

**OBRAS  
DE  
JOSÉ  
SEBASTIÃO  
E SILVA**

**I**

**Instituto Nacional de Investigação Científica**

**1985**

# PARA UMA TEORIA GERAL DOS HOMOMORFISMOS<sup>(\*)</sup>

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

ROMA, 1944

## INTRODUÇÃO

Após um período de ingente mas indisciplinada produção em diversos domínios, a actividade matemática começou, já no século passado, a convergir para uma fase de unificação e de crítica, que se tem acentuado cada vez mais. As concepções de Galois, Hamilton, Sylvester, Kummer, Kronecker, etc., no campo da Álgebra; de Bolyai, Lobatchewski, Gauss, Riemann, Veronese, etc., no campo da Geometria; de Volterra, Hilbert, Baire, Lebesgue, etc., no campo da Análise, representam uma profunda revolução nos métodos de raciocínio anteriormente usados e um evidente prelúdio daquele processo de unificação. Por outro lado, a teoria dos conjuntos de Georg Cantor e o algoritmo álgebra-lógico, criado e sucessivamente aperfeiçoado por Boole, Peano, Frege e Russell, vieram oferecer o instrumento mais adequado a tão considerável obra de síntese.

Não se trata porém de atingir aquela *Mathematica universalis* que os lógicos tinham sonhado, e de que as antino-

---

(\*) Trabalho inédito.

mias cantorianas tinham mostrado a impossibilidade; mas unicamente de fundar uma matemática de novo tipo, que proceda em relação às matemáticas clássicas como estas procedem em relação ao mundo empírico — isto é, sistematizando, racionalizando, procurando em tudo um aumento do poder de previsão do homem e uma simplificação do seu esforço. Característica da nova matemática é, como não podia deixar de ser, a orientação *abstracta, formal* ou *axiomática*, que ainda hoje encontra resistência da parte de certas mentalidades, que em tais métodos vêem nada menos do que uma total mecanização da actividade matemática, e a consequente morte da intuição, fonte exclusiva da criação.

Não me alongarei na resposta a tal forma de cepticismo, para não repetir uma argumentação que passou ao domínio das coisas conhecidas. Recordarei, apenas, que — enquanto uma formalização radical dos processos de construção e de raciocínio usados em Matemática não passa de enganadora miragem — uma formalização parcial de tais processos é, não só possíivel, mas também utilíssima, já pelo aumento de solidez que proporciona ao edifício matemático, já pela economia considerável de pensamento que pode representar.

Se alguém se lembrar de dizer que as leis de dualidade e de transporte, de tão útil aplicação em Geometria, constituem máquinas de fabricar teoremas — não estará sequer longe da verdade. Mas ninguém ousará por esse facto, converter em desgraça o que é apenas uma felicidade, e propôr, deste modo, a expulsão pura e simples de tais princípios do domí-

nio da Matemática.

A referida tendência unificadora conduziu à constituição de dois domínios principais — a Álgebra abstracta e a Topologia geral — entre os quais se mantêm, geralmente, uma nítida separação apesar de uma notável analogia de conceitos, métodos e resultados. Os dois grupos de teorias podem, certamente, concorrer para um fim comum, como sucede a respeito dos grupos topológicos, de que Pontrjagin nos deu uma excelente exposição — mas conservando sempre a respectiva individualidade. Tal separação, de resto, corresponde à secular disputa entre o discreto e o contínuo, como provenientes de intuições diversas. Pergunta-se no entanto: Não será possível atingir uma unidade mais completa? Será destituído de interesse pôr em evidência o que há de comum entre a teoria dos espaços abstractos, (fundada por Maurice Fréchet), e as teorias algébricas abstractas, (grupos, anéis, corpos, etc.) tais como saíram da escola de Goettingen? A tarefa não parece difícil; é como se tudo já estivesse feito. A possibilidade de uma tal unificação encontra-se naquela teoria dos tipos, que Bertrand Russell tinha imaginado para evitar o seu conhecido paradoxo.

Um papel fundamental é desempenhado nas referidas teorias pelo conceito de homomorfismo (que no caso topológico se chama transformação contínua), de que é um caso particular o conceito de isomorfismo (que em topologia se chama homeomorfismo). As propriedades formais de um sistema — as únicas que interessam de um ponto de vista abstracto — são

aquelas propriedades desse sistema que se conservam em todos os isomorfismos.

Todavia, enquanto estes conceitos são precisados de cada vez para o caso dos grupos, dos corpos, dos sistemas vectoriais, dos espaços topológicos, etc. — um conceito geral de homomorfismo não costuma ser dado senão vagamente, fazendo apelo à intuição.

Ora o objectivo de esta tese é precisamente o seguinte: partindo de um conceito geral de sistema matemático e introduzindo um conceito igualmente geral de homomorfismo, estabelecer uma série de resultados, que sejam válidos em qualquer campo, sem nenhuma distinção — nem mesmo aquela entre "*algébrico*" e "*topológico*". É procedendo assim — sem fazer a mínima hipótese restritiva sobre a natureza do sistema de que se trata, colocando-me no terreno da lógica pura — que chego no último capítulo à generalização de quase todas as proposições fundamentais da teoria de Galois.

Como se sabe, esta teoria tal como saiu da mente do seu genial criador, refere-se unicamente a corpos de números e de fracções numéricas. Um dos objectivos principais da Álgebra abstracta consistiu, precisamente, em generalizar a teoria de Galois aos corpos abstractos mediante convenientes restrições: conseguiu-se ver assim, que *todos os resultados da teoria subsistem para as extensões algébricas separáveis de um corpo qualquer* (1).

---

(1) Sobre a moderna teoria de Galois pode consultar-se a excelente obra de VAN DER WAERDEN (1).

Em tais investigações o conceito de grupo de Galois de uma equação algébrica aparece, pela primeira vez, sob a forma elegante que lhe deu E. Artin: isto é, como grupo de automorfismos de um corpo. Pois bem: é ainda a consideração dos automorfismos de um sistema qualquer, ligados a certas relações a que chamo irredutíveis (por analogia com as equações algébricas irredutíveis) que me permite chegar à referida generalização. Os resultados assim obtidos são naturalmente susceptíveis de interpretação em qualquer campo, e é apenas a falta de tempo que me impede de apresentar aqui um maior número de exemplos.

É claro que, o que deste modo se ganha em generalidade, se perde, por outro lado, em construtividade; o que não quer dizer que tais resultados não possam, em cada caso particular, vir a ser desenvolvidos no sentido construtivo. O que se consegue desde logo e já não parece pouco — é uma larguíssima visão sintética em que até os factos conhecidos aparecem sob uma nova luz.

Além disso, eu espero que se trate, não do fim mas apenas do início de uma série de investigações sobre tal assunto. E também me anima a esperança de que outros estudiosos venham a dedicar a sua atenção a este ponto de vista que não pode deixar de ser fecundo.

Estas investigações conduziram-me, naturalmente, ao estudo do problema da definição. (Não será exagerado afirmar, que todo o problema particular de Matemática se reduz ao problema da definição). Foi assim que cheguei ao conhecimento

da bela obra, realizada neste campo pela escola de Hilbert, sobretudo no que se refere ao aperfeiçoamento da noção de recorrência. A palavra de ordem "*Regresso à Aritmética*" que caracteriza o período de aritmetização da Análise, empreendida por Dedekind, Cantor e Weierstrass, não foi cumprida senão em parte; e, como resulta dos trabalhos de Goedel, não será tão pouco susceptível de uma execução integral, se por Aritmética entendermos a teoria elementar dos números naturais. O prosseguimento da referida obra de aritmetização, está, precisamente, no estudo aprofundado da noção de recorrência.

Ainda a mesma ordem de ideias me levou a concentrar a atenção sobre a teoria dos números transfinitos — essa perturbante concepção cantoriana, em que tanto mistério haverá sempre a desvendar.

Finalmente, atendendo a que a Lógica matemática não é cultivada senão por um número restrito de estudiosos e atendendo a que, nas notações adoptadas, se está bem longe de atingir aquela uniformidade que seria para desejar (e devo confessar que também eu contribuo agora para a discordância geral), resolvi dedicar todo o primeiro capítulo a uma exposição minuciosa daqueles elementos de Lógica matemática e daquelas minhas convenções neste campo, indispensáveis à compreensão da matéria exposta nos dois restantes capítulos. Com um grande número de exemplos procuro não só familiarizar o leitor com as noções introduzidas, mas também dar-lhe uma primeira ideia da amplitude dos domínios que irão ser considerados.

Antes de terminar, devo pôr em relevo as dificuldades de várias ordens que acompanharam a elaboração desta tese, concebida e escrita em Roma nos anos de 1943 e 1944.

Ao Instituto para a Alta Cultura e à Faculdade de Ciências de Lisboa cumpre-me agradecer a possibilidade moral e material que me ofereceram, de me dedicar, inteiramente, durante um longo período, ao trabalho de investigação.

Ao Prof. Luigi Fantappiè do Instituto de Alta Matemática de Roma devo agradecer os valiosos conselhos, os incitamentos e as facilidades que gentilmente me proporcionou em tão acidentado período.

Os resultados apresentados nesta tese devem-se, em grande parte, à minha experiência adquirida no Centro de Estudos(\*)

(\*) A página do original dactilografado termina abruptamente em "... Centro de Estudos". É de crer que o autor se refira ao *Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa*, a funcionar na Faculdade de Ciências de Lisboa entre 1940 e 1976, de que o autor foi membro antes de ir para Itália como bolseiro do I.A.C., e posteriormente seu Director. O Índice do Autor refere, porém, seis páginas de INTRODUÇÃO, da qual somente as primeiras cinco constam do original dactilografado (A.F.Oliveira).



## CAPÍTULO I. — PRELIMINARES

Este capítulo tem por objectivo: 1) fixar a terminologia e as notações de Lógica matemática aqui adoptadas; 2) esclarecer, na medida do possível, certos conceitos que desempenham no presente trabalho um papel fundamental.

1. — CONJUNTOS — Suponhamos dado um conjunto  $U$  de elementos  $a, b, \dots$ , cuja natureza não especificamos. A partir de tais elementos, poderão construir-se novos *entes*; em primeiro lugar, os conjuntos  $A, B, \dots$ , formados por elementos de  $U$ ; em segundo lugar, os conjuntos  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ , cujos elementos são conjuntos  $A, B, \dots$ , de elementos de  $U$ ; e assim sucessivamente. É claro que tal processo de construção se pode levar tão longe quanto se quiser, dum modo que será precisado adiante com a noção de transfinito.

Para evitar uma repetição de palavras que possa prejudicar a clareza do discurso, diremos de preferência "família de conjuntos", em vez de "conjunto de conjuntos".

Entre os conjuntos  $A, B, \dots$ , figuram, em particular, o próprio conjunto  $U$ , que chamaremos *conjunto fundamental*

(relativamente aos restantes), e o *conjunto vazio*, que representaremos pelo símbolo  $\emptyset$ . Analogamente, entre as famílias de conjuntos  $A, B, \dots$ , figuram a família que representaremos por  $2^U$ , de todos os conjuntos  $A, B, \dots$ , e a família vazia de conjuntos, etc.

Adoptaremos ainda as seguintes convenções:

1) O sinal  $=$  servirá em qualquer caso para exprimir *identidade*, e assim, a expressão simbólica  $a=b$  indicará que os símbolos  $a$  e  $b$  representam um e o mesmo elemento de  $U$ . Por outro lado, o sinal  $\neq$  significará "distinto de".

2) Para exprimir que um dado elemento  $a$  *pertence* a um dado conjunto  $C$  escreveremos, simbolicamente,  $a \in C$ . A notação  $\{a\}$  servirá para representar o conjunto que tem  $a$  como único elemento.

3) Para exprimir que um dado conjunto  $A$  *está contido* num outro conjunto  $B$  (ou que  $A$  é um *sub-conjunto* de  $B$ ), escreveremos  $A \subset B$ . Analogamente, a expressão  $A \supset B$  significa  $A$  *contém*  $B$  (ou,  $A$  é um *sobreconjunto* de  $B$ ). Se, dados dois conjuntos  $A, B$ , se tiver simultaneamente  $A \subset B$ ,  $B \subset A$ , é evidente que  $A=B$ . Porém, quando se tiver,  $A \subset B$  sem que  $B \subset A$ , ter-se-á  $A \neq B$ ; diremos então que  $A$  é um *subconjunto próprio* ou uma *parte* de  $B$  e escreveremos  $A \subsetneq B$ .

4) Dados dois conjuntos  $A, B$ , a expressão  $A \cap B$  representará a sua *intersecção* (isto é, o conjunto dos elementos comuns a  $A$  e a  $B$ ); a expressão  $A \cup B$  representará a sua *reunião* (isto é, o conjunto que se obtém reunindo num só con

junto os elementos de  $A$  e  $B$ ).

5) Dada uma família  $F$  de subconjuntos de  $U$ , representaremos por  $\bigcap_{X \in F} X$  a intersecção de *todos* os subconjuntos pertencentes a  $F$ . Analogamente, a expressão  $\bigcup_{X \in F} X$  representa a reunião de todos os conjuntos pertencentes a  $F$ .

6) Dado o conjunto  $A$ , representaremos por  $\sim A$  o seu complementar (isto é, o conjunto dos elementos de  $U$  que não pertencem a  $A$ ).

É claro que não se tendo especificado a natureza dos elementos de  $U$ , nada impede que se passe a tomar, como novo conjunto fundamental, o conjunto  $2^U$  de todos os subconjuntos de  $U$ , e, deste modo, fica automaticamente estabelecido o significado de expressões tais como  $A \subset B, A \cap B$ , etc.

2. — AGRUPAMENTOS.— Notemos ainda que os conjuntos  $A, B, \dots$ , são entidades que verificam as seguintes condições: a) os elementos de cada conjunto são distintos entre si, dois a dois; b) todo o conjunto é independente da ordem dos respectivos elementos. Vê-se, portanto, que, adoptando a linguagem usual de Análise combinatória, os subconjuntos de  $U$  não são mais do que as *combinações dos elementos de  $U$ , tomados, de cada vez, em número finito ou infinito*.

Mas, além das combinações, a Análise combinatória introduz os conceitos de *arranjo* e de *permutação*, nos quais intervêm o conceito de *ordem*.

Seja  $P$  um conjunto qualquer, não vazio, a cujos elementos daremos o nome de *posições*. Conhecida uma lei que

faça corresponder, a cada elemento  $i$  de  $P$ , um, e um s $\tilde{o}$ , elemento  $a_i$  de  $U$ , diremos que essa lei define um *agrupamento* de elementos de  $U$ , *relativo* a  $P$ ; e que dois agrupamentos (*relativos* a  $P$ ) s $\tilde{a}$ o distintos, quando existe, pelo menos, uma posi $\tilde{c}$ ao que nos dois agrupamentos seja ocupada por elementos distintos de  $U$  (1). Diremos ainda que, num dado agrupamento, um elemento  $a_i$  de  $U$ , se *repete*, quando este elemento aparecer em mais de uma posi $\tilde{c}$ ao, no agrupamento considerado; isto  $\tilde{e}$ , quando de tiver  $a_i = a_k$  com  $i \neq k$ .

