

J. SEBASTIÃO E SILVA
DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

O Lema de Weyl no Quadro das Ultradistribuições

Comunicação apresentada à Classe de Ciências
em sessão de 4 de Fevereiro de 1965



LISBOA
1 9 6 5

**Separata do Boletim da Academia das Ciências de Lisboa
v. XXXVII (1965)**

O Lema de Weyl no Quadro das Ultradistribuições

J. SEBASTIÃO E SILVA

1. Consideremos a equação de Laplace relativa a n variáveis independentes

$$\Delta\varphi = 0 \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

e seja Ω um conjunto aberto de \mathbb{R}^n . É bem conhecido o seguinte teorema clássico:

Se φ é uma solução da equação de Laplace em Ω que admite derivadas de 1.ª e de 2.ª ordem contínuas em Ω , então φ é uma função indefinidamente diferenciável, e mesmo analítica, no conjunto Ω ⁽¹⁾.

Como é sabido, dizem-se *harmónicas em Ω* as funções que verificam a hipótese deste teorema. A designação é aplicada geralmente a funções reais, mas convirá aqui considerá-la extensiva a funções complexas.

Mas também é sabido que o teorema anterior pode ser generalizado, substituindo a hipótese por outras muito mais fracas, como por exemplo a seguinte:

« φ é uma distribuição em Ω que verifica a equação de Laplace em Ω (no sentido das distribuições)».

⁽¹⁾ Por função analítica em Ω entende-se toda a função n variáveis reais x_1, \dots, x_n , que seja representável por uma série de potências inteiras de $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ numa vizinhança de cada ponto (a_1, \dots, a_n) de Ω .

Com esta hipótese, o teorema constitui o *lema de Weyl no campo das distribuições*. Pode compreender-se o alcance de tal proposição. Um caso particularíssimo é aquele em que a hipótese é a seguinte (mais geral que a do teorema clássico):

« φ é uma função que admite derivadas de 1.^a ordem absolutamente contínuas em Ω e que verifica a equação de Laplace neste conjunto».

A propriedade expressa pelo lema de Weyl estende-se a uma categoria muito geral de equações diferenciais parciais estudadas por MALGRANGE, EHRENPREIS, HORMÄNDER, etc. Mais precisamente: *toda a distribuição que verifique uma tal equação em Ω é uma função analítica em Ω , que também é solução da equação no sentido usual*. Como geralmente é mais fácil obter expressões que definem no sentido das distribuições, vê-se onde possa estar o interesse desta propriedade.

Têm-se feito tentativas para generalizar o lema de Weyl a espaços mais amplos que o das distribuições. Por exemplo, BENDEL conseguiu obter uma generalização do referido lema, colocando-se no espaço das hiperfunções de SATO, mas limitando-se ao caso $n = 2$.

Há cerca de um ano, em conversa na Universidade de Maryland, observou-me FICHERA que teria talvez interesse estudar o seguinte problema: caracterizar de algum modo o «espaço máximo» (a menos de um «isomorfismo»), para o qual seja válido o lema de Weyl — se é que tal espaço existe. O problema está ainda posto, como é natural, de modo vago, o que não quer dizer que seja desprovido de sentido ou mesmo de interesse.

Desde logo esta conversa me levou a pensar no conceito de ultradistribuição, que introduzi em 1957, para sobre ele basear um cálculo operacional, aplicável precisamente a *equações com características imaginárias*, como sucede com a equação de Laplace. As hiperfunções de SATO são, localmente, um caso particular das ultradistribuições. Ora o que se verifica imediatamente é o seguinte:

O lema de Weyl já não é válido no quadro das ultradistribuições.

Surge portanto a pergunta:

Constituem as hiperfunções o tal «espaço máximo», com a referida propriedade, ou existem ainda outros, compreendidos entre o das hiperfunções e o das distribuições?

É objectivo da presente nota contribuir para o esclarecimento desta questão. Em particular, será dada uma nova demonstração, extremamente simples, do resultado de BENGEL ⁽¹⁾. Aliás, deve dizer-se que este assunto foi objecto de animadas discussões, entre mim, LIONS e BENGEL, no Curso Internacional sobre a Teoria das Distribuições, que se efectuou em Lisboa em Setembro de 1964.

