

ANALES DE LA ASOCIACIÓN
ESPAÑOLA PARA EL PROGRESO DE

L A S C I E N C I A S

AÑO XII

ANALES DE LA ASOCIACION
ESPAÑOLA PARA EL PROGRESO DE

LAS CIENCIAS

Revista Trimestral



AÑO XII

NÚM. I.

1947
DOMICILIO SOCIAL:
VALVERDE, 22.-TELEFONO 21-25-29
MADRID

OS ESPAÇOS (F) E O PROBLEMA DE WIENER

por JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA (1)

I. — *Relações entre topologias definidas num mesmo conjunto fundamental*

Dado um conjunto abstracto X , é geralmente possível, *dum ponto de vista puramente lógico*, introduzir nêsse conjunto várias topologias que satisfaçam a um determinado sistema de axiomas.

A-fim-de tornar mais clara a exposição do assunto principal desta nota, convém adoptar prèviamente uma convenção respeitante a topologias que se possam definir num mesmo conjunto.

Se τ_1 e τ_2 fôrem duas topologias diferentes definidas em X , dizemos que τ_1 está contida em τ_2 , e escrevemos $\tau_1 \subset \tau_2$, quando, dados um conjunto A e um ponto p , se p é ponto de acumulação de A (ou um ponto de \bar{A}) na topologia τ_1 , também o é na topologia τ_2 . As duas topologias τ_1 e τ_2 serão idênticas ($\tau_1 = \tau_2$) se fôrem simultâneamente verdadeiras as relações $\tau_1 \subset \tau_2$ e $\tau_2 \subset \tau_1$.

Representamos por \bar{A} o *fecho* dum conjunto A , na topologia τ_1 , e por \tilde{A} o *fecho* do mesmo conjunto, na topologia τ_2 . Então será a relação eventual $\tau_1 \subset \tau_2$ equivalente à condição: « $\bar{A} \subset \tilde{A}$, qualquer que seja A »: e por tanto a igualdade $\tau_1 = \tau_2$ equivalente a « $\bar{A} = \tilde{A}$, para todo o conjunto A ».

Seja agora V_a uma família completa de vizinhanças do ponto arbitrário a , na topologia τ_1 , e W_a uma família completa de vizinhanças do mesmo ponto, na topologia τ_2 . Nestas circunstâncias, a relação $\tau_1 \subset \tau_2$ é equivalente à condição: «dada uma vizinhança da família W_a , existe

(1) Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura.

pelo menos uma vizinhança da família V_a contida na primeira»; ao passo que a igualdade $\tau_1 = \tau_2$ se traduz pela conhecida condição de equivalência de famílias de vizinhanças.

II. — Transformações contínuas e bi-contínuas

Nesta parte é nosso objectivo recordar algumas noções, indispensáveis para a compreensão do que, em seguida, vamos expor.

Dados dois conjuntos abstractos 1 e 2, seja t uma transformação unívoca de 1 em 2. Sendo A um sub-conjunto qualquer de 1, convençionaremos representar por $t[A]$ o subconjunto de 2, constituído pelos transformados dos elementos de A mediante a transformação unívoca t . Ter-se-á, evidentemente:

- a) $t[A + B] = t[A] + t[B]$; b) $t[AB] \subset t[A] \cdot t[B]$;
c) Se $A \subset B$, $t[A] \subset t[B]$; etc.

Dados três conjuntos 1, 2 e 3, seja r uma transformação unívoca de 1 em 2, e s uma transformação unívoca de 2 em 3: chamamos produto sr das transformações r e s à transformação t que faz corresponder directamente, a cada elemento x de 1, um elemento $t(x)$ de 3, tal que $t(x) = s(y)$, sendo $y = r(x)$; isto é, $t(x) = s[r(x)]$.

Consideremos o conjunto de todas as transformações bi-unívocas de 1 em si próprio: é fácil vêr que tal conjunto forma um grupo, tomando para lei de composição a multiplicação atrás definida. Daremos a êsse grupo o nome de *grupo E das equivalências*, relativo ao conjunto 1.

Suponhamos, agora, que, tanto em 1 como em 2, são definidas leis de derivação. Por *transformação contínua* de 1 em 2 entende-se toda a transformação unívoca t de 1 em 2, que preserve a operação — (2), isto é, que verifique a condição:

$$t[\bar{A}] \subset \overline{t[A]}, \text{ qualquer que seja } A \subset 1.$$

É interessante notar que a noção de *conjunto derivado* não se presta, como a de *fecho*, para uma definição cómoda de transformação contínua.