Se o conjunto das posi $\tilde{c}$ oes for finito, poder $\tilde{a}$  sempre considerar-se constitu $\tilde{i}$ do pelos n $\tilde{u}$ meros inteiros de 1 a  $n$  (sendo  $n$  o n $\tilde{u}$ mero dos elementos de  $P$ ), visto que tais posi $\tilde{c}$ oes poder $\tilde{a}$ o ser *marcadas* ou *designadas* por meio daqueles n $\tilde{u}$ meros; e diremos ent $\tilde{a}$ o que se trata de um *agrupamento* de  $n$  elementos de  $U$  (2). V $\tilde{e}$ -se portanto que, traduzindo na linguagem tradicional da An $\tilde{a}$ lise combinat $\tilde{o}$ ria a terminologia aqui adoptada,

- 
- (1) Um agrupamento de elementos de  $U$ , relativo a  $P$  ser $\tilde{a}$  portanto uma fun $\tilde{c}$ ao un $\tilde{i}$ voca, definida em  $P$ , fun $\tilde{c}$ ao cujos *valores* s $\tilde{a}$ o elementos de  $U$ .
- (2) Na *pr $\tilde{a}$ tica*, visto que os elementos de  $U$  s $\tilde{a}$ o designados por meio de s $\tilde{i}$ mbolos ou de palavras, as *posi $\tilde{c}$ oes* (elementos de  $P$ ) ser $\tilde{a}$ o as *posi $\tilde{c}$ oes relativas* de tais s $\tilde{i}$ mbolos ou palavras, escritas segundo uma determinada ordem.  $\tilde{E}$  elucidativo o exemplo da numera $\tilde{c}$ ao  $\tilde{a}$ rabe. Se o conjunto  $P$  for infinito, poder $\tilde{a}$  ainda (admitindo o princ $\tilde{i}$ pio de Zermelo) considerar-se constitu $\tilde{i}$ do por uma classe de n $\tilde{u}$ meros ordinais.

os agrupamentos de  $n$  elementos de  $U$  não são mais do que os arranjos, com repetição, dos elementos de  $U$ , tomados  $n$  a  $n$  (3).

Geralmente, dados  $n$  elementos  $a, b, \dots, c$  de  $U$  (com possível repetição), adoptaremos a expressão  $(a, b, \dots, c)$  para designar o agrupamento de tais elementos, segundo a ordem em que os símbolos estão escritos; as vírgulas têm por fim evitar uma confusão com o produto, nos casos em que seja definida uma multiplicação em  $U$ . Por outro lado, o conjunto de tais elementos será representado por  $\{a, b, \dots, c\}$ .

Finalmente, designaremos por  $U^{(n)}$  o conjunto de todos os agrupamentos de  $n$  elementos de  $U$ , sendo  $n$  um número natural qualquer.

Exemplo: Se  $U$  for o conjunto dos números reais,  $U^{(2)}$  representará o plano euclídeano,  $U^{(3)}$  representará o espaço euclídeano a três dimensões, etc.

3. — PROPOSIÇÕES.— A respeito dos elementos de  $U$  poderão formular-se diversas proposições  $a, b, \dots$ . Admitiremos que, a toda a proposição  $a$ , corresponde um e um só dos dois valores seguintes: 0 (falso), 1 (verdadeiro). Adoptaremos ainda as seguintes convenções:

---

(3) Em vez do termo "agrupamento", usam-se, ordinariamente, com este significado, os termos "sistema" e "complexo". O termo "sistema" teve de ser aqui abandonado, porque lhe é atribuído, mais adiante um outro significado; o último é já usado com significado específico em Matemática. Resta o termo "agrupamento" (tradução do francês "groupement") que é adoptado por exemplo, na "Encyclopédie Française" (art. de René de Possel 1.64.2)

1) Dadas duas proposições  $a, b$ , diremos que  $a$  *implica*  $b$  e escreveremos simbolicamente  $a \rightarrow b$ , para exprimir que o valor de  $a$  é igual ou menor que o valor de  $b$ .

2) Para exprimir que ambas as proposições  $a, b$ , são verdadeiras, escreveremos  $a \wedge b$  (ler " $a$  e  $b$ ") e a proposição  $a \wedge b$  daremos o nome de *conjunção* (ou *produto lógico*) das proposições  $a, b$ . Em vez de  $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$ , escreveremos mais simplesmente  $a \equiv b$  e diremos então que  $a$  e  $b$  são *equivalentes* (isto é, terão valores iguais). Em vez de  $(a \in E) \wedge (b \in E)$  poderemos também escrever  $a, b \in E$  (isto é, " $a$  e  $b$  são elementos de  $E$ ").

3) Para exprimir que uma, pelo menos, das proposições  $a, b$  é verdadeira, escreveremos  $a \vee b$  (ler " $a$  ou  $b$ "), e a proposição  $a \vee b$  chamaremos *disjunção* (ou *soma lógica*) das proposições  $a, b$ .

4) Para negar a proposição  $a$ , escreveremos  $\sim a$  (ler " $\text{não } a$ ") e diremos que  $\sim a$  é a proposição contraditória de  $a$  (isto é, uma terá o valor 1 e a outra o valor 0). Em vez de  $\sim(a \in E)$ , poderemos escrever mais simplesmente  $a \notin E$ .

Recordemos, finalmente, algumas das mais importantes leis do cálculo proposicional, que resultam imediatamente das convenções anteriores. Quaisquer que sejam as proposições  $a, b, c$ , tem-se:  $\sim \sim a \equiv a$  (lei da dupla negação);  $\sim(a \wedge \sim a)$  (lei da não contradição);  $a \vee \sim a$  (lei do *tertium non datur*);  $\sim(a \wedge b) \equiv \sim a \vee \sim b$  (primeira lei de De Morgan);  $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$  (distributividade);  $(a \rightarrow b) \equiv \sim a \vee b$ ;  $(a \rightarrow b) \equiv \sim b \rightarrow \sim a$  etc.

4. — FUNÇÕES PROPOSICIONAIS.— Para comunicar com os seus semelhantes, o homem serve-se de *sinais* que podem ser *sonoros* (linguagem falada) ou *gráficos* (linguagem escrita) (1). Em qualquer dos casos, o homem dispõe de um número limitado de *sinais elementares* que, associados de vários modos, com possível repetição, geram *sinais compostos* ou *expressões*, cada um dos quais pode ter, ou não um *significado*. O número de sinais elementares pode reduzir-se a dois (traço e ponto do alfabeto Morse), se bem que as pausas (ou os espaços em branco) desempenhem, neste, como em outros casos, o papel de sinais. Diz-se *fonético* todo o sistema de escrita que tenda a reproduzir, analiticamente, a linguagem falada fazendo corresponder a cada sinal elementar (letra) um som determinado. Reserva-se, neste trabalho, a designação de *simbólica* a toda a escrita que não tenha intenção fonética; à palavra "*símbolo*" atribui-se, portanto aqui, o significado restrito de "*sinal não fonético*" (2). As fórmulas matemáticas e a escrita chinesa constituem exemplos de escritas simbólicas (particular, no primeiro caso). Porém, a Matemática oferece, normalmente, o exemplo de uma escrita de tipo misto em que as fórmulas aparecem intercaladas no texto a completar o discurso.

---

(1) É claro que omitimos aqui outros sistemas menos usuais de expressão, tais como a mímica dos surdo-mudos, a escrita dos cegos, etc.

(2) Pode suceder, é claro, que um mesmo sinal funcione umas vezes como letra, e outras vezes como símbolo : a Matemática dá-nos disso um exemplo corrente.

Mas um sistema de linguagem deve compreender, além dos sinais elementares, um *critério de agrupamento* destes sinais, sem o qual o poder significativo de tal sistema seria limitadíssimo (1). Chamaremos *expressão de 1ª ordem* a todo o agrupamento de sinais elementares; *expressão de 2ª ordem* a todo o agrupamento de expressões de 1ª ordem, e assim sucessivamente. Na escrita fonética, as palavras, as proposições gramaticais, os períodos, os parágrafos, etc. constituem exemplos de expressões (com significado) de ordem cada vez mais elevada. Para distinguir estas diferentes ordens de expressões, a escrita corrente utiliza intervalos de maior ou menor amplitude, pontos, virgulas, parênteses, mudanças de linha, etc.; com um objectivo perfeitamente análogo ao destes recursos de escrita fonética, a Lógica matemática utiliza pontos, virgulas, parênteses (escritas de Peano, de Russell, de Hilbert, etc.) (2). O sistema de Łukasiewicz dispensa o uso destes sinais; mas apresenta, a meu ver, inconvenientes que me levam a não adoptá-lo no presente trabalho.

As expressões simbólicas daremos ainda o nome de *fórmulas*.

- 
- (1) Normalmente, os sinais linguísticos são agrupados segundo a ordem natural do tempo (linguagem falada); ou segundo uma ordem linear, convencional (linguagem escrita), mas podem apresentar-se casos mais complexos, em que intervem a bidimensionalidade do plano: tal é o caso dos expoentes, dos índices, das fracções, etc. Um facto semelhante se verifica ainda com a escrita musical; e até na escrita fonética vemos disso um exemplo no emprego dos acentos.
- (2) É claro que, incluindo os pontos, os parênteses, etc., na categoria dos sinais elementares, todas as expressões serão de 1ª ordem; mas a classificação em ordem, tal como é aqui apresentada, ajuda a penetrar no mecanismo da linguagem e está, como veremos, em relação com a teoria dos tipos.



Consideremos de novo o conjunto fundamental  $U$ . Chamaremos *variáveis fundamentais* ou *variáveis sobre  $U$* , aos símbolos  $x, y, \dots$  representativos de elementos *não determinados* de  $U$ . Com estes símbolos ligados entre si por meio de *constantes* (como, p.ex., as constantes  $3, =, \text{sen}, +, \text{etc.}$ ) poderão constituir-se certas expressões, capazes de adquirir o significado de *proposições* (verdadeiras ou falsas), todas as vezes que, nas mesmas expressões, as variáveis  $x, y, \dots$  forem substituídas por constantes, representativas de elementos de  $U$ , escolhidos *arbitrariamente*. Diremos que tais expressões representam *funções proposicionais* ou *proposições condicionais*, nas variáveis  $x, y, \dots$ , definidas em  $U$  (1).

Seja  $U$ , por exemplo, o conjunto dos números inteiros naturais. A expressão " $x$  é o m.d.c. de  $y$  e  $z$ " é o enunciado de uma proposição, por assim dizer, incompleto, que adquire um valor determinado (0 ou 1), sempre que o lugar das variáveis  $x, y, z$ , for preenchido por alguns dos símbolos

---

(1) Vê-se, portanto, que as variáveis  $x, y, \dots$  constituem um conjunto de posições (§2), em relação ao qual se pode afirmar se um dado agrupamento de elementos de  $U$  verifica ou não verifica a proposição. Nada impede que duas variáveis distintas sejam substituídas por uma mesma constante (caso da repetição), mas não será lícito substituir uma variável por duas constantes distintas, ao mesmo tempo (univocidade).

1,2,3,... Trata-se portanto de uma proposição condicional em  $x,y,z$ , definida em  $U$ . (2)

Introduzindo a locução "*proposição condicional*" somos levados, para evitar confusões de linguagem, a adoptar esta outra: "*proposição categórica*" (isto é, não condicional), com o significado que anteriormente atribuíamos à palavra "*proposição*" (3)

Toda a proposição condicional em  $x,y,...$  poderá escrever-se sob a forma canónica  $\alpha(x,y,...)$  em que  $\alpha$  desempenha, *por convenção*, um papel equivalente ao de todas as constantes que figuram na expressão inicial. Assim, por exemplo a proposição condicional  $\text{sen } \frac{\pi+x}{5} < \sqrt{y}$ , definida no conjunto dos números reais, poderá escrever-se, abreviadamente,  $\theta(x,y)$ , em que  $\theta$  substitui as constantes  $\text{sen}, \pi, +, \text{---}, 5, <, \sqrt{\text{ }}$ ,

- 
- (2) As equações e as inequações constituem exemplos típicos de funções proposicionais, definidas geralmente sobre o conjunto dos números reais. O sistema simbólico da Análise clássica limita-se, praticamente, a estes tipos de proposições condicionais, incluindo os seus produtos lógicos (sistemas de equações e de inequações). Tais são as fórmulas usadas, sistematicamente, na tradução das leis naturais.
- (3) Diremos de preferência, "*proposição condicional*" em vez de "*função proposicional*", atendendo a que uma mesma proposição se pode considerar umas vezes categórica e outras vezes condicional. Assim, por exemplo, a proposição "*Dado um número, existe sempre um outro menor do que o primeiro*", é verdadeira na teoria dos números reais, mas não na teoria dos números naturais.

com um critério diverso de agrupamento. (1)

Quando não for necessário por em evidência as variáveis de que dependem as proposições condicionais, estas poderão ser representadas abreviadamente, por símbolos tais como  $p, q, \dots$ .

5.— QUANTIFICADORES.— As proposições condicionais definidas num mesmo conjunto fundamental  $U$  podem combinar-se entre si de vários modos, por meio dos símbolos  $\wedge, \vee, \rightarrow$ , introduzidos no §3, dando origem a novas proposições condicionais definidas em  $U$ . Assim, a conjunção de duas proposições condicionais  $p, q$  será a proposição  $p \wedge q$  que se verifica para todas as determinações das variáveis (e só para essas determinações) que verificam simultaneamente as proposições  $p, q$ ; a proposição contraditória de  $p$  será a proposição  $\neg p$  que se verifica para todas as determinações das variáveis (e só para tais determinações) que não verificam  $p$ ; etc. É claro que as expressões explícitas de  $p \wedge q, p \vee q, \neg p, p \rightarrow q$ , contêm necessariamente, todas as variáveis que figuram nas expressões de  $p$  e  $q$ .

---

(1) Como veremos adiante, é na introdução de novas constantes (símbolos ou palavras) com o objectivo de abreviar certas expressões que consiste, *formalmente*, uma parte das definições lógicas. Conviria, no entanto, adoptar um tipo uniforme de agrupamentos, o que se consegue descrevendo todas as proposições condicionais, primitivas e derivadas, com a forma  $\alpha(x, y, \dots)$  mas tal implica uma alteração do sistema de símbolos matemáticos, que têm sido elaborados até hoje, por um processo de evolução histórica.

Mas os símbolos anteriores não permitem traduzir todas as expressões lógicas que a linguagem comum regista; para obter um sistema de símbolos que satisfaça a esta condição é necessário introduzir os chamados *quantificadores* (bastaria introduzir um deles).

Para indicar que uma dada proposição condicional  $\alpha(x)$ , condicional numa só variável  $x$ , se verifica para todas as determinações da variável, escreveremos  $\bigcap_x \alpha(x)$ ; para indicar que existe pelo menos uma determinação de  $x$ , para a qual é verdadeira a proposição  $\alpha(x)$ , escreveremos  $\bigcup_x \alpha(x)$ .

Deste modo, o símbolo  $\bigcap_x$  substitue a expressão "*Qualquer que seja  $x$ ...*"; e o símbolo  $\bigcup_x$  será uma abreviatura desta outra expressão: "*existe pelo menos um elemento  $x$ , tal que*". (1). Vê-se, por outro lado, que tais constantes lógicas (chamadas *quantificadores*), permitem formular proposições categóricas, a partir de proposições condicionais numa só variável. Porém, aplicados a proposições  $p, q$  condicionais em mais de uma variável, uma das quais seja, por exemplo  $x$ , estes símbolos dão origem a novas proposições  $\bigcap_x p, \bigcup_x p, \dots$  que não dependem já da variável  $x$ , sobre a qual incide o quantificador (*variável quantificada* ou *variável aparente*), mas que são ainda condicionais nas restantes variáveis  $y, z, \dots$  (*variáveis livres*).