Convém precisar que, em 1957, me limitei ao caso de ultradistribuições em \mathbb{R} , com crescimento polinomial ou, quando muito, exponencial. Este conceito foi pouco depois generalizado ao caso de ultradistribuições de crescimento polinomial sobre \mathbb{R}^n , pelos matemáticos japoneses HASUMI e YOSHINAGA.

⁽¹⁾ Tratarei apenas do caso de duas variáveis reais, mas suponho que os resultados se poderão generalizar no caso de n variáveis reais, por uma técnica semelhante, embora necessariamente mais complicada.

Uma teoria geral das ultradistribuições (de crescimento qualquer) foi recentemente estabelecida, com base axiomática, por ANTÓNIO DE SOUSA MENESES *, em trabalho a publicar.

Creio que o método axiomático de MENESES poderá contribuir para o esclarecimento da questão anterior.

2. Começarei pelo caso mais simples das equações diferenciais com características imaginárias, que é precisamente o da equação:

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

em que vamos supor que a incógnita, φ , é uma ultradistribuição num conjunto aberto, Ω , de \mathbb{R}^2 . Como se trata de um problema de carácter *local*, bastará supor que Ω é um rectângulo aberto de lados paralelos aos eixos coordenados. Podemos mesmo limitar-nos ao caso em que o rectângulo é simétrico em relação ao eixo dos x , atendendo a que o caso geral se obtém deste por simples translação.

Para achar a solução mais geral de (1) basta aplicar o cálculo simbólico baseado na teoria das ultradistribuições. Toda a ultradistribuição φ sobre o rectângulo Ω pode ser identificada a uma ultradistribuição Φ de uma só variável real y , e cujos valores são ultradistribuições de x . Neste caso, Φ será definida num intervalo J de \mathbb{R} (simétrico em relação à origem) e os seus valores são ultradistribuições escalares num intervalo I de \mathbb{R} , tendo-se $I \times J = \Omega$. Assim, a equa-

(*) Há pouco falecido, infelizmente, na Guiné, vítima dum acidente. Era um jovem de quem havia a esperar muitíssimo, para o futuro da matemática em Portugal.

ção (1) poderá escrever-se sob a forma de *equação diferencial ordinária simbólica*:

$$(2) \quad \frac{d\Phi}{dy} = iD_x \Phi$$

O cálculo simbólico relativo ao *operador* D_x fornece imediatamente soluções da forma

$$\Phi(y) = e^{iyD_x} f(x) \quad \text{para } y \in J$$

onde f é uma ultradistribuição escalar *arbitrária* sobre I . Segundo o significado da expressão $\exp(iyD_x)$, tem-se:

$$\Phi(y) = \delta(x + iy)^* f(x) = f(x + iy)$$

Fácilmente se reconhece que as ultradistribuições deste tipo são de facto soluções de (2) utilizando na definição de derivada a topologia do espaço das referidas ultradistribuições sobre I , identificando-se portanto a soluções de (1). Resta porém saber se são estas *todas* as soluções de (1), e portanto de (2). Seja Ψ uma solução qualquer de (2) em Ω . Então, se pusermos

$$\Psi_o = e^{-iyD_x} \Psi \quad \text{sobre } J,$$

será ainda Ψ_o uma ultradistribuição sobre J , cujos valores são ultradistribuições sobre I , e tem-se, segundo as regras do cálculo simbólico,

$$\Psi = e^{iyD_x} \Psi_o$$

$$\frac{d\Psi}{dy} = i e^{iyD_x} D_x \Psi_o + e^{iyD_x} \frac{d\Psi_o}{dy}$$

donde, por substituição em (1) e, atendendo a que Ψ é uma solução de (1):

$$e^{iyD_x} \frac{d\Psi_0}{dy} = 0$$

Daqui resulta multiplicando por $\exp(-iyD_x)$:

$$\frac{d\Psi_0}{dy} = 0$$

Ora, segundo a teoria das ultradistribuições vectoriais, isto só é possível se Ψ_0 for uma *constante em relação a y*, isto é, se Ψ_0 se reduzir a uma ultradistribuição escalar f sobre I , independente de y . Assim fica portanto provado o seguinte:

TEOREMA I. *As ultradistribuições sobre o rectângulo Ω que verificam a equação (1) em Ω são todas dadas pela fórmula $\varphi(x, y) = f(x + iy)$, em que f é uma ultradistribuição arbitrária sobre I .*

Note-se que o método seguido para chegar a este resultado é uma generalização do método clássico da *variação das constantes arbitrárias*.