Uma transformação bi-unívoca t de 1 em 2 é denominada *bi-conti-*

(2) Usamos indistintamente a notação — para designar o *fecho* em 1 e em 2.

nua, se tanto t como a sua inversa t^{-1} são transformações contínuas; ou, o que é equivalente, se t verifica a condição:

$$t[\bar{A}] = \overline{t[A]}, \text{ para todo o conjunto } A \subset I.$$

Como sinónimo de *transformação bi-contínua* usa-se frequentemente o termo *homeomorfia*.

Consideremos o conjunto de todas as transformações bi-contínuas de I em si próprio: esse conjunto constitui, evidentemente, um subgrupo do grupo E das equivalências de I , ao qual daremos o nome de *grupo H das homeomorfias de I* .

III.—Equivalências de BASES num espaço (F)

Para os espaços (V) que verificam a condição « $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, qualquer que seja A », propõe A. Monteiro (3) a denominação de espaços (F) , por serem os espaços (V) mais gerais cuja topologia fica perfeitamente determinada pelo conhecimento da família $\{F_i\}$ dos conjuntos fechados. A determinação da topologia a partir de $\{F_i\}$ baseia-se na seguinte propriedade: como, por um lado, se verifica a primeira condição de F. Riesz ($\bar{A} \subset \bar{B}$, quando $A \subset B$), e, por outro lado, \bar{A} é um conjunto fechado, será \bar{A} o menor dos conjuntos fechados que contém A , isto é, $\bar{A} = \Pi_j E_j$, sendo E_j os conjuntos da família $\{F_i\}$ tais que $E_j \supset A$.

Posto isto, é manifesto que, para definir a topologia dum espaço (F) , se não torna forçoso, em geral, conhecer a família de *todos* os conjuntos fechados: pode acontecer que uma parte apenas daquela família, à qual daremos o nome de *base*, seja suficiente para determinar a topologia. É condição necessária e suficiente para que uma família $\{U_i\}$ de subconjuntos do espaço se possa tomar como *base*: 1.º, que os conjuntos U_i sejam fechos; 2.º, todo o conjunto fechado seja igual ao produto duma família de conjuntos pertencentes a $\{U_i\}$.

Duas *bases* dir-se-ão *equivalentes* quando, num dado conjunto fundamental, definirem a mesma topologia. Como criterio geral de equivalência de *bases*, pode utilizar-se a seguinte propriedade:

«Para que duas famílias de conjuntos $\{U_i\}$ e $\{V_j\}$ constituam *bases* equivalentes, é necessário e suficiente que: 1.º, todo o conjunto U_i se

(3) Os conjuntos fechados e os fundamentos da topologia», nota apresentada a este congresso.

possa exprimir num produto de conjuntos pertencentes a $\{V_j\}$; 2.º, todo o conjunto V_j se possa exprimir num produto de conjuntos pertencentes a $\{U_i\}$.

Se apenas uma destas condições se verifica, pode sòmete afirmar-se que a topologia definida por uma das *bases* está contida na topologia definida pela outra *base*. Suponhamos que se verifica apenas a segunda condição: pode então dizer-se que a *base* $\{U_i\}$ é equivalente à *base* constituída pela reunião das duas famílias $\{U_i\}$ e $\{V_j\}$.

Nos espaços (F), as transformações unívocas contínuas gozam duma propriedade importante, já conhecida, que se pode enunciar do seguinte modo:

«Seja t uma transformação unívoca do espaço 1 no espaço 2, A^* um sub-conjunto arbitrário de 2 e A o conjunto de *todos* os pontos de 1 cujos transformados por meio de t pertencem a A^* ; para que t seja uma transformação contínua, é necessário e suficiente que uma qualquer das condições seguintes se verifique: a) Se A^* é um conjunto fechado de 2, A é um conjunto fechado de 1; b) Se A^* é um conjunto aberto de 2, A é um conjunto aberto de 1».

É claro que as condições 1) e 2) são equivalentes.

Da propriedade anterior resulta imediatamente esta outra: «É condição necessária e suficiente para que uma transformação bi-unívoca t , de 1 em 2, seja bi-contínua, que os conjuntos fechados (abertos) de 1, e só êsses, sejam transformados por t em conjuntos fechados (abertos) de 2».