---

(1) As proposições  $\bigcap_x \alpha(x), \bigcap_x \sim \alpha(x), \bigcup_x \alpha(x), \bigcup_x \sim \alpha(x)$ , correspondem respectivamente, às designações clássicas de *universal positiva, universal negativa, particular positiva, particular negativa*; é claro que se tem  $\bigcap_x \alpha(x) \leftrightarrow \sim \bigcup_x \sim \alpha(x), \bigcap_x \sim \alpha(x) \leftrightarrow \sim \bigcup_x \alpha(x)$ , isto é, a primeira é a contraditória da última; a segunda é a contraditória da terceira.

Em qualquer caso, porém, a formulação das proposições categóricas será possível, unicamente, com o emprego, directo ou indirecto, dos quantificadores, os quais permitem abaixar, sucessivamente, o número de variáveis livres das proposições condicionais, até à completa eliminação destas variáveis. Exemplo: a fórmula  $\bigcup_x \bigcap_y (y \neq x \rightarrow y > x)$  traduz uma proposição categórica, relativa aos números naturais, a qual, em linguagem comum, se enuncia, "*Existe (pelo menos) um número, menor de que todos os outros números.*"

Devemos notar que os quantificadores não são independentes entre si, pois que se tem, qualquer que seja  $\alpha$ :

$$\sim \bigcup_x \alpha(x) \neq \bigcap_x \sim \alpha(x).$$

Adoptaremos ainda as seguintes convenções:

1) A aplicação sucessiva dos símbolos  $\bigcap_x, \bigcap_y, \dots$ , poderá ser substituída pela aplicação dum símbolo único  $\bigcap_{x,y,\dots}$ . Análoga convenção para o símbolo composto  $\bigcup_{x,y,\dots}$ .

2) Se as variáveis  $x, y, \dots$  quantificadas por meio do símbolo  $\bigcup_{x,y,\dots}$  não forem todas aquelas que figuram na expressão explícita de uma dada proposição  $p$ , e se forem  $u, v, \dots$  as variáveis livres, convencionaremos escrever  $(u, v, \dots)/p$  com o mesmo significado de  $\bigcup_{x,y,\dots} p$ . É claro que as determinações de  $(u, v, \dots)$  que verificam a proposição  $(u, v, \dots)/p$  são todas aquelas que, associadas a determinações convenientes de  $(x, y, \dots)$ , verificam a proposição dada  $p$ . Expressaremos este facto, dizendo que a proposição  $(u, v, \dots)/p$  resulta de *projectar*  $p$  sobre o agrupamento de variáveis  $(u, v, \dots)$ .

3) Sejam  $p$  e  $q$  proposições condicionais em  $x, y, \dots$ . Convencionaremos escrever  $p \xrightarrow{x, y, \dots} q$  com o mesmo significado de  $\bigcap_{x, y, \dots} (p \rightarrow q)$ . Analogamente,  $p \xleftrightarrow{x, y, \dots} q$ , em vez de  $\bigcap_{x, y, \dots} (p \leftrightarrow q)$ .

Se as variáveis  $x, y, \dots$  contidas no símbolo  $\xrightarrow{x, y, \dots}$  são todas as que figuram nas expressões de  $p$  e de  $q$ , escreveremos mais simplesmente  $p \subset q$ , em vez de  $p \xrightarrow{x, y, \dots} q$  e diremos que " $p$  implica incondicionalmente  $q$ " ou que " $p$  é uma condição suficiente para que a proposição  $q$  se verifique" ou ainda que " $q$  é uma condição necessária para que se verifique  $p$ ".

Analogamente, se no símbolo  $\xleftrightarrow{x, y, \dots}$  estiverem compreendidas todas as variáveis que figuram nas expressões de  $p$  e de  $q$ , escreveremos  $p \equiv q$  em vez de  $p \xleftrightarrow{x, y, \dots} q$ , e diremos que  $p$  e  $q$  são incondicionalmente equivalentes. (1)

4) Em vez de  $\alpha(x) \xrightarrow{x} \beta(x, y, \dots)$ , podemos escrever  $\bigcap_{\alpha(x)} \beta(x, y, \dots)$  (isto é: "Para todo o  $x$  que satisfaz à condição  $\alpha(x)$ , tem-se  $\beta(x, y, \dots)$ "). Analogamente, em vez de  $\bigcup_x [\alpha(x) \cap \beta(x, y, \dots)]$  podemos escrever  $\bigcup_{\alpha(x)} \beta(x, y, \dots)$

5) Chamaremos proposição *fundamental*, relativa a  $U$ , à proposição  $x \in U$ ; chamaremos proposição *nula*, relativa a  $U$ , à proposição  $x \notin U$ . É claro que se tem  $\bigcap_{x \in U} x \in U$ ,  $\sim \bigcup_{x \in U} (x \notin U)$ . Por

---

(1) Comumente quando se diz "A proposição  $p$  implica a proposição  $q$  (ou é equivalente a  $q$ )", subentende-se que se faz uma afirmação categórica, e que portanto aquele "implica" e aquele "é equivalente a" são empregados no sentido incondicional.

outro lado, ter-se-á:  $(x \notin U) \subset p \subset (x \in U)$ , qualquer que seja a proposição condicional  $p$ , definida em  $U$ . Se, em particular, se tiver  $p \equiv (x \in U)$  ou  $p \equiv (x \notin U)$ , diremos que  $p$  não depende, *essen-*  
*cialmente*, das variáveis que figuram na respectiva expressão.

Mais geralmente, dada uma proposição  $p$ , condicional em mais de uma variável (uma das quais seja, por exemplo,  $x$ ) diremos que não depende *essencialmente* de  $x$ , quando existir uma proposição  $q$ , em cuja expressão não figure  $x$ , e tal que  $p \equiv q$ ; ou, o que é equivalente, quando se tiver  $p \equiv \bigcap_x q$ . Assim, por exemplo, sobre o conjunto dos números reais, tem-se  $(\frac{2x}{y^2+1} > 0) \equiv (2x > 0)$ , o que mostra que a proposição  $\frac{2x}{y^2+1} > 0$  não depende essencialmente de  $y$ .

Reciprocamente, *toda a proposição condicional em cer*  
*tas variáveis*  $x, y, \dots$  *se poderã tomar para exprimir uma pro*  
*posição condicional, não sã nessas, mas ainda em outras va*  
*riáveis, das quais, porẽm, não dependerã essencialmente.* (1)

6.— MUDANÇAS DE VARIÁVEIS. REGRA DE SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEIS APARENTES. (2)— Se, dada uma proposição  $p$ , condicio  
nal nas variáveis  $x, y, \dots$ , efectuarmos, na expressão explíci-

---

(1) Uma convenção perfeitamente análoga (e que, de resto, se admite quase sem dar por isso) encontra-se, como caso particular, na Análise clássica. Assim, por exemplo, a equação em duas incógnitas  $x^2 + y^2 = 1$ , representativa de uma circunferência, *em geometria plana*, pode passar a considerar-se como equação a três incógnitas,  $x^2 + y^2 + 0z = 1$  representativa duma superfície cilíndrica, *em geometria do espaço*.

(2) Na terminologia de Hilbert, "Regel der Unbenennung der gebundenen Variablen", D. HILBERT und P. BERNAYS (I).

ta de  $p$ , uma mudança de variáveis (substituindo, p.ex.,  $x$  por  $u$ ,  $y$  por  $v$ , etc.) obter-se-á uma nova proposição  $p'$  condicional nas variáveis  $u, v, \dots$

Diremos que  $p'$  é uma proposição *conjugada* de  $p$ . É claro que, embora se não tenha  $p \equiv p'$ , as proposições  $p$  e  $p'$  diferem, entre si, unicamente, pela maneira como são representadas.

Porém, a mudança de variáveis permite introduzir novos conceitos, que de outro modo não poderiam ser definidos. Assim, por exemplo, a partir das proposições conjugadas  $x > y, y > x, y > z, z > y$ , definidas sobre o conjunto dos números reais, pode construir-se a proposição  $[(x > y) \wedge (y > z)] \vee [(z > y) \wedge (y > x)]$ , que já não é conjugada das primeiras e que, em linguagem comum se enuncia: "*y está compreendido (no sentido restrito) entre x e z*".

Mais sugestivo do que o anterior é o exemplo seguinte: Partindo da proposição "*x é filho ou filha de y*", definida no conjunto dos homens, e que escreveremos simbolicamente " $x \phi y$ ", poderá definir-se a proposição "*x é tio ou tia de y*", ou, abreviadamente, " $x \theta y$ ", tal como segue  $(x \theta y) \equiv \bigcup_{u,v} [(x \phi u) \wedge (v \phi u) \wedge (y \phi v)]$ ; e deste modo se introduz um *novo* conceito  $\theta$ , tendo utilizado, além das constantes lógicas, a constante  $\phi$ , apenas.

Vê-se, portanto, que as mudanças de variáveis figuram entre as operações fundamentais da Lógica matemática. Por outro lado, do facto de ser possível introduzir tantos símbo



los de variáveis quantos se quiser, resulta a possibilidade de efectuar um número ilimitado de diferentes mudanças de variáveis.

Relativamente a estas operações, os quantificadores gozam da seguinte propriedade, a que chamaremos *regra de substituição das variáveis aparentes*: Dada uma proposição  $p$  condicional em  $x$ , e eventualmente em outras variáveis  $y, z, \dots$ , se for  $p'$  a proposição que se obtém substituindo, na expressão de  $p$ , a variável  $x$  por uma outra variável  $u$ , que não coincida com nenhuma das restantes variáveis  $y, z, \dots$ , ter-se-á, necessariamente  $\bigcup_x p \equiv \bigcup_u p'; \bigcap_x p \equiv \bigcap_u p'$  (1)

Assim, a respeito do último exemplo, virá:

$$\bigcup_{u,v} [(x \phi u) \cap (v \phi u) \cap (y \phi v)] \equiv \bigcup_{w,t} [(x \phi w) \cap (t \phi w) \cap (y \phi t)] \equiv (y \theta x)$$

Uma consequência imediata deste princípio é a invariância das proposições categóricas a respeito das mudanças de variáveis, efectuadas sobre as respectivas expressões simbólicas. Assim, por exemplo, as fórmulas  $\bigcup_x \bigcap_y [(y > x) \cup (y=x)]$  e  $\bigcup_u \bigcap_v [(v > u) \cup (v=u)]$  traduzem uma e a mesma proposição da Aritmética dos números naturais.

É na mudança de variáveis (subordinada ao princípio agora mesmo enunciado) e na introdução de variáveis de tipo superior ao primeiro (assunto de que adiante nos ocuparemos),

---

(1) Factos semelhantes se verificam a respeito dos índices mudos dos somatórios, da *variável de integração* dos integrais definidos, etc.

que se reflete maiormente a liberdade de criação matemática. Este facto poderá ser constatado no decurso do presente trabalho.

7.— AS VARIÁVEIS NA LINGUAGEM COMUM<sup>(1)</sup>.— Na linguagem comum, as variáveis são constituídas *no caso mais simples* por substantivos comuns (ou locuções equivalentes) empregados no singular e precedidos do artigo indefinito "um": o artigo dá a ideia de variabilidade; o substantivo fixa o conjunto das determinações possíveis da variável, isto é, o *campo de variação* desta última. Assim, por exemplo, a expressão "um astro" representa uma variável, cujas determinações são: a Terra, o Sol, etc. Como distinguir, porém, *diferentes* variáveis com um *mesmo* campo de variação? Do seguinte modo: Faz-se preceder o substantivo de expressões tais com o "um", "outro" (ou "um segundo") "um terceiro", "um quarto", etc., conforme a ordem pela qual vão sendo introduzidas as variáveis; se estas forem mencionadas mais de uma vez na mesma proposição deverão usar-se a partir da segunda vez, os complementos "o primeiro", "o segundo", etc. no lugar de "um", "um segundo", etc. (2)

---

(1) As considerações desenvolvidas neste e noutros §§ seguintes, referem — se , evidentemente, à língua em que é escrito este trabalho, e têm por fim tornar mais nítida a passagem do sistema fonético ao sistema simbólico .

(2) Vêr nº 1 na pág. seguinte .

Antes de apresentar um exemplo, notemos que, também na linguagem simbólica da Matemática, se recorre algumas vezes a alfabetos ou tipos de imprensa diversos, quando se trata de representar variáveis sobre conjuntos fundamentais diversos: deste modo, o símbolo variável fixará, por convenção, o campo de variação que lhe pertence. Quando, porém, numa teoria dedutiva, todas as considerações se referem a um só, e sempre ao mesmo conjunto fundamental  $U$ , este será, por assim dizer, o Universo ao qual se aplica a teoria e bastará, neste caso, como veremos adiante, fazer a distinção entre variáveis de tipo 1, variáveis de tipo 2, etc. Então para as variáveis do tipo 1, que não são mais do que as variáveis fundamentais (isto é, as variáveis sobre  $U$ ), poderá sempre usar-se sem receio de ambiguidade, a expressão "*elemento fundamental*", precedida dos complementos "*um*", "*um segundo*", "*um terceiro*", etc. que permitem distinguir entre si as diferentes variáveis deste tipo - o que corresponde a formar os símbolos-variáveis com uma mesma letra (por exemplo  $x$ ) afectada de índices 1, 2, 3, ... (2)

- 
- (1) É claro que, sendo a linguagem um produto natural, são possíveis muitas variantes, que rompem, necessariamente, a rigidez dum esquema. Em particular, a *quantificação das variáveis* efectua-se nos casos mais simples, fazendo preceder directamente o substantivo comum de certas palavras como "*todo*", "*algum*", "*nenhum*", etc.
- (2) É claro que, *do ponto de vista lógico*, nada se opõe a que, *imitando a linguagem comum*, todas as variáveis fundamentais sejam representadas, numa dada teoria, por uma mesma letra, afectada de índices numéricos diversos. Mas sabe-se que, *do ponto de vista de clareza* o uso de índices pode apresentar inconvenientes.

Vejam<sup>os</sup> agora como se efectua o jogo das variáveis quando se trata de enunciar uma proposição em linguagem comum. Seja, por exemplo a definição do termo "*divide*", na teoria dos números naturais: "*Dados dois números quaisquer, diz-se que um deles divide o outro, quando existe um terceiro que , multiplicado pelo primeiro, reproduz o segundo*". É fácil ver que, neste enunciado, são mencionadas três variáveis fundamentais, que se distinguem entre si por meio dos adjectivos "*primeiro*", "*segundo*", "*terceiro*", aplicados segundo a ordem pela qual as variáveis forem introduzidas no agrupamento fonético que exprime a proposição. É evidente que tal processo de expressão, em casos menos simples, deixa muito a desejar em Matemática e se alguma dúvida subsistir a esse respeito, basta que nos lembremos de quanto é penosa a leitura dum livro de Álgebra, anterior ao facto histórico de importância extraordinária, que foi a introdução das letras com função simbólica.