Analisando a expressão $f(x + iy)$, pode agora demonstrar-se:

COROLÁRIO. *As únicas soluções de (1) que são hiperfunções sobre Ω são as soluções usuais, isto é, as funções holomorfas em Ω .*

Para isso convém recordar os seguintes pontos:

1.º Cada ultradistribuição f sobre I é representada por um fundo $\varphi(x + i\xi)$, holomorfa na intersecção da faixa vertical $x \in I$ com o complementar de uma faixa horizontal $|\xi| \leq \alpha \geq 0$, em que α depende de φ . Duas tais funções φ, ψ representam a *mesma* ultra-

distribuição f , se e só se $\varphi - \psi$ *coincide*, na intersecção dos domínios destas funções, com uma função holomorfa em toda a faixa $x \in I$. Nestas condições, f será uma *hiperfunção* sobre I , se e só se o número α acima considerado puder ser 0.

2.º Cada ultradistribuição f sobre $I \times J$ é representada por uma função

$$\varphi(x + i\xi, y + i\eta)$$

holomorfa num subconjunto de \mathbb{C}^2 do tipo: $x \in I$, $|\xi| > \alpha \geq 0$, $y \in J$, $|\eta| > \beta \geq 0$, em que α, β dependem de φ . Duas tais funções φ, ψ representam a *mesma* ultradistribuição f , se e só se $\varphi - \psi$ coincide, na intersecção dos domínios destas funções, com uma função que se pode escrever sob a forma $\theta_1 + \theta_2$, em que θ_1 é uma função holomorfa num conjunto do tipo: $x \in I$, $|\xi| > \gamma$, $y \in J$, η *real qualquer*; e θ_2 uma função holomorfa num conjunto do tipo: $x \in I$, ξ *real qualquer*; $y \in J$, $|\eta| > \gamma$. Nestas condições, f será uma hiperfunção sobre $I \times J$, se e só se os números α, β atrás considerados puderem ser ambos zero.

3.º A soma, o produto por escalares, as derivadas e as translatadas de ultradistribuições traduzem-se nas operações homónimas efectuadas sobre as funções holomorfas que as representam.

4.º Se f é uma hiperfunção sobre I , a translatada $f(x + ih)$, com h real $\neq 0$, será ainda uma hiperfunção sobre I , se e só se $f(x + i\xi)$ for função holomorfa de $x + i\xi$ na faixa $-h < \xi < 0$, resp. $0 < \xi < h$, conforme $h > 0$ ou $h < 0$.

Ora estas considerações e a teoria axiomática de MENESES permitem, segundo creio, demonstrar o seguinte teorema:

As hiperfunções sobre um aberto Ω qualquer de \mathbb{R}^2 constituem o «máximo espaço E, a menos de um isomorfismo», tal que as soluções da equação ⁽¹⁾ em Ω pertencentes a E são apenas as funções holomorfas neste conjunto.

3. Consideremos agora a equação de Laplace,

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

sendo a incógnita φ uma ultradistribuição num aberto Ω do plano. Tal como no número anterior, podemos supor que Ω é um rectângulo $I \times J$ simétrico em relação ao eixo dos x , e interpretar (3) como equação diferencial ordinária *simbólica*

$$(4) \quad \frac{d^2 \Phi}{dx^2} + D_x^2 \Phi = 0,$$

em que Φ é uma ultradistribuição sobre J , cujos valores são ultradistribuições (escalares) sobre I . Ora o método simbólico fornece soluções de (4) da forma

$$(5) \quad \Phi(y) = \cos(yD_x)u(x) + \frac{\operatorname{sen}(yD_x)}{D_x}v(x) = \\ = \frac{u(x+iy) + u(x-iy)}{2} + \frac{V(x+iy) - V(x-iy)}{2i}$$