Estas propriedades permitiram-nos estabelecer os seguintes resultados:

Teorema 1.—Dada uma transformação bi-unívoca t do conjunto abstracto 1 em si próprio e uma família $\{U_i\}$ de sub-conjuntos de 1, para que a transformação t seja contínua em relação á topologia definida pela *base* $\{U_i\}$, é necessário e suficiente que se verifique uma qualquer das condições seguntes: 1) a topologia correspondente a $\{U_i\}$ contém a topologia definida pela *base* $\{t[U_i]\}$; 2) a topologia correspondente a $\{U_i\}$ está contida na topologia definida pela *base* $\{t^{-1}[U_i]\}$.

Cololário.—Para que a transformação bi-unívoca t de 1 em si próprio seja uma homeomorfia relativamente á topologia definida pela *base* $\{U_i\}$, é necessário e suficiente que as famílias $\{U_i\}$ e $\{t[U_i]\}$ constituam *bases* equivalentes.

Como se vê, o último teorema fornece um *crítério particular* de equivalência de *bases*.

IV.—*Problema de Wiener* (4)

Fixada a topologia τ dum espaço, determinado fica o grupo H das homeomorfias desse espaço. Pode agora considerar-se o problema inverso: «Conhecido o grupo H das homeomorfias dum espaço, é possível determinar a topologia τ desse espaço? No caso afirmativo — como fazer essa determinação?»

Comecemos por notar que, em certas categorias de espaços, o grupo das homeomorfias não chega para determinar a topologia, isto é, podem existir varias topologias que determinem o mesmo grupo de homeomorfias. Trata-se então de procurar as condições a que deve satisfazer a topologia τ de modo que esta fique unívocamente determinada pelo conhecimento do grupo H das homeomorfias, isto é, de modo que exista uma só topologia, que, ao mesmo tempo, satisfaça àquelas condições, e determine H como grupo das homeomorfias.

A questão pode pôr-se de um outro modo (M. Fréchet):

«Seja Σ uma família arbitrária de transformações bi-unívocas do conjunto abstracto I em si próprio:

1) Quais as condições a impôr à família Σ para que exista uma só *uma* topologia τ , em relação à qual Σ constitua uma família de homeomorfias, ou mesmo o grupo H das homeomorfias?

2) Como determinar τ , conhecendo Σ ?

3) Quais as condições suplementares a que se deve submeter a família Σ , para que a topologia τ , definida por meio de Σ , verifique um dado sistema de axiomas, e, dêste modo, o espaço correspondente esteja incluído numa das categorias conhecidas: espaços acessíveis, espaços de Hausdorff, etc.?»

Nos conjuntos lineares pode a topologia usual do espaço ser determinada a partir do grupo H das homeomorfias, aplicando a seguinte propriedade:

A) «Dado um conjunto A e um ponto x , para que x pertença ao *fecho* de A , é necessário e suficiente que x fique invariante para todas as transformações do grupo H que deixam os pontos de A invariantes».

Mostrou Wiener que a condição formulada é ainda necessária em qualquer espaço topológico de Fréchet que verifique a 4.^a condição de

(4) M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, p. 196-201; N. Wiener, *Limit in terms of continuous transformation*, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, tomo 2, fasc. III e IV, 1922.

F. Riesz. Porém, como se pode ainda concluir de um exemplo apresentado por Wiener, aquela condição deixa de ser suficiente, mesmo em certos espaços (D). Por isso como nota M. Fréchet, para que se obtenha uma solução mais geral da questão 2), é preciso reforçar a condição expressa em A).

Λ .— *Espaços (S); condição necessária e suficiente para que um espaço topológico seja um espaço (S)*

No sentido de generalizar a noção de *conjunto derivado*, portanto a de *fecho*, tendo em vista a conservação da propriedade A), Wiener começa por considerar uma família inteiramente arbitrária Σ de transformações bi-unívocas dum conjunto abstracto I em si proprio, e introduz nêsse conjunto uma topologia, adoptando (implicitamente) a definição seguinte (5):

«*Fecho* dum conjunto $A \subset I$ é o conjunto $\bar{A} \subset I$ dos pontos que ficam invariantes, para todas as transformações da família Σ que deixamos os pontos de A invariantes».

Aos espaços cuja topologia é assim definida chama Wiener espaços (S).

Um espaço (S) será um espaço topológico no sentido de M. Fréchet, desde que se adopte a convenção $\bar{0} = 0$.

Mesmo que a família Σ não contenha a transformação unidade, pode afirmar-se que $\bar{I} = I$: é isto uma consequência do princípio admitido em Lógica matemática, em virtude do qual a proposição 0 (absolutamente falsa) implica todas as proposições.