A definição anterior será hoje enunciada, de preferência, de um modo semelhante ao seguinte: "*Dados dois números  $x, y$ , quaisquer, diz-se que  $x$  divide  $y$ , quando existe um número  $z$  tal que  $y=xz$* ". Mas tal enunciado não é ainda de tipo simbólico puro. Para obter uma formulação puramente simbólica, resta traduzir em símbolos adequados a constante matemática "*divide*" e as constantes lógicas "*Dados dois elementos ... quaisquer*" "*diz-se que ... quando*", "*existe um elemento ,,, tal que*". Teremos assim, adoptando o símbolo  $|$  para substituir o termo "*divide*":

$$\bigcap_{x,y} (x|y \leftrightarrow \bigcup_z y=xz)$$

8.— **RELAÇÕES n-ÁRIAS.**— No §4 observámos que toda a proposição condicional  $p$  definida em  $U$ , se pode escrever com a forma  $\alpha(x,y,...)$  em que a constante  $\alpha$  substitui, por convenção, todas as constantes que figurem numa dada expressão inicial; ter-se-á deste modo  $p \equiv \alpha(x,y,...)$ . Vimos além disso (§6) que, por mudanças de variáveis efectuadas na proposição  $p$ , esta se transforma em outras proposições condicionais  $p', p''$ , definidas ainda em  $U$ , e que, através de todas as possíveis mudanças de variáveis, alguma coisa se conserva constante em  $p, p'$  etc. Ora é fácil ver que (nas mudanças que substituem variáveis distintas, por variáveis também distintas) essa "alguma coisa" é representada pela constante  $\alpha$ , que exprime a relação (ou, se quisermos, o predicado) correspondente a  $p$ . Assim, por exemplo, as proposições condicionais " $x$  é filho de  $y$ " " $y$  é filho de  $x$ " " $u$  é filho de  $v$ ", etc., definidas sobre o conjunto dos homens, são conjugadas entre si (não equivalentes) e correspondem todas a uma mesma relação binária, expressa pela constante "é filho de" (neste caso colocada entre as variáveis).

Mais precisamente, diremos que duas proposições  $\alpha(x,y,...)$  e  $\beta(u,v,...)$ , condicionais num igual número de variáveis, definidas num dado conjunto  $U$ , representam a mesma relação definida em  $U$  (relativamente à ordem pela qual as variáveis são mencionadas no parêntese), quando efectuando a substituição  $x \rightarrow u, y \rightarrow v, ...$  de cada variável da primeira,

pela variável correspondente da segunda, se tem  $\alpha(u,v,\dots) \equiv \beta(u,v,\dots)$

Podemos escrever, em tal caso,  $\alpha = \beta$ .

Se for  $n$  o número das variáveis, diremos que  $\alpha$  é uma relação *n-ária* ou de grau  $n$ . Por outros termos: Dizer que, num dado conjunto fundamental  $U$  é definida uma relação *n-ária*  $\alpha$ , equivale a dizer que existe um critério, mediante o qual se possa afirmar, a respeito de cada agrupamento  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  elementos de  $U$ , se tal agrupamento verifica ou não verifica a relação  $\alpha$ , devendo verificar-se uma, e uma só, dessas duas hipóteses (1). É para indicar que o agrupamento  $(x_1, \dots, x_n)$  verifica a relação  $\alpha$ , que se escreve  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ . Porém, no caso das relações binárias, costuma adoptar-se também o esquema  $x\alpha y$ , em vez de  $\alpha(x,y)$  (tal é o caso das escritas " $x > y$ ", " $x$  é filho de  $y$ ", etc.).

Convém notar que, na linguagem comum, o uso fixou à palavra "relação" um significado, em virtude do qual o grau  $n$  de uma relação deve ser, pelo menos, igual a 2. Não obstante, em virtude da necessidade que se verifica, frequentes vezes, em Matemática, de uma uniformização de linguagem (por exemplo, o emprego da palavra "conjunto" no caso dos conjuntos vazios e dos conjuntos formados de um só elemento) fo-

---

(1) É claro que neste caso, os agrupamentos se referem a um conjunto de posições constituído pelos inteiros de 1 a  $n$ , indicativos da ordem pela qual as variáveis são introduzidas nas escritas, e não por essas variáveis.

mos levados a legitimar o emprego da expressão: "*relação unitária*" de harmonia com as convenções anteriores (1).

Apesar da distinção aqui reconhecida entre *relação* e *proposição condicional*, diremos frequentemente "*a relação  $\alpha(x,y,\dots)$* " em vez de "*a relação  $\alpha$* ".

9.— *RELAÇÕES CONJUGADAS—RELAÇÕES SIMÉTRICAS—RELAÇÕES EFECTIVAS.*— Seja  $\alpha(x_1,\dots,x_n)$  uma relação  $n$ -ária definida em  $U$  e  $(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$  uma permutação das variáveis  $x_1,\dots,x_n$ . É claro que não se terá, necessariamente,  $\alpha(x_1,\dots,x_n) \equiv \alpha(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$ . Pondo  $\beta(x_{i_1},\dots,x_{i_n}) \equiv \alpha(x_1,\dots,x_n)$  diremos que as relações  $\alpha$  e  $\beta$  são conjugadas. Assim, por exemplo, as relações " *$x$  divide  $y$* " e " *$x$  é múltiplo de  $y$* ", definidas no conjunto dos números naturais, são conjugadas; e o mesmo se verifica a respeito das relações " *$x$  é tio(a) de  $y$* " e " *$x$  é sobrinho(a) de  $y$* ", definidas no conjunto dos homens.

Uma relação diz-se simétrica quando coincide com as suas conjugadas. Exemplos: 1) a expressão "*é primo(a) de*" representa uma relação simétrica, definida no conjunto dos homens. 2) A relação geométrica fundamental " *$x,y,z$  estão em linha recta*", que escreveremos simbolicamente  $R_t(x,y,z)$  é uma

---

(1) É aqui adoptado o termo "*relação*" em vez de "*predicado*" atendendo a que o primeiro é o único usado nos exemplos que nos apresenta a *Matemática* (relações de igualdade, de desigualdade, de congruência, etc.); sendo substituído pelo termo "*condição*" nos casos em que o grau é igual a 1.

relação ternária, simétrica, definida no conjunto dos pontos do espaço ordinário.

Diremos que uma dada relação  $n$ -ária  $\alpha$  é *efectiva*, quando se não pode exprimir por meio de uma relação de grau inferior a  $n$ , isto é, quando a proposição condicional  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$  depende, *essencialmente* (§ 5, alínea 5) das  $n$  variáveis  $x_1, \dots, x_n$ .

#### 10. — AS RELAÇÕES $n$ -ÁRIAS E OS SUBCONJUNTOS DE $U^{(n)}$ .

Chamaremos *solução* de uma relação  $n$ -ária definida em  $U$  a todo o agrupamento de  $n$  elementos de  $U$  que a verifica. A cada relação  $n$ -ária, definida em  $U$ , corresponderá um sub-conjunto de  $U^{(n)}$  (§ 2), ou seja, o conjunto das suas soluções. Tal correspondência é, além disso, recíproca, pois que, dado um subconjunto  $K$  de  $U^{(n)}$  a proposição condicional  $(x_1, \dots, x_n) \in K$  representa uma relação  $n$ -ária definida em  $U$ . Mais ainda: dadas duas relações  $n$ -árias  $\alpha, \beta$  (não necessariamente efectivas) definidas em  $U$ , teremos, representando por  $A$  e  $B$  respectivamente os conjuntos das soluções de  $\alpha$  e de  $\beta$ :

1) A *conjunção*  $\alpha(x_1, \dots, x_n) \wedge \beta(x_1, \dots, x_n)$  corresponde à *intersecção*  $A \cap B$ . Analogamente, a *disjunção*  $\alpha(x_1, \dots, x_n) \vee \beta(x_1, \dots, x_n)$  corresponderá a *reunião*  $A \cup B$ .

2) A *proposição contraditória*  $\sim \alpha(x_1, \dots, x_n)$  corresponde o *conjunto complementar*  $\sim A$ .

3) As operações representadas pelos símbolos  $(u, v, \dots)/$  a que (§ 5, alínea 2) chamamos *projecções*, traduzem-se em  $U$



por operações que chamaremos ainda *projectões*, por analogia com o que sucede em Geometria Analítica. (Assim, p. ex., a proposição condicional  $(x,y)/(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$  equivalente a  $x^2 + y^2 \leq 1$ , representa um círculo, projecção da superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  sobre o plano  $(x,y)$ ).

4) As mudanças de variáveis traduzem-se por mudanças de ordem (que em Geometria Analítica tridimensional significam rotações de  $90^0$  em torno dos eixos coordenados).

5) A implicação incondicional  $\alpha(x_1, \dots, x_n) \subset \beta(x_1, \dots, x_n)$  traduz-se por uma inclusão  $A \subset B$ ; a equivalência incondicional  $\alpha(x_1, \dots, x_n) \equiv \beta(x_1, \dots, x_n)$  (ou seja,  $\alpha = \beta$ ), por uma identidade  $A = B$ .

Notando, finalmente, que todas as relações lógicas se podem reduzir às anteriores: *conjunção*, *disjunção*, *negação*, *implicação incondicional*, *projectões* e *mudanças de variáveis*, segue-se que toda a relação n-ária  $\alpha$ , definida em  $U$ , se poderá conceber, do ponto de vista da lógica formal, como um sub-conjunto  $A$  do conjunto  $U$ ; e cada proposição condicional  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$  poderá então interpretar-se como *função característica* do conjunto  $A$ , isto é, uma função que toma o valor 1 para todo o elemento de  $A$  e o valor 0 para todo o elemento de  $\sim A$ . (1)

---

(1) Recordemos, a propósito, o papel que as operações de intersecção, de reunião (estendida a uma família numerável de conjuntos), de formação do complementar e de projecção, desempenham na construção dos conjuntos mensuráveis  $B$  e dos conjuntos projectivos.

11. EXPLICITAÇÃO: FUNÇÕES E OPERADORES.— Qualquer teoria dedutiva poderia ser exposta, simbolicamente, sem introduzir símbolos de conjuntos ou de operadores. Todavia, por razões de carácter psicológico (comodidade, clareza, etc.), que podem influir decisivamente na marcha da investigação, convém muitas vezes recorrer a tais processos explícitos de expressão, que o homem utiliza a cada passo na linguagem comum. Lembremo-nos de que foi o método operatório que deu à Álgebra aquele grau de segurança e de eficiência que só mais tarde foi possível atingir em Geometria.

Dada uma relação unitária  $\alpha$ , representaremos por  $K_x \alpha(x)$  o conjunto das soluções de  $\alpha$ . (1). Se a relação  $\alpha$  admite uma e uma só solução, isto é se forem verificadas as duas condições: 1)  $\bigcup_x \alpha(x)$ ; 2)  $[\alpha(x) \cap \alpha(y)] \subset (x=y)$ , então representaremos por  $\iota_x \alpha(x)$  a solução única de  $\alpha$ . Deste modo o símbolo  $\iota_x$  tem o valor da locução "aquele que" e é claro que se a relação  $\alpha$  não verifica as condições 1), 2), a expressão  $\iota_x \alpha(x)$  será desprovida de significado.

Em resumo: teremos, por definição, qualquer que seja a relação unitária  $\alpha$ :  $[y \in K_x \alpha(x)] \equiv \alpha(y)$ ; e no caso de serem verificadas as condições 1), 2):  $[y = \iota_x \alpha(x)] \equiv \alpha(y)$ .

Os símbolos  $K_x$  e  $\iota_x$  poderão ainda aplicar-se a proposições condicionais em mais de uma variável. Assim,

---

(1) Por exemplo, no conjunto dos números complexos, tem-se  $K_x (x^4=1) = \{1, -1, i, -i\}$ .

dada uma relação  $\alpha(y, x_1, \dots, x_n)$  de grau  $n+1$ , definida em  $U$ , a expressão  $K_y \alpha(y, x_1, \dots, x_n)$  representará um conjunto indeterminado de elementos de  $U$ , dependente das variáveis  $x_1, \dots, x_n$ . Representando tal conjunto indeterminado pela fórmula  $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ , vê-se que a constante  $\Phi$  representa uma lei, que faz corresponder a cada agrupamento de  $n$  elementos de  $U$  um determinado sub-conjunto de  $U$ : chamar-lhe-emos operador (ou operação)  $n$ -ário, definido em  $U$ . Ter-se-á, então,

$$[y \in \Phi(x_1, \dots, x_n) \equiv \alpha(y, x_1, \dots, x_n)]$$

Não se faz mais, portanto, do que dar uma nova forma à relação  $\alpha$ , substituindo o símbolo  $\alpha$  pelos símbolos  $\epsilon, \Phi$ , com um novo critério de agrupamento.

Suponhamos agora que  $D$  representa um subconjunto de  $U^{(n)}$  tal que, para cada determinação de  $(x_1, \dots, x_n)$  contida em  $D$ , a proposição condicional  $\alpha(y, x_1, \dots, x_n)$  admita uma e uma só solução em  $y$ . Nestas condições, supondo verificada a hipótese  $(x_1, \dots, x_n) \in D$ , a fórmula  $K_y \alpha(y, x_1, \dots, x_n)$  representará um elemento indeterminado de  $U$ , dependente das variáveis  $(x_1, \dots, x_n)$ . Representando tal elemento indeterminado, pela expressão  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ , teremos, por convenção:

$$[y = \phi(x_1, \dots, x_n)] \equiv \alpha(y, x_1, \dots, x_n) \cap [(x_1, \dots, x_n) \in D]$$

Vê-se, pois, que a constante  $\phi$  representa uma lei que faz corresponder a cada elemento de  $D$  um elemento determinado de  $U$ : diremos que  $\phi$  é um operador (ou operação)  $n$ -ário, unívoco, definido em  $D$ , e chamaremos a  $D$  o domín

não de  $\phi$ . Diremos ainda que a variável  $y = \phi(x_1, \dots, x_n)$  é uma *função* unívoca das variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , *definida* em  $D$ . Se for  $D = U^{(n)}$  diremos que  $\phi$  é definida em  $U$ .

Fica assim subentendida uma distinção entre função e operador, análoga à que estabelecemos entre proposição condicional e relação. Em particular, se, dados dois operadores  $n$ -ários  $\phi, \psi$ , definidos num mesmo domínio  $D$ , se tiver

$$[(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D] \subset [\phi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_n)]$$

diremos que as funções  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  e  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  são equivalentes (ou idênticas) e escreveremos  $\phi(x_1, \dots, x_n) \equiv \psi(x_1, \dots, x_n)$ , ou ainda  $\phi = \psi$ . Todavia, para transigir com o uso, empregaremos algumas vezes a palavra "função" com o significado de "operador". (1)

Exemplos: 1) Se  $U$  for o conjunto dos pontos do es-

- (1) A distinção torna-se aconselhável em certos casos: quando, por ex., se pretende evitar confusão entre os conceitos clássicos de "função de função" (ou "função composta") e de "funcional". Entre *operador* e *operação* o uso tende a estabelecer a seguinte distinção: *Operador* é uma constante que, associada às constantes representativas de um certo número de elementos de  $U$ , permite representar outro ou outros elementos de  $U$ ; tal que é, p. ex., o símbolo  $\sqrt{\phantom{x}}$ , que associado à constante 2, gera a nova constante  $\sqrt{2}$ . *Operação* correspondente a um dado operador, é o acto pelo qual, dado um agrupamento de elementos de  $U$ , se determinam os elementos que tal operador faz corresponder ao agrupamento dado; mas aqui as palavras *dar* e *determinar* supõem a existência de um sistema canónico de representação, como é p.ex., o das fracções decimais para os números reais.

paço ordinário, e se  $\gamma(x,y,z)$  representa o centro da circunferência que passa pelos pontos  $x,y,z$ , a constante  $\gamma$  será um operador unívoco, ternário, definido no sub-conjunto  $D$  de  $U^{(n)}$  formado por todas as soluções da relação  $\sim Rt(x,y,z)$  (" $x,y,z$  não estão em linha recta")

2) Um exemplo típico de operador não unívoco é o que chamaremos operador algébrico de grau  $n$ , que faz corresponder, a cada agrupamento  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  números complexos, as raízes da equação  $y^n + x_1 y^{n-1} + \dots + x_n = 0$ . Neste caso trata-se, precisamente, de um operador *n-ívoco*.

