com base axiomática, que introduzi em 1954 e em que as distribuições são normalmente expressas mediante derivadas formais

de funções contínuas ou localmente somáveis. E o que convém desde logo salientar é que os métodos directos não se reduzem a novas formas de exposição mais acessíveis, mas, pelo contrário, têm permitido obter resultados essencialmente novos.

Um dos aspectos da teoria das distribuições que têm beneficiado nitidamente com os métodos directos é o que diz respeito ao conceito de integral duma distribuição. Um passo decisivo para a formulação correcta e para o desenvolvimento fecundo deste conceito deve-se ao matemático polaco Łojasiewicz, com a introdução dos conceitos de valor e de limites duma distribuição num ponto. Quando as distribuições são expressas por meio de derivadas formais de funções, o conceito de valor duma distribuição num ponto pode ser definido do seguinte modo (no caso de uma só variável):

Seja  $f$  uma distribuição sobre um aberto  $O$  de  $\mathbb{R}$  e designe  $a$  um ponto de  $O$ . Diz-se que  $f$  tem por valor um dado número complexo  $k$  no ponto  $a$ , e escreve-se  $f(a) = k$ , quando existe pelo menos um inteiro  $n \geq 0$  e uma função contínua  $\varphi$  tais que se tenha, numa vizinhança de  $a$ :

$$f = D_x^n \frac{(x-a)^n}{n!} \varphi(x), \quad \text{com} \quad \varphi(a) = k$$

Esta definição é justificada por um conjunto de propriedades, que generalizam as propriedades algébricas usuais relativas ao valor duma função num ponto. Importa no entanto desde já observar que nem sempre uma distribuição tem valor num ponto: por exemplo, prova-se que a distribuição  $\delta$  de Dirac não tem valor no ponto 0, segundo esta definição.

A definição de valor duma distribuição num ponto  $a$  dá lugar à definição de limite duma distribuição  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$ , mediante ligeiras modificações. Primeiro, basta supor que  $a$  é aderente ao conjunto  $O$ ; diz-se então que  $f(x)$  tende para  $k$  quando  $x \rightarrow a$ , e escreve-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ , se existe pelo menos um inteiro  $n \geq 0$

e uma função  $\varphi$  tais que se tenha, numa vizinhança de  $a$  privada deste ponto,

$$f = D_x^n \frac{(x-a)^n}{n!} \varphi(x), \quad \text{com} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = k$$

Anàlogamente se definem limites laterais de  $f(x)$  no ponto  $a$ :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad [\text{ou } f(a^+)] \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad [\text{ou } f(a^-)]$$

Interessa desde já observar o seguinte facto: uma função pode não ter limite num ponto no sentido usual e ter limite nesse ponto no sentido da teoria das distribuições. Seja por exemplo a função  $\cos 1/x$ , localmente somável sobre  $R$ ; esta função é apresentada clàssicamente como exemplo de função que não tende para limite algum quando  $x \rightarrow 0$ , o que é verdadeiro no sentido usual; porém no sentido lato da definição anterior, esta função passa a ter como limite zero, quando  $x \rightarrow 0$ , basta observar que se tem

$$\cos \frac{1}{x} = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - D x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

e aplicar a definição anterior, bem como a propriedade do limite duma soma, que se mantém. Aliás, é fácil

ver que a função  $x^2 \sin 1/x$  tem derivada no ponto 0, mesmo no sentido usual e que essa derivada é 0: assim, o segundo membro da igualdade anterior tem valor no ponto 0 mesmo no sentido usual, embora não tenha limite nesse sentido.

Até aqui apenas se trata de limites de distribuições, quando a variável tende para um ponto próprio. Importa ver agora como se deve definir limite duma distribuição quando  $x \rightarrow +\infty$  ou quando  $x \rightarrow -\infty$ . Neste caso, as definições propostas pelos matemáticos da escola polaca (Łojasiewicz, Mikusinski e Sikorski) desde logo me pareceram pouco satisfatórias. O que convém, essencialmente, é uma definição que se mantenha invariante por mudança de variável; ora a definição dos referidos autores não satisfaz a esse requisito.

Atendendo à mudança de variável  $x \rightarrow 1/t$ , que muda  $\infty$  em 0, obtém-se a seguinte definição:

Diz-se que uma distribuição  $f(x)$  tende para um número  $k$  quando  $x \rightarrow +\infty$ , se existem um inteiro  $n \geq 0$  e uma função contínua  $\varphi$  tais que se tenha, numa vizinhança de  $+\infty$ ,

$$f(x) = (-x^2 D)^n \frac{1}{n! x^n} \varphi(x), \quad \text{com} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = k$$

(E análogamente para  $x \rightarrow -\infty$ ).