Admitindo, uma vez por todas, que os espaços (S) verificam a condição $\bar{0} = 0$ (6), podemos afirmar que *todo o espaço (S) é um espaço (V), denso em si, que satisfaz à condição: « $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, para todo o conjunto $A \subset I$ », ou, o que é o mesmo, que todo o espaço (S) é um espaço (F), denso em si. A recíproca desta proposição é também verdadeira; podemos pois, formular o seguinte:*

Teorema 2.— A categoria dos espaços (S) é idêntica à categoria dos espaços (F), densos em si.

(5) Wiener define directamente *ponto de acumulação*. Nós preferimos dar inicialmente a definição, mais cómoda, de *fecho* dum conjunto.

(6) Quere isto dizer que a convenção suplementar $\bar{0} = 0$ fica a fazer parte da definição de espaços (S).

VI. — *Equivalência de famílias de transformações definidoras de topologias*

A topologia dum espaço (S) pode ainda ser determinada a partir de Σ , de um outro modo, introduzindo inicialmente a noção de *conjunto-base*.

«Um conjunto $U \subset I$ chama-se *conjunto-base*, se uma qualquer das seguintes condições é verificada: 1) $U = 0$; 2) $U = I$; 3) existe pelo menos uma transformação da família Σ que deixa invariantes todos os pontos que pertencem a U , e muda todos os pontos que não pertencem a U ».

É claro que todo o *conjunto-base* é um conjunto *fechado*. A família de transformações determina, deste modo uma *base* $\{U_i\}$: a cada transformação de Σ corresponde um e um só *conjunto-base*. O *fecho* dum conjunto $A \subset I$ será então o conjunto $\bar{A} \subset I$, produto de todos os conjuntos pertencentes a $\{U_i\}$ que contêm A ; o que vem coincidir com a definição primeiramente dada de *fecho* de A , ponto em evidência a propriedade característica dos espaços (F): « $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, qualquer que seja A ».

Daremos o nome de *base-T* dum espaço (S), a toda a família Σ de transformações bi-unívocas do espaço em si próprio que permita definir, pelo processo atrás indicado, a topologia desse espaço. Do que precede, resulta imediatamente que pode um espaço (S) admitir mais de uma *base-T*.

Consideramos *equivalentes* duas *bases-T*, quando definem a mesma topologia.

É evidente que: a) Toda a família Σ é, como *base-T*, equivalente à família Σ^{-1} , constituída pelas transformações inversas de Σ ; b) Se a topologia definida pela família Σ está contida na topologia definida por outra família Σ^* , Σ é equivalente, como *base-T*, à família $\Sigma + \Sigma^*$ constituída por todas as transformações de Σ e de Σ^* ; etc.

Ou directamente ou com auxílio do teorema 1 e do seu cololário, é possível estabelecer os seguintes resultados:

Teorema 3.—Seja t uma transformação bi-unívoca do conjunto abstracto I em si próprio e Σ uma *base-T* relativa a I ; para que a transformação t seja contínua em relação á topologia definida por Σ , é necessário e suficiente que se verifique uma qualquer das condições seguintes: 1) a topologia correspondente a Σ está contida na topologia

determinada pela família $t^{-1} \Sigma t$ (7); 2) a topologia correspondente a Σ contém a topologia determinada pela família $t \Sigma t^{-1}$

Obs.—A condição 1) podia enunciar-se do seguinte modo: «A topologia correspondente a Σ não se altera quando esta *base-T* é ampliada pela adjunção de qualquer transformação da forma $t^{-1} \sigma t$, em que $\sigma \in \Sigma$ ». Observação análoga para a condição 2).

Corolário.—Seja Σ uma *base-T* respeitante ao conjunto fundamental I , e t uma transformação arbitrária do grupo das equivalências de I : para que as famílias Σ e $t \Sigma t^{-1}$ constituam *bases-T* equivalentes, é necessário e suficiente que a transformação t seja bi-contínua, em relação à topologia definida por Σ .

Obs.—Este corolário podia enunciar-se de outro modo, dizendo que, para t ser bi-contínuo em relação à topologia definida por Σ , é necessário e suficiente que se verifique uma qualquer das condições seguintes: 1) a topologia correspondente a Σ contém as topologias determinadas por $t^{-1} \Sigma t$ e por $t \Sigma t^{-1}$; 2) a topologia correspondente a Σ está contida nas topologias determinadas por $t \Sigma^{-1} t$ e por $t \Sigma t^{-1}$

VII.—Espaços (J) e espaços (J₁)

Segundo Wiener, espaço (J) é todo o espaço (S) que admite uma *base-T* constituída exclusivamente por homeomorfias do mesmo espaço: por outro lado, espaço (J₁) é todo o espaço (J) que admite uma *base-T* formada pelo grupo das homeomorfias.