Seja ainda  $\phi$  um operador unívoco, definido num sub-conjunto  $D$  de  $U^{(n)}$  e seja, por sua vez,  $D^*$  um subconjunto de  $D$ . Chamaremos então operador *induzido* por  $\phi$  em  $D^*$ , ao operador  $\phi^*$ , definido em  $D^*$  tal que:

$$[y = \phi^*(x_1, \dots, x_n)] \equiv [y = \phi(x_1, \dots, x_n)] \cap [(x_1, \dots, x_n) \in D^*]$$

Poderemos também dizer que  $\phi$  é um *prolongamento* de  $\phi^*$ .

E é claro que a fórmula  $\underset{y}{\exists} \alpha(y, x_1, \dots, x_n)$  representa uma função cujo domínio está automaticamente fixado: será o conjunto de *todas* as determinações de  $(x_1, \dots, x_n)$  para as quais a relação  $\alpha(y, x_1, \dots, x_n)$  admite uma única solução em  $y$ .

A definição de "*comutatividade*" (ou "*simetria*") que demos para as relações, aplica-se, *mutatis mutandis*, aos operadores. Por exemplo, o operador  $\gamma(x,y,z)$  do exemplo anterior é comutativo; mas já o não é o operador algébrico.

12. — OS OPERADORES NA LINGUAGEM COMUM. — Na linguagem comum, os operadores unitários são geralmente representados por substantivos comuns (com eventuais complementos) seguidos da preposição *de* e precedidos ou não do artigo definido, conforme são unívocos ou não unívocos. Exemplos: As expressões "*tio de*", "*o pai de*", "*múltiplo de*", "*o dobro de*", "*satélite de*", representam operadores unitários, definidos: no conjunto dos homens, os dois primeiros; no conjunto dos números naturais, os dois segundos; e no conjunto dos astros, o último.

Quando, porém, se trata de operadores de grau superior a 1, recorre-se a novas preposições, tais como, "*por*", "*entre*" etc. e às conjunções "*e*", "*ou*". Por exemplo, as expressões "*o produto de... por*" "*o.m.d.c. de ... e*", "*o resto de divisão de ... por*" representam operadores binários, unívocos, definidos no conjunto dos números naturais. A representação simbólica que, desde séculos, costuma dar-se aos operadores binários (tais como  $+$ ,  $\times$ ,  $:$ , etc.) mostra uma tendência a adoptar, para tais operadores, o tipo de agrupamento  $x \phi y$ , em vez de  $\phi(x,y)$ , tal como sucede para as relações binárias. Até com os operadores binários da Lógica Matemática,  $\cap$  e  $\cup$ , se verifica um facto semelhante.

13. — TRANSFORMAÇÕES UNÍVOCAS. — Seja  $\theta$  um operador unitário unívoco definido num subconjunto  $A$  do conjunto fundamental  $U$ . Dado um elemento  $x$  qualquer de  $A$ , chamaremos *imagem* de  $x$ , por intermédio de  $\theta$  ao elemento  $\theta(x)$ . Dado um subconjunto  $M$  qualquer de  $A$ , chamaremos *imagem* de  $M$  por intermê

dio de  $\theta$  e representaremos por  $\theta(M)$  o conjunto das imagens de todos os elementos de  $M$ . Por outro lado, qualquer que seja o subconjunto  $K$  de  $U$ , chamaremos *imagem completa inversa* de  $K$  por intermédio de  $\theta$  ao conjunto de *todos* os elementos de  $A$  cujas imagens pertencem a  $K$ ; isto é, ao conjunto

$$K_x \bigcup_y \{ [y = \theta(x)] \cap (y \in K) \}.$$

Se  $B$  for um conjunto tal que  $B \supset \theta(A)$ , diremos que  $\theta$  define uma *transformação unívoca* do conjunto  $A$  no conjunto  $B$ .

Se  $\theta$  for uma transformação unívoca de  $A$  em  $B$ , que verifique as duas condições: 1)  $(x \neq y) \subset [\theta(x) \neq \theta(y)]$ ; 2)  $B = \theta(y)$ , diremos que  $\theta$  constitui uma *transformação biunívoca* de  $A$  em  $B$ .

Dadas duas transformações unívocas  $\sigma$  (de  $A$  em  $B$ ) e  $\theta$  (de  $B$  em  $C$ ) chamaremos *produto* de  $\theta$  por  $\sigma$ , e representaremos por  $\theta\sigma$  a transformação (de  $A$  em  $C$ ) tal que  $(\theta.\sigma)x \equiv \theta[\sigma(x)]$  ou seja, mais detalhadamente,  $[y = (\theta.\sigma)(x)] \equiv \bigcup_u \{ [y = \theta(u)] \cap [u = \sigma(x)] \}$  com  $x \in A$  e  $u \in B$ .

É claro que, à parte a terminologia, a noção de "*produto de duas transformações*" coincide com a de "*função de função*".

Exemplos: representando os operadores "*o pai de*" e "*a mãe de*" respectivamente, pelos símbolos  $Pad$  e  $Mad$ , o produto  $Pad.Pad$  será o operador "*o avô paterno de*"; o produto  $Mad.Pad$  será o operador "*a avó paterna de*". Visto que se tem  $Pad.Mad \neq Mad.Pad$ , conclue-se deste simples exemplo, que o produto

de transformações unívocas não é em geral comutativo. Mais geralmente, ao conceito de "*função de funções*" (isto é, de "*função composta*", aplicado a funções de mais de uma variável) corresponde uma classe de operações a cada uma das quais chamaremos *sobreposição de operadores*. Assim, por exemplo, diremos que o operador  $\chi$  tal que  $\chi(x,y,z) \equiv \theta[\phi(x), \psi(y,z)]$  resulta duma *sobreposição* dos operadores  $\phi, \theta, \psi$ .

Se chamarmos *identidade*, e representarmos por  $I$ , a transformação que faz corresponder a cada elemento  $x$  o mesmo elemento  $x$ , (em símbolos:  $\bigcap_x [I(x)=x]$ ) vê-se que, a toda a transformação biunívoca  $\theta$  (de  $A$  em  $B$ ), corresponde uma, e uma só, transformação biunívoca (de  $B$  em  $A$ ) que representaremos por  $\theta^{-1}$ , tal que  $\theta^{-1}\theta = I$ , isto é tal que  $\theta^{-1}[\theta(x)] = x$ , qualquer que seja  $x \in A$ .

Dois conjuntos  $A, B$ , dizem-se *equivalentes* quando existe, pelo menos, uma transformação biunívoca de  $A$  em  $B$ . As transformações biunívocas de um conjunto  $A$  em si mesmo chamaremos *auto-equivalências* de  $A$ , ou, no caso de  $A$  ser finito, *substituições* sobre os elementos de  $A$ . Fica também automaticamente estabelecido o significado de expressões tais como "*produto de duas substituições*" "*substituição inversa*", etc.

14.— OPERADORES MÚLTIPLOS.— Os símbolos  $\iota_x$  sugerem a introdução de outros mais gerais. Seja  $\alpha$  uma relação  $n$ -ária, definida em  $U$ , a qual admite uma e uma só solução; pois bem, representaremos por  $\iota_{x_1, \dots, x_n} \alpha(x_1, \dots, x_n)$  a solução única de  $\alpha$  consti -



tuída, como sabemos, por um determinado agrupamento de  $n$  elementos de  $U$ . Apresenta-se este caso, quando, por exemplo,  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$  representa um sistema, compatível e determinado, de  $n$  equações lineares nas incógnitas  $x_1, \dots, x_n$ ; é claro que  $\alpha(x_1, \dots, x_n)$  será a *conjunção* das  $n$  equações (1).

Seja agora  $\alpha(y_1, \dots, y_p, x_1, \dots, x_n)$  uma relação de grau  $n+p$ , definida sobre  $U$ ; e seja  $D$  um subconjunto de  $U^{(n)}$  tal que, para  $(x_1, \dots, x_n) \in D$ , aquela relação admite uma, e uma só, solução em  $(y_1, \dots, y_p)$ . Então, supondo verificada a hipótese  $(x_1, \dots, x_n) \in D$  a fórmula  $\exists y_1, \dots, y_p \alpha(y_1, \dots, y_p, x_1, \dots, x_n)$ , que podemos substituir por esta outra:  $\bar{\phi}(x_1, \dots, x_n)$  - representará um agrupamento  $(y_1, \dots, y_p)$  de  $p$  variáveis, dependentes das  $n$  variáveis  $x_1, \dots, x_n$ . A constante  $\bar{\phi}$ , que faz assim corresponder a cada agrupamento de  $n$  elementos de  $U$ , pertencentes a  $D$ , um agrupamento de  $p$  elementos de  $U$ , chamaremos operador unívoco,  $p$ -úplo,  $n$ -ário (ou de ordem  $p$  e grau  $n$ ) definido em  $D$ . É claro que tal operador não será mais do que uma transformação unívoca do conjunto  $D \subset U^{(n)}$  no conjunto  $U^{(p)}$ , e poderá sempre (do, ponto de vista da lógica formal) desdobrar-se num agrupamento de  $p$  operadores simples  $\phi_1, \dots, \phi_p$ , conforme o esquema seguinte:

$$\begin{aligned} [(y_1, \dots, y_p) = \bar{\phi}(x_1, \dots, x_n)] &\equiv [y_1 = \phi_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge y_p = \\ &= \phi_p(x_1, \dots, x_n)] \text{ para } (x_1, \dots, x_n) \in D. \end{aligned}$$

---

(1) Exemplo:  $\exists_{x,y} [(x = 3y) \wedge (y = x - 4)] = (6, 2)$ .

*Exemplo:* Da relação quaternária  $(x_1 = x_2 y_1 + y_2) \cap (y_2 < x_2)$ , definida sobre o conjunto dos números naturais, deduz-se uma operação unívoca, binária, dupla  $(y_1, y_2) = \bar{\phi}(x_1, x_2)$ , definida para todos os pares de números, dos quais o segundo é distinto de 0; operação que se desdobra em dois operadores simples  $y_1 = \chi(x_1, x_2)$  (cociente da divisão de  $x_1$  por  $x_2$ ) e  $y_2 = \rho(x_1, x_2)$  (resto da divisão de  $x_1$  por  $x_2$ ). Em linguagem comum dir-se-á que  $y_1$  e  $y_2$ , são respectivamente, o cociente e o resto da divisão de  $x_1$  por  $x_2$ . Vê-se, pois, que a expressão "respectivamente, o cociente e o resto da divisão de... por" representa o operador  $\bar{\phi}$ .

15. — **RELAÇÕES MISTAS.** — As anteriores convenções podem facilmente estender-se ao caso em que, em vez de um só conjunto fundamental  $U$ , se considerem dados vários conjuntos fundamentais,  $U_1, U_2, \dots$

Suponhamos, para fixar ideias, que se trata apenas de dois conjuntos fundamentais  $U, V$ . A toda a proposição  $\alpha(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$  condicional nas variáveis  $u_1, \dots, u_m$ , sobre  $U$ , e nas variáveis  $v_1, \dots, v_p$  sobre  $V$ , chamaremos proposição condicional *mista*, definida em  $U$  e em  $V$ . Corresponder-lhe-á uma relação  $\alpha$ , *mista*, *m-ária* em  $U$  e *p-ária* em  $V$ .

Mais precisamente, se representarmos por  $(U, V)^{(m, p)}$  o conjunto de todos os agrupamentos de  $m+p$  elementos, dos quais  $m$  pertençam a  $U$  e  $p$  a  $V$ , podemos dizer que uma relação  $\alpha$ , definida em  $U$  e em  $V$ , *m-ária* em  $U$  e *p-ária* em  $V$ , é uma

lei que faz corresponder a cada elemento de  $(U,V)^{(m,p)}$  um e um sō dos dois valores seguintes: 1 (a relação é verificada), 0 (a relação não é verificada). Em particular, uma transformação unívoca de  $U$  em  $V$ , será uma lei  $\phi$  que faz corresponder a cada elemento  $x$  de  $U$ , um elemento determinado  $y=\phi(x)$  de  $V$ .

É claro que, de um ponto de vista *puramente* lógico, o caso de *vários* conjuntos fundamentais  $U_1, U_2, \dots$ , se reduz ao de *um sō* conjunto fundamental  $U$ , efectuando a reunião dos primeiros, e tendo em conta as relações  $x \in U_1, x \in U_2, \dots$ , definidas em  $U$ . Mas pode não ser esse o modo mais *natural* de proceder: é o que sucede quando, por exemplo, se trata de questões que envolvam, ao mesmo tempo, números reais e pontos geométricos; vectores e escalares, etc; convirá então considerar como conjuntos fundamentais distintos, o corpo real e o espaço geométrico, o conjunto dos vectores e o conjunto dos escalares, etc, adoptando um sistema simbólico que permita distinguir entre si as variáveis correspondentes a cada um destes conjuntos (representando, p.ex., os vectores com os caracteres do alfabeto latino e os escalares com caracteres do alfabeto grego, etc.). Todavia, como veremos adiante, ainda nestes casos a redução a um sō conjunto fundamental se pode efectuar *naturalmente*, por uma via em que a interdependência lógica e genética dos conceitos é posta em máximo relevo.

É o que se consegue com a teoria dos tipos de B. Russell.

16. — TIPOS FINITOS.— A teoria dos tipos baseia-se nes

te simples facto: toda a propriedade  $\alpha$  se pode conceber como um indivíduo dotado de certas propriedades  $\Gamma, \Delta, \dots$ ; isto é, todo o conjunto  $A$  se pode conceber como elemento de novos conjuntos  $A, B, \dots$ , os quais se dirão, naturalmente, de tipo superior ao do primeiro.

Mais precisamente, representaremos por  $R_1(U)$  o conjunto das relações  $\alpha, \beta, \dots$ , definidas num dado conjunto fundamental  $U$ ; dada uma proposição  $\Gamma(\xi, \eta, \dots, x, y, \dots)$ , condicional em variáveis  $\xi, \eta, \dots$ , sobre  $R_1(U)$ , e eventualmente, em variáveis fundamentais  $x, y, \dots$ , diremos que tanto essa proposição, como a relação correspondente  $\Gamma$ , são de tipo 2, sobre  $U$ . Por outro lado, chamaremos relações de tipo 1, sobre  $U$ , às relações  $\alpha, \beta, \dots$ , definidas em  $U$ ; variáveis de tipo 1 (a respeito de  $U$ ) às variáveis fundamentais  $x, y, \dots$ ; variáveis de tipo 2 (a respeito de  $U$ ), às variáveis  $\xi, \eta, \dots$ , sobre  $R_1(U)$ .