⁽¹⁾ Só depois de publicado o trabalho de MENESES será possível definir o que se entende aqui por «espaço máximo a menos de um isomorfismo».

onde u, v são ultradistribuições arbitrárias sobre J , e V uma primitiva qualquer de u . Para ver se estão aqui todas as soluções de (4), observemos que o par ordenado (Φ, Φ') se obtém do par ordenado (u, v)

$$\begin{cases} \Phi(y) = \cos(yD_x)u(x) + \frac{\operatorname{sen}(yD_x)}{D_x}v(x) \\ \Phi'(y) = -\operatorname{sen}(yD_x)D_x u(x) + \cos(yD_x)v(x) \end{cases}$$

por uma transformação linear cuja matriz, $A(y)$, para todo o $y \in J$, admite matriz inversa, que é, segundo as regras do cálculo simbólico,

$$[A(y)]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(yD_x) & \operatorname{sen}(yD_x)D_x \\ -\frac{\operatorname{sen}(yD_x)}{D_x} & \cos(yD_x) \end{bmatrix}$$

Seja agora Ψ uma solução qualquer de (4) em J e ponhamos

$$\begin{cases} \Psi_0 = \cos(yD_x)\Psi + \operatorname{sen}(yD_x)D_x\Psi' \\ \Psi_1 = -\frac{\operatorname{sen}(yD_x)}{D_x}\Psi + \cos(yD_x)\Psi' \end{cases}$$

sobre Ω . Então virá

$$(6) \quad \begin{cases} \Psi = \cos(yD_x)\Psi_0 + \frac{\operatorname{sen}(yD_x)}{D_x}\Psi_1 \\ \Psi' = -\operatorname{sen}(yD_x)\Psi_0 + \cos(yD_x)\Psi_1 \end{cases}$$

ou seja $(\Psi, \Psi') = A(\Psi_0, \Psi_1)$, donde

$$(\Psi', \Psi'') = A'(\Psi_0, \Psi_1) + A(\Psi'_0, \Psi'_1)$$

Mas, como Ψ é solução de (4), isto é, $\Psi'' = -D_x^2\Psi$, facilmente se verifica, atendendo a (6), que

$$(\Psi', \Psi'') = A'(\Psi_0, \Psi_1)$$

e portanto $A(\Psi'_0, \Psi'_1) = 0$ donde

$$\Psi'_0 = 0 \text{ e } \Psi'_1 = 0 \text{ (sobre J)}$$

Mas isto só é possível, se Ψ_0 e Ψ_1 se reduzem a ultradistribuições sobre I, independentes de y em J.

É fácil agora concluir, atendendo a (5):

TEOREMA 2. *As ultradistribuições no rectângulo Ω que verificam a equação de Laplace em Ω são todas dadas pela fórmula.*

$$\varphi(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy)$$

em que f, g são ultradistribuições arbitrárias sobre I.

Daqui se deduz, mediante uma análise conveniente da expressão $f(x + iy) + g(x - iy)$:

COROLÁRIO (LEMA DE WEYL). *As únicas hiperfunções que verificam a equação de Laplace no rectângulo Ω são as soluções usuais, isto é, as funções harmónicas em Ω .*

Tal como no caso anterior, creio que, com auxílio da teoria axiomática de MENESES, é possível demonstrar o seguinte teorema:

As hiperfunções sobre um aberto Ω de \mathbb{R}^2 constituem o «máximo espaço E, a menos de um isomorfismo», para o qual é válida a propriedade de Weyl relativa a Ω .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] M. HASUMI. *Note on the n-dimensional tempered ultradistributions.* Tôhoku Mathematical Journal, 2.ª série, vol. 13, p. 94-104.

[2] J. SEBASTIÃO E SILVA. *Les fonctions analytiques comme ultradistributions dans le calcul opérationnel.* Mathematischen Annalen, 136 (1958), 58-96.

Composto e impresso na
Sociedade Industrial Gráfica
Rua de Campolide, 133-B-C
Telefone 68 16 12 - LISBOA 1