Porém esta definição, que apresentei pela primeira vez em 1960, a propósito das distribuições vectoriais, é de nascido complicada e, na verdade, pouco manejável nas aplicações. Algum tempo depois, convenci-me de que esta definição é equivalente à seguinte, bastante mais simples e cómoda:

Diz-se que  $f(x) \rightarrow k$  quando  $x \rightarrow +\infty$ , se existe um inteiro  $n \geq 0$  e uma função  $\varphi$  tais que se tenha, numa vizinhança de  $+\infty$ :

$$f = D_x^n \frac{x^n}{n!} \varphi(x) \quad \text{com} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = k$$

Convenci-me de que as duas definições são equivalentes, não por que tivesse logo conseguido demonstrá-lo, mas apenas por intuição, como tantas vezes acontece na investigação matemática. Aliás, a demonstração de equivalência das duas definições afigurava-se um tanto árdua, por exigir cálculos longos e fastidiosos.

Todavia, recentemente, foi-me possível demonstrar a referida equivalência, graças a um artifício muito simples, que consiste em considerar primeiramente o caso em que  $k=0$ . Prova-se por indução matemática que o operador  $(-x^2D)^n$  admite um desenvolvimento da forma

$$a_0 D^n x^{2n} + a_1 D^{n-1} x^{2n-1} + \dots + a_{n-1} D x^{n+1} + a_n x^n$$

em que  $a_0, a_1, \dots, a_n$  são coeficientes cujos valores não interessa conhecer: o simples facto de  $(-x^2D)^n$  admitir um desenvolvimento desta forma basta para demonstrar, sem dificuldade, a equivalência das duas definições no caso em que  $k=0$ ; é depois bem fácil passar ao caso geral, observando que se tem

$$k = D_x^n \frac{x^n}{n!} k$$

E assim se evitarem cálculos assustadores...  
Posto isto, vejamos como as anteriores definições

se ligam à teoria do integral no campo das distribuições.

Neste campo, é o ponto de vista algébrico, baseado na generalização da fórmula de Barrow, que mais se presta à definição de integral numa distribuição. Seja  $f$  uma distribuição sobre um intervalo aberto  $I$  e designem  $a$ ,  $b$  dois pontos próprios de  $I$  ou da fronteira de  $I$ ; sabe-se que é sempre possível determinar uma primitiva  $F$  de  $f$  em  $I$  a menos de uma constante; pois bem, diz-se que  $f$  é *integrável*, por exemplo, no intervalo aberto  $]a, b[$ , quando existem os limites laterais  $F(a^+)$  e  $F(b^-)$ , e escreve-se então

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x) \, dx = F(b^-) - F(a^+)$$

Anàlogamente se definem os conceitos de integral em  $[a, b]$ ,  $[a, b[$  e  $]a, b]$ . Pode acontecer em particular que os integrais de  $f$  sobre todos estes intervalos de extremos  $a$ ,  $b$  existam e sejam iguais; então o seu valor comum é designado por

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Ainda de modo análogo se definem os integrais de extremos infinitos. Assim, tem-se por definição

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = F(+\infty) - F(-\infty),$$

supondo que  $f$  é definida sobre  $R$  e que existem os limites  $F(+\infty)$  e  $F(-\infty)$  da primitiva  $F$  de  $f$  (no sentido atrás precisado e não no sentido da escola polaca).

Posto isto, é fácil provar que as propriedades algébricas clássicas do integral, incluindo os métodos formais de integração, subsistem para o novo conceito de integral. Também é fácil ver que este conceito compreende, como casos particulares, o integral de Lebesgue, os integrais de medidas e ainda os integrais impróprios simplesmente convergentes, que não existem no sentido de Lebesgue.

Seja por exemplo o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt$$

dependente do parâmetro  $\omega$ . Uma primitiva de  $e^{i\omega t}$  é  $e^{i\omega t}/i\omega$ . Ora, para cada valor de  $\omega$  diferente de 0, tem-se (no sentido da definição anterior)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{i\omega t} = \lim_{t \rightarrow \infty} D_t t \frac{e^{i\omega t}}{i\omega t} = 0$$

*Portanto o integral considerado existirá, segundo a nova definição, para todo o  $\omega \neq 0$ , tendo-se então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt = 0$$

Para  $\omega=0$ , o integral é divergente, mesmo segundo a nova definição.