Exemplo: Se  $U$  for o conjunto dos números naturais, a proposição  $[\eta(x, y) \xrightarrow{x, y} \eta(x, y+x)] \cap \bigcap_x \eta(x, x)$  condicional em  $\eta$ , que escreveremos abreviadamente  $\Phi(\eta)$ , será verificada por infinitas relações binárias, definidas em  $U$  (p.ex.,  $x \leq y, x$  divide  $y, x+y=x+y$ , etc.). Porém, juntando-lhe a condição  $\Phi(\zeta) \xrightarrow{\zeta} [\eta(x, y) \xrightarrow{x, y} \zeta(x, y)]$ , que escreveremos com a forma abreviada  $\Psi(\eta)$ , é fácil ver que a condição  $\Phi(\eta) \cap \Psi(\eta)$  ou, abreviadamente,  $\Theta(\eta)$ , é agora verificada por uma única relação binária  $\eta$ , definida em  $U$ : a relação  $x|y$  (isto é, a relação " $x$  di

*vide y*") já considerada no § 7 (1). As fórmulas  $\Phi(\eta)$  e  $\Theta(\eta)$  representam, portanto, relações unitárias de tipo 2, sobre U. Utilizando o símbolo  $\iota$  introduzido no § 11 poderemos ainda escrever  $[\iota_{\eta} \Theta(\eta)] (x,y) \equiv x|y$ , e é fácil ver que tal fórmula representa uma proposição categórica de tipo 2, sobre U.

Representamos agora por  $\mathcal{R}_2(U)$  o conjunto das relações de tipo 2 sobre U; dada uma proposição condicional em variáveis de tipo 3 (isto é, variáveis sobre  $\mathcal{R}_2(U)$ ) e eventualmente em variáveis de tipo inferior àquele, diremos que tanto essa proposição, como a relação correspondente, são de tipo 3 sobre U. E assim sucessivamente.

Poderemos ainda dizer "elemento de tipo n a respeito de U" em vez de "relação de tipo n-1 sobre U".

Por outro lado, visto que operadores e conjuntos não são mais do que formas, sob as quais se podem apresentar as relações, segue-se que a classificação em tipos se pode apresentar, *mutatis mutandis*, aos operadores e aos conjuntos.

- 
- (1) Representando por Y o subconjunto de  $U^{(2)}$ , constituído pelas soluções de  $\eta(x,y)$  (§ 10), é fácil ver que  $\Phi(\eta)$  equivale à conjunção das condições: 1) Se  $(x,y)$  pertence a Y, também  $(x,y+x)$  pertence a Y; 2) O par  $(x,x)$  pertence a Y, qualquer que seja x. É claro que infinitos subconjuntos de  $U^{(2)}$  satisfazem a tais condições, entre eles o próprio conjunto  $U^{(2)}$ ; porém, a fórmula  $\Theta(\eta)$  exprime que Y é o menor dos conjuntos que satisfazem às duas condições 1), 2); isto é, qualquer que seja o conjunto Z correspondente a uma relação  $\zeta$  que verifique  $\Phi(\zeta)$ , ter-se-á, necessariamente  $Y \subseteq Z$ .

Assim, os subconjuntos  $A, B, \dots$  de  $U$  constituem elementos de tipo 2, a respeito de  $U$ ; as famílias  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$  de subconjuntos de  $U$ , constituem elementos de tipo 3 (conjuntos de tipo 2) a respeito de  $U$ , etc.

*As equações funcionais, em particular as equações diferenciais, constituem exemplos típicos, fornecidos pela Análise clássica, de proposições condicionais de tipo 2, sobre o conjunto dos números reais ou sobre o conjunto dos números complexos. A proposição*

$$\bigcap_{k>0} \bigcup_{h>0} (|y-x|<h \xrightarrow{y} |\phi(y) - \phi(x)|<k)$$

condicional em  $\phi$  (variável de tipo 2) e em  $x$  (variável de tipo 1), corresponde a uma relação binária  $\Gamma(\phi, x)$  de tipo 2, a qual condição se enuncia "A função  $\phi$  é contínua no ponto  $x$ ".

São de tipo 2 a respeito do corpo real ou do corpo complexo: o conjunto das funções racionais, o conjunto das equações algébricas, os operadores diferenciais e integrais, etc.

17. — TIPOS TRANSFINITOS.— Vimos como, a cada número natural, se pode fazer corresponder um tipo de relação. Poderão assim construir-se, com número ilimitado, conjuntos  $\mathbf{R}_1(U), \mathbf{R}_2(U), \mathbf{R}_3(U), \dots$  de relações sobre  $U$ .

Mas a possibilidade de criação de tipos de relações supera o poder de representação dos números naturais, como se pode concluir do seguinte exemplo:

Qualquer que seja o número natural  $k$ , representemos por  ${}^2\gamma_k$  o operador (tipo 2) que faz corresponder a cada função  $\phi(n)$  definida no conjunto dos números naturais, a função  $\phi(n)+k$ , definida no mesmo conjunto. Representando agora por  $\ell$  um número natural qualquer, seja, por sua vez,  ${}^3\gamma_\ell$  o operador que transforma  ${}^2\gamma_k$  em  ${}^2\gamma_{k+\ell}$  qualquer que seja  $k$ . Somos assim levados a definir, por indução, uma família de operadores  ${}^m\gamma_p$  dependentes dos parâmetros  $m$  e  $p$ , e cujo tipo  $m$  pode ser tão elevado quanto se quiser. Podemos finalmente definir, no conjunto dos operadores  ${}^m\gamma_p (m, p=1, 2, \dots)$  um novo operador  $\Gamma$  tal como segue:  $\Gamma({}^m\gamma_p) = {}^{m+1}\gamma_p$ , quaisquer que sejam  $m$  e  $p$ ; vê-se facilmente que não existe nenhum número natural que permita representar o tipo de  $\Gamma$ , e, mais ainda, que o tipo deste operador surge imediatamente depois dos tipos dos operadores  ${}^n\gamma_p$ , a partir dos quais é definido. Representaremos o novo tipo pelo símbolo  $\omega$ , de acordo com as convenções usuais. Notemos, entretanto, que já o símbolo  $\gamma$ , utilizado neste exemplo, representa um operador binário, de tipo  $\omega$ , que faz corresponder, a cada agrupamento  $(m, p)$  de dois números naturais, um operador  ${}^m\gamma_p$  de tipo  $m$ .

Deste modo, representando por  ${}^\omega U$  a reunião de todos os conjuntos  $R_n(U)$ , quando  $n$  percorre o conjunto dos números naturais, chamaremos relação de tipo  $\omega$  sobre  $U$ , a toda a relação definida em  ${}^\omega U$ , que não se reduza a nenhuma relação pertencente a este conjunto. Mas vê-se agora que a criação de tipos de relações poderá prolongar-se para além de  $\omega$ , exi

gindo a introdução de sempre novos símbolos, indicativos da ordem pela qual os tipos vão surgindo, isto é, a introdução de novos *números ordinais transfinitos* (superiores aos *números ordinais finitos*, que são representados pelos números na turais).

Adiante nos ocuparemos, pormenorizadamente, dos números ordinais.

18. — MUDANÇA DE CONJUNTO FUNDAMENTAL.— A atribuição de um tipo a cada proposição de uma dada teoria é, como vimos, *relativa* a um determinado conjunto fundamental  $U$ , que desempenha deste modo, o papel de um sistema de referência. Porém, a mu dança de conjunto fundamental é uma operação a que se recorre algumas vezes em Matemática, para comodidade de exposição. Assim, por exemplo, na Geometria euclideana tridimensional, é *natural* conceber, como elementos fundamentais apenas os pontos: nestas condições, o espaço geométrico  $U$  será o conjunto de todos os pontos; as rectas e os planos serão elementos de tipo 2 (conjuntos de elementos fundamentais); os conjuntos  $V$  e  $W$ , respectivamente, das rectas e dos planos serão elementos de tipo 3, etc. (1) Porém, na sistematização lógica das geo metrias projectivas, surgiu como facto novo a lei da dualida-

---

(1) Numa das axiomáticas da Geometria euclideana dadas por Hilbert - precisamente a mais divulgada - as rectas e os planos figuram como ele mentos fundamentais. É porém mais *intuitivo* conceber as rectas e os planos como conjunto de pontos. Na sua axiomática apresentada em 1904, Oswald Veblen toma os pontos como únicos elementos fundamentais.



de, em virtude da qual se tornou *cômodo* conceber como elementos fundamentais, não sô os pontos, mas também as rectas e os planos, de modo que o *universo geométrico* será constituído (no caso da geometria tridimensional) pelos conjuntos  $U^*$ ,  $V^*$  e  $W^*$ , respectivamente, dos pontos, das rectas e dos planos (incluídos os elementos impróprios) e assim os geômetras foram levados a converter as relações lógicas de *pertence* ( $\epsilon$ ) e de *inclusão* ( $\subset$ ), em relações geométricas de *incidência*, de modo que um plano, agora elemento de tipo 1, já não se *identifica* com o conjunto dos seus pontos, mas será apenas o *suporte* de tal conjunto; o conjunto dos pontos de uma recta será a *pontual* definida por essa recta, etc.

A Análise funcional oferece-nos um exemplo notável da mudança de conjunto fundamental, passando do corpo real (ou do corpo complexo) aos *espaços funcionais* que são conjuntos de operadores de tipo 1 (portanto elementos de tipo 2) relativos àqueles corpos. Tais operadores são concebidos como *pontos* do espaço, isto é, como *elementos fundamentais*.

Tornaremos a este assunto adiante, quando trataremos das axiomáticas.

19. — AS CONSTANTES LÓGICAS E A TEORIA DOS TIPOS.— Seja  $i_\alpha$  uma relação  $n$ -ária de tipo  $i$ , sobre  $U$ , e seja  $i_U$  o conjunto das relações de tipo inferior a  $i$ . É fácil ver que  $i_\alpha$  não pode coincidir com nenhum dos elementos de  $i_U$  (isto é que a uma mesma relação não pode corresponder mais de um tipo). Com efeito, dar a relação  $i_\alpha$  equivale, como vimos no § 10, a dar um subconjunto de  $i_U^{(n)}$ , e, assim, a relação  $i_\alpha$  será definida a partir de elementos de tipo inferior, e todos, em última análise, são definidos a partir dos elementos de  $U$ , que se consideram previamente dados. É portanto excluída a possibilidade de definições de conjuntos tais como a seguinte: "O conjunto  $A$  é constituído por dois elementos, um dos quais é o número 3 e o outro é o próprio conjunto  $A$ ". Um conjunto só poderá ser construído a partir de elementos anteriormente definidos. E deste modo se chega à seguinte importante conclusão: não é legítimo falar da totalidade dos tipos (ou ainda dos números ordinais); com efeito, qualquer que seja o conjunto  $R$  de relações (de diversos tipos) sobre  $U$ , toda a relação definida em  $R$  (em particular a relação  $\zeta \in R$ ) será distinta de qualquer relação pertencente a  $R$ . Mesmo admitindo, por um momento, que a relação  $\zeta \in R$  coincide com um dos elementos de  $R$ , tal não pode suceder com a relação  $\rho(\zeta)$  que definiremos do seguinte modo:  $\rho$  é verificada por todas aquelas (e só por essas) relações  $\zeta$ , pertencentes a  $R$ , que não veri-

ficam a condição  $\zeta(\zeta)$ ; em símbolos:  $\rho(\zeta) \equiv (\zeta \in \mathcal{R}) \cap \sim \zeta(\zeta)$  (1). Com efeito, supondo que  $\rho \in \mathcal{R}$  é se conduzido ao clássico paradoxo de Russell.

Por uma via diversa, Burali-Forti tinha chegado a uma conclusão equivalente, com o seu paradoxo relativo à totalidade dos números ordinais.

Uma consequência importante, do que atrás ficou dito, é a seguinte; cada uma das constantes lógicas  $\epsilon, \cap, \rightarrow, =, \sim$ , etc., representa relações sobre  $U$  de vários tipos, os quais dependem do tipo das variáveis que são aplicadas. Análoga observação se pode fazer quanto aos conceitos de "elemento" ("ser", "entidade", "ente", "indivíduo", etc.) e "relação" ("atributo",

- 
- (1) Admitindo que se tem  $\rho \in \mathcal{R}$ , de duas uma: ou é verdadeira a proposição  $\rho(\rho)$ , ou é verdadeira a sua contraditória  $\sim \rho(\rho)$ ; mas visto que, por definição,  $\rho(\zeta) \equiv (\zeta \in \mathcal{R}) \cap \sim \zeta(\zeta)$ , ter-se-á no primeiro caso,  $\rho(\rho) \rightarrow (\rho \in \mathcal{R}) \cap \sim \rho(\rho)$ , e portanto  $\sim \rho(\rho)$ , o que é contra a hipótese; e ter-se-á, no segundo caso  $(\rho \in \mathcal{R}) \cap \sim \rho(\rho) \rightarrow \rho(\rho)$  o que é de novo contra a hipótese. O absurdo vem de supor que  $\rho$  pertence a  $\mathcal{R}$ .

Uma variante sugestiva do paradoxo de Russell é o exemplo do *catálogo de todos os catálogos que não se citam*. Notemos, porém, que num dado momento e a respeito de uma dada biblioteca, é possível imaginar um catálogo de todos os catálogos existentes, o qual obviamente, se deve citar. Todavia a consideração de conjuntos que se contêm como elementos de si mesmos deve ser eliminada dos raciocínios se não quisermos abandonar as leis do pensamento a que estamos habituados. Analogamente, no sujeito de uma dada proposição não deve figurar essa mesma proposição; a não observância desta norma deu já origem, na antiguidade, ao paradoxo de Epimenides de Creta.

"predicado", "conjunto", etc.). Podemos convencionar que, em cada caso concreto, o tipo daquelas relações é imediatamente superior aos tipos das relações às quais são aplicadas; assim por exemplo, a conjunção  $\cap$  comporta-se como operador binário de tipo 2, quando aplicado a proposições de tipo 1, etc. (1). No momento em que estão sendo aplicadas, as constantes lógicas constituem operações mentais, fenômenos psíquicos em *acto*; apenas *realizadas*, a atenção pode incidir *retrospectivamente* sobre tais fenômenos, condensando-os em seres, em dados do *real*.

Um conceito de tipo variável é ainda o do *número cardinal*. Com efeito, o operador lógico "o número de elementos de" que abreviadamente escreveremos *Num*, será um operador de tipo 2, 3, etc., em relação ao conjunto fundamental *U*, conforme for aplicado a subconjuntos de *U*, a famílias de subconjuntos de *U*, etc.