Os espaços cartesianos e, dum modo geral, os espaços em que é verdadeira a propriedade A) atrás enunciada, são exemplos de espaços (J₁). Mostrou Wiener que, para um espaço (J) ser um espaço (J₁), é suficiente que se verifique a 4.^a condição de F. Riesz. *Será esta condição também necessária?* Mais ainda: *Será possível formular, dum modo simples, em termos da lei de derivação, uma condição necessária e suficiente para que um determinado espaço seja um espaço (J) ou um espaço (J₁)?* Como se viu, já resolvemos um problema análogo para os espaços (S).

Notemos agora que um espaço (J), mesmo um espaço (J₁), pode admitir uma *base-T* que não seja constituída, exclusivamente, por homeo-

(7) Pela notação $t^{-1} \Sigma t$ representamos o conjunto de todas as transformações da forma $t^{-1} \sigma t$, em que $\sigma \in \Sigma$.

morfias. Assim, por exemplo, a topologia usual da recta não é alterada, quando, ao seu grupo de homeomorfias, tomado como *base-T*, se junta a transformação bi-unívoca definida por $y = 1 + x + \varphi(x)$, onde $\varphi(x)$ representa a função característica do conjunto dos números racionais, a-pesar-de não serem contínuas, nem essa transformação nem a sua inversa.

Na memória já citada, apresenta Wiener uma condição, a que deve satisfazer uma *base-T*, para que o espaço correspondente seja um espaço (J). Reproduzimos, em seguida, essa condição, ligeiramente modificada na forma:

«Seja Σ uma *base-T* relativa a um conjunto abstracto I ; para que o sistema (I, Σ) corresponda a um espaço (J) é necessário e suficiente que exista uma família Σ^* equivalente, como *base-T*, á família Σ , tal que a topologia definida por Σ esteja contida nas topologias determinadas pelas famílias $s \Sigma s^{-1}$ e $s^{-1} \Sigma s$, qualquer que seja a transformação s pertencente a Σ^* ».

Vê-se imediatamente que a proposição formulada é uma consequência do teorema 3. Com a aplicação directa do corolário deste teorema, obtém-se um resultado mais conciso do que o anterior: bastará dizer que a família Σ deve ser, com *base-T*, equivalente à família $s^{-1} \Sigma s$, qualquer que seja $s \in \Sigma^*$.

Em particular, se a família fôr um grupo, o espaço (S) é um espaço (J₁),

VIII.—*Condição, em termos da família Σ , para que um espaço (S) seja um espaço (J₁)*

No mesmo trabalho, Wiener formula uma condição necessária e suficiente para que um espaço (S) seja um espaço (J₁). Porém, como nota M. Fréchet. («Les espaces abstraits», pág. 201), tal condição não fornece um critério que só faça intervir, explicitamente, a família Σ , uma vez que recorre á noção de *conjunto derivado*.

O resultado que em seguida apresentamos é visivelmente do mesmo tipo que o correspondente, obtido por Wiener para caracterizar os espaços (J):

Teorema 4.—Para que um sistema (I, Σ) constituído por um conjunto abstracto I e por uma família Σ de transformações bi-unívocas de I em si próprio, defina um espaço (J₁), é necessário e suficiente que se verifiquem, simultâneamente, as condições seguintes:

1) A família Σ é, como *base-T*, equivalente a um grupo G de transformações.

2) Entre os grupos equivalentes a Σ existe um, Γ , que contém todos os outros.

3) O grupo Γ não é sub-grupo normal de nenhum grupo distinto de ele próprio.

É claro que o grupo Γ não é outro senão o grupo H das homeomorfias relativamente á topologia definida por Σ .

O enunciado do teorema sugere a seguinte questão: *Pode, num espaço (J_1) , existir um grupo G , distinto de H , que seja como BASE-T equivalente a este? A resposta é afirmativa, mesmo no caso em que o espaço e constituído pela recta, com a topologia usual.* Foi-nos possível obter este resultado, construindo uma classe de funções contínuas crescentes, da variável real, relacionada com a família dos conjuntos fechados, e considerando o grupo gerado por essas transformações: vimos então que esse grupo não coincidia com o grupo das homeomorfias. Para não tornar mais longa esta nota, dispensamo-nos de indicar como procedemos, para construir essas funções.

Lisboa.—Seminário de Análise geral.