Estas conclusões estão de acordo com a intuição dos físicos que, desde longa data, atribuíram o valor  $\delta(\omega)$  àquele integral paramétrico. Porém, não fica ainda justificado inteiramente este valor: a justificação só pode ser feita, mediante uma nova extensão do conceito de integral, que define o valor global dum integral paramétrico como distribuição, e não apenas como função parâmetro.

Uma das maneiras naturais de encarar os integrais paramétricos é baseada no conceito de distribuição vectorial. Seja por exemplo o integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy$$

em que  $f$  é uma distribuição sobre  $\mathbb{R}^2$ . Então  $f(x,y)$  pode ser considerada como distribuição de  $y$ , cujos valores são distribuições de  $x$ . Se for  $F$  uma primitiva parcial de  $f$  em relação a  $y$ , o mesmo ponto de vista poderá aplicar-se a  $F$ . Assim, diremos que o anterior integral paramétrico é convergente, se existirem os limites parciais

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x,y) \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x,y)$$

considerando  $F(x,y)$  como distribuição de  $y$  cujos valores são distribuições de  $x$ . Nessa hipótese, o valor do integral é uma distribuição de  $x$  dada pela fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = F(x, +\infty) - F(x, -\infty)$$

Tudo se reduz pois à determinação dos referidos limites parciais. Diz-se por exemplo que  $F(x, y)$  tende para uma distribuição  $G(x)$  quando  $y \rightarrow \infty$ , e escreve-se

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F(x, y) = G(x) \quad \text{ou} \quad F(x, +\infty) = G(x),$$

quando existem dois inteiros  $m, n$ , uma função  $\varphi(x, y)$  contínua sobre  $\mathbb{R}^2$  e uma função  $\psi(x)$  contínua sobre  $\mathbb{R}$  tais que

$$F(x, y) = D_x^m D_y^n \frac{y^n}{n!} \varphi(x, y), \quad G(x) = D_x^m \psi(x)$$

e  $\lim_{y \rightarrow \infty} \varphi(x, y) = \psi(x)$  quando  $y \rightarrow \infty$ , uniformemente em relação a  $x$  sobre todo o intervalo limitado. E, análogamente, para mais de duas variáveis.

Com esta definição de integral paramétrico, fica sempre garantida a possibilidade de permutar com o integral paramétrico a derivação ou a integração em relação ao parâmetro, o que é extremamente cómodo nas aplicações. No fundo, é esse facto que permite justificar várias das fórmulas obtidas heurísticamente pelos físicos, tal como a que foi atrás indicada, que dá  $\delta(\omega)$  como valor de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt$$

O mesmo ponto de vista permite ainda introduzir o conceito de integral múltiplo de uma distribuição, como resultado de sucessivas integrações em ordem arbitrária.

Obtém-se deste modo uma teoria completa do in-

tegral no campo das distribuições, adequada a todas as possíveis aplicações, no que se refere por exemplo à análise harmónica, ao cálculo simbólico, etc. Em particular é possível dar agora uma definição geral de convolução de duas distribuições, que vai muito além dos casos considerados, quer por Schwartz, quer por outros autores.

Há no entanto ainda um aspecto da teoria que está a ser objecto de estudo, por parte de alguns dos investigadores que trabalham comigo, no Centro de Estudos Matemáticos e no Laboratório de Física e Engenharia Nuclear. É a que se refere ao integral de distribuições e, mais geralmente, de correntes sobre variedades. Em particular, há que reelaborar toda a análise vectorial em termos de distribuições, de modo a poder ser útilmente empregada nas aplicações.

Estas investigações estão por sua vez intimamente relacionadas com o problema de Cauchy e problemas de fronteira relativos a equações em derivadas parciais.

Espero poder aqui anunciar, dentro de algum tempo, resultados obtidos neste campo.

#### BIBLIOGRAFIA

- (1) S. LOJASIEWICZ. *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point*. *Studia Mathematicae* 16 (1957), p. 1-36.
  - (2) J. MIKUSIŃSKI — R. SIKORSKI. *The elementary theory of distributions* (I) *Panstwowe Wydawnictwo Naukowe*, Varsovia (1957).
  - (3) J. SEBASTIÃO E SILVA. *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*. *Rev. Fac. Ciências Lisboa* (2A), 4 (1954-55), p. 79-186
  - (4) — *Sur la définition et la structure des distributions vectorielles*. *Portugaliae Mathematica*, 19 (1960), p. 1-80.
  - (5) J. CAMPOS FERREIRA e J. SILVA OLIVEIRA — *Problemas com condições iniciais na teoria das distribuições*. A publicar.
-