Notemos, finalmente, que a expressão "um elemento" não representa uma variável como a que corresponde, por exemplo, à expressão "um astro"; no segundo caso o campo da variação é previamente fixado (ou pelo menos *admite-se* que o seja) pelo substantivo "astro"; no primeiro caso, a *extensão* do conceito é a *mais ampla* que, num dado momento, se possa conceber, donde a impossibilidade de fixar o respectivo campo de variação, visto que tal conceito está a receber constantemente, interpreta-

---

(1) Seria talvez mais conforme à Realidade dizer que, a respeito de *uma dada teoria*, o tipo de tais relações é num dado momento imediatamente superior aos tipos de todas as relações da referida teoria às quais as primeiras tenham sido efectivamente aplicadas, até esse momento.

ções novas e *imprevistas*. Deste modo, as expressões "*um elemento*" "*um segundo elemento*", etc., usadas sem qualquer limitação de significado, representam variáveis na mais larga acepção da palavra e, para salientar este facto, empregaremos em tal caso o substantivo (na verdade adjectivo substantivado) "*indeterminada*", em vez do substantivo "*variável*".

20 — A TEORIA DOS TIPOS E O SIMBOLISMO. — A introdução de sempre novos tipos de variáveis cria ao simbolismo lógico dificuldades que não é possível resolver de um modo completo como veremos a propósito dos números transfinitos.

Nos casos em que não seja necessário considerar elementos de tipo superior a um número finito bastante baixo (3, por exemplo), a distinção dos tipos de variáveis poderá fazer-se por um processo análogo ao que adoptámos no § 1, em que convencionámos representar elementos de  $U$ , por letras minúsculas do alfabeto latino; subconjuntos de  $U$ , por letras maiúsculas do alfabeto latino, e famílias de subconjuntos de  $U$ , por letras maiúsculas do alfabeto gótico. Tal processo, porém, deve ser abandonado quando for necessário considerar muitos tipos diversos.

Tratando-se de relações de *tipo finito*, este pode sempre ser deduzido da expressão explícita das respectivas proposições condicionais, atendendo ao modo como os parenteses se compreendem um aos outros, e não contando os parênteses relativos a constantes lógicas. Por exemplo, uma relação  $\alpha$  da forma

$$\alpha(\xi(x,y),z,\bigcup_y (\eta(x,y) \cap \zeta(x,\theta(y)))) , \text{ em que } \xi,\eta,\zeta,\theta$$

designam *relações indeterminadas* sobre  $U$ , serão, evidentemente , uma relação de tipo 3.

Mas tal processo já não pode ser aplicado exactamente quando nas fórmulas figuram símbolos de conjuntos ou de operadores (exceptuados os operadores da Lógica). (Bastará considerar, então, os operadores unívocos, visto que todo o operador não unívoco se reduz a um operador unívoco de tipo imediatamente superior). O caso mais simples será aquele em que o contradomínio é um subconjunto de  $U$  (isto é, quando os valores da função são elementos de  $U$ ); neste caso o processo anterior pode ainda ser aplicado com uma modificação que consiste em escrever como índices do símbolo do operador, os símbolos das variáveis das quais a função não depende. (1) Assim, por exemplo um operador da forma  $\phi_{x,y,v,\eta}(\xi_z(x,y,\eta(z)),\psi(u,\zeta(v)),t)$  em que  $\zeta,\eta$ , designem *operadores indeterminados* e  $\psi$  um *operador determinado* serão, de acordo com a convenção precedente, um operador de tipo 3. Resta porém, estabelecer convenções correspondentes que sirvem para operadores quaisquer e, mais ainda, convenções que permitam distinguir entre si símbolos-relações, símbolos-conjuntos e símbolos-operadores; e resta, finalmente, estender o simbolismo aos tipos transfinitos. Deixaremos, todavia, neste ponto, o problema.

---

(1) Na terminologia hilbertiana as funções deste género são denominadas *funcionais*, de que são um caso particular as funcionais da Análise funcional, fundada por Volterra.

Um caso corrente de operadores de tipo superior a 1 é o que se apresenta em expressões tais como: "família de operadores  $\phi$  dependentes de um parâmetro  $i$ , variável sobre um conjunto  $A$ ".

É fácil ver que, se  $A \subset U$ , e se os operadores forem de tipo 1, a respeito de  $U$ , a família dos operadores  $\phi_i$  (família que representaremos por  $\{\phi_i\}$ ) não é mais do que a imagem de  $A$ , por intermédio do operador  $\phi$  de tipo 2, que faz corresponder a cada elemento  $i$  de  $A$  um operador  $\phi_i$ .

Adoptaremos ainda as seguintes convenções, relativas ao simbolismo lógico:

Dada uma família  $F$  de proposições condicionais nas variáveis  $x, y, \dots$ , representaremos por  $\bigcup_{\eta \in F} \eta(x, y, \dots)$  e por  $\bigcap_{\eta \in F} \eta(x, y, \dots)$  respectivamente, a disjunção e a intersecção de todas as proposições pertencentes à família  $F$ . Em particular, poderá apresentar-se uma família  $\{\alpha_\mu(x, y, \dots)\}$  de proposições condicionais, dependentes do parâmetro  $\mu$ , variável sobre um dado conjunto  $M$ ; neste caso a conjunção de todos os elementos da família poderá representar-se pela fórmula  $\bigcap_{\mu \in M} \alpha_\mu(x, y, \dots)$ , ou simplesmente,  $\bigcap_{\mu} \alpha_\mu(x, y, \dots)$ , se não houver dúvidas sobre o campo de variação de  $\mu$ . Analogamente para a disjunção.

Assim, por exemplo, as expressões  $\bigcup_x \alpha(x, y, z, \dots)$ ,  $\bigcap_x \alpha(x, y, z, \dots)$  representam, respectivamente, a reunião e a intersecção de uma família  $\{\beta_x(y, z, \dots)\}$  de proposições definidas em  $U$ , tais que  $\beta_x(y, z, \dots) \equiv \alpha(x, y, z, \dots)$ .

Um outro caso particular importante é aquele em que  $M$  é o conjunto dos números naturais. Então  $\{\alpha_\mu(x, y, \dots)\}$  será

uma família numerável de proposições condicionais. Recordaremos a propósito, o papel que a reunião e a intersecção de uma família numerável de proposições condicionais desempenham na teoria dos conjuntos mensuráveis B, conjuntos analíticos, etc. Notemos por último, que o conjunto dos números naturais pode ser sempre *substituído* por um conjunto de tipo determinado, qualquer que seja o conjunto fundamental U; com efeito, se U não contém os números naturais, mas é infinito, podemos *considerar*, como número natural, toda a classe de subconjuntos de U, finitos e equivalentes entre si; se U é finito, podemos *considerar* como número natural toda a classe de elementos de  ${}^{\omega}U$  (ver §17) que tenham o mesmo tipo, a respeito de U (1).(\*)

---

(1) O conjunto dos números naturais será assim substituído por um conjunto que lhe é *isomorfo*, o que equivale a dizer *idêntico*, do ponto de vista das propriedades formais. Adiante será precisado o significado da palavra "*isomorfo*".

(\*) Ver as NOTAS RELATIVAS À TESE, do Autor, no final do presente trabalho (A.F.Oliveira).



CAPÍTULO II. — SISTEMAS ABSTRACTOS E HOMOMORFISMOS.

21 — O LÓGICO E O INTUITIVO NA HISTÓRIA DA DEFINIÇÃO MATEMÁTICA. — O que devemos entender por *uma definição matemática*? Como distinguir, em Matemática, os conceitos puramente formais, daqueles que correspondem a uma realidade? Quais as definições que devemos considerar *constitutivas*? Eis aí dos géneros de questões que mais têm preocupado os matemáticos e os filósofos através dos séculos: que já se apresentam na Antiguidade a propósito do paradoxo de Zenão e dos problemas não resolúveis por meio da régua e do compasso; que se têm posto de um modo agudo a respeito das noções de irracional, de complexo, de transfinito, etc.etc. Todas as discussões travadas à volta deste assunto, todos os esforços no sentido de esclarece-lo tendem naturalmente a um mesmo resultado: a conciliação entre o lógico e o intuitivo, evitando desvios quer num, quer no outro sentido e é este esforço de conciliação que tem condicionado através da História, a evolução dos conceitos de *número*, de *função*, de *conjunto*, etc.

O aparecimento da Geometria analítica determina a distinção entre as curvas *algébricas* (que seriam as únicas susceptíveis de uma *definição matemática*) e as curvas então chamadas *mecânicas* e que hoje são compreendidas na designação de *transcendentes*. Paralelamente, o conceito de função parte de duas origens diversas: por um lado, o conceito de *função susceptível de representação analítica*, isto é, de função que se

possa *exprimir* (1) por meio de certas funções, consideradas elementares; por outro lado, o conceito *intuitivo* de função, sugerido pelos fenômenos mecânicos, dos quais se pode dar uma *descrição*, em *gráficos* ou *tabelas*.

Os métodos de construção lógica aperfeiçoam-se consideravelmente no século XIX, com a teoria das funções analíticas, com a teoria de Galois, etc. Porém, o desenvolvimento da *Análise* pura e, em particular modo, a teoria dos conjuntos põem de novo, com a máxima acuidade, o problema da conciliação entre o lógico e o intuitivo. O princípio de Zermelo que, segundo a própria designação original ("*Auswahlpostulat*") admite a possibilidade de efectuar um número infinito de escolhas arbitrárias, provocam a histórica discussão das "*Cinco cartas sobre a teoria dos conjuntos*", em que somente Hadamard ocupa uma posição platónica. As teorias de Poincaré e a sua reacção (util sô até certo ponto) aos métodos cantorianos parecem ter determinado em França um revigoração da situação empirista. Procura-se então evitar o perigo de *raciocionar no vácuo*, isto é, sobre entidades não susceptíveis de uma construção efectiva. Borel insurge-se contra as matemáticas verbais, "*constructions logiques dans lesquelles on jongle avec des symboles auxquels ne correspond*

---

(1) Aqui a palavra "*exprimir*" tem um significado muito restrito: *exprimir* um operador  $\phi$  nos operadores  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , consiste, neste caso, em *construí-lo* por meio de sobreposições (§13) efectuadas um número finito de vezes, entre os operadores  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , e entre os resultados de tais sobreposições.

*aucune intuition*" (1), e proclama a necessidade de excluir, do domínio da Análise, as entidades que não possam definir-se efectivamente, por meio de um número finito de palavras.(2) De acordo com tal programa, introduz primeiro as noções de *número* e de *função calculável* (3) e em seguida a de conjunto *bem definido*, noção esta que coincide com a de conjunto *mensurável*. Borel já introduzida pelo mesmo autor nas suas investigações sobre o problema da medida. Por sua vez, a teoria dos conjuntos de Borel vem reunir-se à teoria das funções de Baire, numa bela síntese realizada por De La Vallée Poussin (4). Observa-se, além disso, que o domínio da Análise clássica não vai além das classes de Baire de La Vallée Poussin, as quais satisfazem superabundantemente às exigências da técnica.

Mas a Análise clássica diz respeito ao passado, e é principalmente para o futuro que se deve olhar. Sucede, por outro lado, que nem todos os conjuntos bem definidos parecem susceptíveis duma construção efectiva. Numa primeira tentativa de alargamento, observando que os processos de definição exigidos por Borel são demasiado restritivos, pois excluem certas enti-

---

(1) E. BOREL (I). p.181. No que se refere aos trabalhos de escola de Borel as indicações aqui apresentadas são colhidas em J. CAVAILLES (I), Introdução, e em LUSIN (I).

(2) Borel procura evitar, com a noção de calculável, o paradoxo de Richard, relativo a tais definições.

(3) "Un nombre  $\alpha$  est calculable lorsque, étant donné un nombre entier  $n$  quelconque, on sait obtenir un nombre rationnel qui diffère de  $\alpha$  de moins de  $1/n$ ". "Une fonction est calculable lorsque sa valeur est calculable pour toute valeur calculable de la variable". BOREL (I).

(4) Ch. de la VALLÉE-POUSSIN (I).

dades que parecem dignas de estudo, Lebesgue introduz a sua noção de "nommable": "Un objet est défini ou donné quand on a prononcé un nombre fini de mots s'appliquant à cet objet et à celui-là seulement; c'est à dire, quand on a nommé une propriété caractéristique de l'objet" (1), e, deste modo, é levado a admitir, além das definições de carácter *constructivo*, de Borel, outras definições, de carácter *descriptivo*.

Em tais investigações, Lebesgue é sucedido por Lusin, Sierpinski e Souslin, que aprofundam a teoria dos conjuntos de Borel e estudam as novas categorias de conjuntos: conjuntos *analíticos* e conjuntos *projectivos*. Enquanto na definição dos conjuntos de Borel intervêm apenas a reunião de infinidades numeráveis de conjuntos, disjuntos dois a dois, e a formação do complementar de cada conjunto em relação a um outro que o contenha, na definição das novas categorias de conjuntos intervêm uma nova operação: a projecção ortogonal segundo os eixos coordenados. Lusin observa que nada parece opôr-se à admissão de uma tão simples operação *geométrica* (como tivêmos ocasião de vêr no capítulo precedente, trata-se mesmo de uma das operações fundamentais da Lógica); porém certas propriedades dos novos conjuntos estudados revelam-se paradoxais, e Lusin termina a sua importante obra com a seguinte conclusão: "*l'auteur de ce livre s'incline... à considérer les exemples construits par lui comme formés de mots et ne définissant pas des êtres véritablement achevés, mais seulement des virtualités.*" (2)

---

(1) LEBESGUE (I).

(2) Obra já citada, p. 322.

O que surpreende nestas notáveis investigações, desde Borel a Lusin, é que não tenha sido nelas utilizado um dos instrumentos que parecem mais indicados para tal fim: a Lógica Matemática. Considerando o problema da definição matemática de um outro ponto de vista (tendo como objectivo principal uma demonstração de não contradição da Aritmética), Hilbert e os da sua escola (Bernays, Ackermann, von Neumann, etc.) dedicaram-se a um estudo aprofundado das definições por indução finita, de que conseguiram obter, com a introdução de funções de tipo superior a 1, esquemas cada vez mais amplos, muito para além dos conhecidos. Se o objectivo principal não foi atingido, pode dizer-se que tais investigações no campo da Lógica Matemática vieram, pelo menos, lançar muita luz sobre o mecanismo das definições lógicas.

No esquema apresentado no § seguinte, não se faz referência explícita às definições por recorrência, pela razão de que é adoptado um ponto de vista geral, tendente a obter uma visão sintética de todas as teorias matemáticas, algébricas, topológicas, geométricas, etc.

22 — DEFINIÇÕES LÓGICAS SOBRE UM DADO CONJUNTO FUNDAMENTAL. — Dado um conjunto fundamental  $U$ , seja  $P$  um conjunto *arbitrário* de relações sobre  $U$ . (1) Para uniformização de linguagem, admitiremos a possibilidade de que, entre tais relações,

---

(1) Embora nenhuma restrição aqui seja imposta ao tipo de tais relações, a verdade é que, para o fim que se tem em vista, não será necessário ir além das relações de tipo 2.

figurem elementos de  $U$ , considerados estes como *relações de tipo 0*.

É claro que, a partir das relações  $P$ , poderão definir-se infinitas relações sobre  $U$ , por meio das operações da Lógica.

Convencionaremos então que, tomando para *primitivas* as relações  $P$ , devemos chamar *relações derivadas* a todas as aquelas que, não pertencendo a  $P$ , se possam definir logicamente a partir das primeiras.

Vejamos, porém, mais de perto, em que consiste o mecanismo das definições lógicas, já esboçadas no capítulo anterior renunciando, todavia, a pretensões de encerrar num esquema rígido todos os possíveis processos de definição, visto que, para além de todo o esquema rigoroso, novas e não previstas possibilidades virão sempre apresentar-se. (1) Para maior brevidade de exposição, chamaremos fundamentais às operações lógicas de: *identificação* ( $=$ ) (2), *conjunção* ( $\cap$ ), *disjunção* ( $\cup$ ), *negação* ( $\sim$ ), *quantificação* ( $\bigcap_x, \bigcup_x$ ), *mudanças de variáveis e explicitação* ( $\iota_x$ ). Ainda por razões de comodidade, será aqui adoptado o ponto de vista quasi-combinatório da teoria dos conjuntos, supondo preexistente às respectivas definições todas as rela-

---

(1) Ver-se-á adiante que, no caso presente, a imprecisão do esquema se refere ao modo de introduzir as variáveis de tipo transfinito. De resto, já no § 20 se aludiu a esta indeterminação.

(2) É claro que a constante  $=$  funciona como *operador*, enquanto a cada par  $(x,y)$  de variáveis, faz corresponder a *proposição*  $x=y$ .

ções sobre  $U$ , de tipo inferior a um limite arbitrariamente fixado (1). Diremos então que uma dada relação  $\alpha$  se pode *exprimir logicamente* nas relações primitivas, quando existir uma sucessão *finita*  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots, \beta_1, \dots, \beta_p$  em que: 1) os  $m$  primeiros termos sejam relações primitivas; 2) os  $n$  termos a seguir aos  $m$  primeiros sejam constituídos por variáveis de tipo *qualquer*, a respeito de  $U$ ; 3) cada um dos últimos  $p$  termos se obtenha de um ou dois dos precedentes por meio de uma operação lógica fundamental, aplicada uma só vez; 4) o último termo  $\beta_p$  coincide com  $\alpha$  ( $m, n, p$  representam números naturais que dependerão de  $\alpha$ , de um modo não necessariamente unívoco).

Vê-se, portanto, como, partindo das relações primitivas, se chegará a uma expressão  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , de ordem mais ou menos elevada (§4), que representa  $\alpha$  em função *lógica* daquelas relações. Deste modo, a constante  $\alpha$  substituirá todas as constantes lógicas e não lógicas que figuram no desenvolvimento de  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  e é evidente que a vantagem desta substituição, tendente a uma economia de linguagem, dependerá da importância do conceito definido, pois que, quanto mais importante for tal conceito, maior será o número de vezes que o mesmo intervirá nas fórmulas ulteriores.

É a proposição categórica, que sob a forma de uma equivalência ou de uma identidade, fixa o significado de  $\alpha$ , que se dá normalmente o nome *definição de  $\alpha$* ; proposição esta que se

---

(1) É claro que, uma vez adoptado este ponto de vista, se torna dispensável o axioma de Russell, chamado de *reductibilidade*.

apresenta, manifestamente, com o carácter de um axioma (1). É claro que se a sucessão  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \xi_1, \dots, \xi_n, \beta_1, \dots, \beta_p$  for demasiado longa, e conduzir portanto, a uma expressão demasiado complexa, será praticamente indispensável fragmentar a definição em várias definições parciais, introduzindo sucessivamente vários símbolos, destinados a representar algumas das relações intermediárias. (Recordaremos, a título de exemplo, o modo como no § 16, foi definida a relação  $x|y$ ).

É preciso porém não perder de vista que a introdução dos símbolos (ou das palavras) que, numa dada teoria, são escolhidos para representar, *definitivamente*, certas noções (como por exemplo, os símbolos,  $+$ ,  $>$ ,  $3$ , etc.; as palavras *circunferência*, "*polinômio*", etc.) não se faz de um modo perfeitamente *arbitrário*, mas antes de um modo *natural*, isto é, acompanhando o desenvolvimento *genético* da teoria, o qual por sua vez é condicionado pelo ambiente que circunda o homem. Com efeito, na evolução histórica de uma teoria dedutiva, os conceitos efectivamente postos em evidência, não se reduzem a associações puramente *acidentais* de conceitos primitivos e de constantes lógicas; constituem, pelo contrário associações *privilegiadas* de tais conceitos, privilegiadas pela fecundidade, pela riqueza de propriedades, pelas aplicações que possam vir a receber dentro ou fora da teoria. Segundo Poincaré é na escolha de tais combinações privilegiadas, entre infinitas

---

(1) Todavia, pode ainda conceber-se a definição, não como um juízo, mas como um acto. Esta última interpretação é a que corresponde à tendência intuicionista, construtiva.



combinações possíveis, que consiste a função criadora do matemático (1).

No isolamento de tais conceitos, o investigador procede de um modo mais ou menos sintético, sem se aperceber de grande parte das operações elementares que intervêm na definição do mesmo modo que não se apercebe dos fenómenos que, no interior das suas células nervosas, acompanham essas operações; guiado por uma *intuição* (muitas vezes, por um verdadeiro *sentimento artístico*), que lhe permite efectuar a escolha a que se refere Poincaré. (2) Sucede até, especialmente nas matemáticas elementares, que muitos dos conceitos são sugeridos *directamente* pelo Mundo físico, e, nestes casos, a definição apresenta-se nitidamente com o carácter de um postulado-tradução lógica de uma lei natural.

Importa ainda salientar, de acordo com o que já foi dito no final do § 6, que são as mudanças de variáveis e, mais geralmente, a introdução de variáveis de tipo *qualquer* que mais amplas possibilidades oferecem à criação matemática.

---

(1) "Inventer, cela consiste précisément à ne pas construire les combinaisons inutiles et à construire celles qui sont utiles et qui ne sont qu'une infime minorité. Inventer, c'est discerner, c'est choisir". POINCARÉ (I), p.46.

(2) A este respeito Borel declara: "Il faut ... se borner à étudier les fonctions que se présentent naturellement, ce que nous pouvons appeler les "êtres réels et normaux" par opposition aux" monstres artificiellement créés ou même conçus abstraitement. BOREL (II) p.164. De resto já Poincaré tinha feito a mesma observação, classificando espi rituosamente as funções em "honestas" e "monstruosas".

23. — OS CONJUNTOS E OS OPERADORES NAS DEFINIÇÕES LÓGICAS.— Pode naturalmente acontecer que alguma das relações primitivas ou derivadas se apresente sob a forma de conjunção. Neste caso, será necessário introduzir o símbolo lógico  $\varepsilon$ , e poderão ser usados, subsidiariamente, certos símbolos derivados, mas é claro que não resultará daqui nenhuma alteração essencial para o esquema apresentado no § anterior.

Quanto aos operadores, a sua introdução exige, manifestamente, o emprego de novos símbolos lógicos.

Seja, por exemplo, em Geometria plana, a definição de *circunferência*, tomando para conjunto fundamental o conjunto dos pontos e para noção primitiva a noção de distância. Ter-se-á representando por  $Cir_f$  a família das circunferências e por  $\delta(x,y)$  a distância entre os pontos  $x,y$ :

$$(X \in Cir_f) \equiv \bigcup_{y,z} \{X = K_X [\delta(x,z) = \delta(y,z)]\}$$

Porém, renunciando à forma *conjunto*, a mesma definição pode apresentar-se com o seguinte aspecto:

$$\Gamma(\xi) \equiv \bigcup_{y,z} \{\xi(x) \overset{?}{=} [\delta(x,z) = \delta(y,z)]\}.$$

em que a constante  $\Gamma$  desempenha um papel equivalente ao da constante  $Cir_f$ . É manifesto que se trata aqui, *exclusivamente*, de uma diferença de notação (1).

---

(1) Nesta definição, a distância  $\delta(x,y)$  é concebida não como um número real, mas como a família dos pares de pontos que são congruentes ao par  $(x,y)$ .

24. — ALTURA DE UM CONCEITO.— Já se viu como , na definição lógica de uma relação  $\alpha$ , intervêm, necessariamente, uma cadeia finita de relações, que começa nas relações primitivas e termina na relação  $\alpha$ . Não se pode, porém, afirmar que tal cadeia seja univocamente determinada para cada  $\alpha$ ; isto é, que exista um só caminho para definir tal relação.

Chamaremos *altura* de uma dada definição de  $\alpha$ , a partir das relações primitivas  $P$ , a diferença entre o maior tipo das relações, que intervêm nessa definição, e o tipo da relação  $\alpha$ . Chamaremos *altura* da relação, a respeito das relações primitivas a menor das alturas de todas as possíveis definições de  $\alpha$ .

Pode ainda acontecer que uma pelo menos das relações primitivas se apresente sob a forma de um operador (unívoco); o que quer dizer que se considera já efectuada a explicitação por meio da qual esse operador é deduzido da relação correspondente (§11). Será então natural admitir-se que a explicitação do mesmo não determina elevação de altura.

Convirá todavia, esclarecer com vários exemplos esta noção que me parece muito importante:

I) Se no conjunto dos seres humanos tomarmos como primitiva a relação " $x$  é filho(a) de  $y$ ", vê-se, atendendo à definição dada no §6, que a relação derivada " $x$  é tio(a) de  $y$ " tem altura 0; mas também não será difícil reconhecer que, em tal caso, a relação " $x$  é descendente de  $y$ " tem altura 1.

II) No conjunto dos números reais, o operador de tipo 2,  $\sup_x(u, v, \phi(x))$  ("extremo superior" da função  $\phi(x)$  no in-

tervalo  $(u,v)$ ) poderá definir-se tal como segue

$$[y = \sup_x(u,v,\phi(x))] \equiv \bigcap_{u < x < v} \{ [\phi(x) \leq y] \cap [\phi(x) < z \rightarrow y \leq z] \} ,$$

com um domínio de existência fixado pela proposição

$$\bigcup_z [u < x < v \rightarrow \phi(x) \leq z], \text{ condicional em } \phi, u, v.$$

Vê-se pois que tal operador é de altura 0, para todo o conjunto de relações primitivas que compreende a relação  $<$ , e o mesmo se pode dizer a respeito do operador  $\inf_x(u,v,\phi(x))$  ("extremo inferior" da função no intervalo  $(u,v)$ ). Consideremos, porém, uma funcional  $\Phi_x(u,v,\phi(x))$  que satisfaça às seguintes condições:

$$1) \Phi_x(u,u,\phi(x)) \equiv 0$$

2)  $\Phi_x(u,v+w,\phi(x)) \equiv \Phi_x(u,v,\phi(x)) + \Phi_x(v,v+w,\phi(x))$  (propriedade da decomposição do intervalo.)

$$3) \bigcap_{x,u,v} [\inf_x(u,v,\phi(x)) \leq \frac{\Phi_x(u,v,\phi(x))}{v-u} \leq \sup_x(u,v,\phi(x))]$$

(primeira propriedade da média.)

Para maior comodidade, representaremos por  $\Gamma(\Phi)$  o produto lógico de tais condições. Demonstra-se nos trabalhos clássicos de Análise, à parte as notações e a terminologia, que a relação  $\Gamma$  (de tipo 3) admite pelo menos uma solução se, e só se, a função  $\phi(x)$  for limitada no intervalo  $(u,v)$  (teorema de existência); e que não admitirá mais de uma solução, se e só se for nula a medida do conjunto dos pontos de descontinuidade de  $\phi(x)$  no mesmo intervalo (teorema de unicidade). Pois bem, supondo ainda verificada esta última condição, vê-se imediatamente

te que o operador  $\iota_{\Phi} \Gamma(\Phi)$  não é mais do que o integral de Cauchy, isto é ter-se-á:

$$[\iota_{\Phi} \Gamma(\Phi)]_x(u, v, \phi(x)) \equiv \int_u^v \phi(x) \, dx$$

o que constitui manifestamente uma definição de altura 1, se forem tomados como primitivos, unicamente, os operadores  $+$ ,  $\times$  e a relação  $<$ .

III) Ainda no conjunto dos números reais, pode-nos servir de exemplo o número  $e$ , base do sistema dos logaritmos neperianos, o qual, como se sabe, pode ser definido por meio de qualquer das três fórmulas:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n; \quad e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!}; \quad e = \iota_y \bigcup_{\phi} \{ [\phi'(x) \equiv \phi(x)] \cap [\phi(0)=1] \cap [\phi(1)=y] \}$$

Uma análise da estrutura lógica destas fórmulas mostrará que, tomando para primitivos os conceitos de *divisão*, *subtração* e *desigualdade*, e definindo à maneira usual as constantes 1, lim, ! etc., tais fórmulas correspondem todas a definições de altura 2.

Porém, no mesmo conjunto, o número  $+\sqrt{2} = \iota_x [(x^2=2) \cap (x>0)]$  será de altura 1, se tomarmos para primitivas as operações fundamentais da Aritmética e a relação  $>$ ; e é fácil ver que, se a estas noções juntarmos a de  $+\sqrt{2}$ , todos os números da forma  $a+b\sqrt{2}$  (com  $a, b$  racionais) passam a ter altura 0 (1).

Estes exemplos bastam para mostrar que as definições de altura superior a 0 são definições de carácter *implícito* (a

---

(1) É preciso não confundir esta noção de altura com aquela dada por Borel, para os números algébricos.

explicitação efectuada por meio do símbolo  $\iota_x$  é puramente formal) em que o objecto a definir é determinado (ou "nommé", como dizia Lebesgue), por meio de um conjunto de propriedades características desse objecto. No caso do integral de Cauchy, por exemplo, as propriedades características podem ser as que anteriormente utilizámos.

Convém notar, porém, que as definições deste género devem, numa teoria dedutiva, ser acompanhadas de uma demonstração de existência e de unicidade, a qual pode ser ou não construtiva.

Todavia, as definições por recorrência de que se tratará mais adiante, constituem exemplos de definições, automaticamente construtivas e cuja altura é sempre superior a 0.

Notemos, por último, que a noção de *construtividade* anda em parte ligada a considerações de natureza empírica ou psicológica que lhe dão um carácter relativo (1).

25. — CONJUNTOS ORGANIZADOS.— Chamaremos *conjunto organizado ou sistema concreto*  $[U;P]$  a todo o conjunto fundamental  $U$  determinado sobre o qual é escolhido um conjunto  $P$  de relações primitivas. Se forem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  as relações pertencentes a  $P$ , poderemos escrever  $[U, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$  em vez de  $[U;P]$ . Importa, porém, fazer a seguinte observação: os sistemas  $[U;P]$  e  $[U,P]$  não coincidem necessariamente um com o outro; o primeiro tem como relações primitivas os elementos de  $P$ ; o segundo tem como

---

(1) Abstenho-me por óbvias razões a entrar aqui em detalhes sobre a moderna tendência intuicionista da Matemática.

relação primitiva o conjunto  $P$ . Veremos adiante, nalguns exemplos, a importância desta distinção.

Diremos que dois conjuntos  $P, P^*$  de relações sobre  $U$  de finem sobre tal conjunto a mesma *organização* ou, ainda, que são *equivalentes* do ponto de vista da *primitividade*, quando toda a relação que pertença ao primeiro se possa exprimir logicamente nas relações do segundo e reciprocamente; podendo então escrever-se  $[U;P] = [U;P^*]$ . Quando, sobre um dado conjunto  $U$ , se considera definida uma *sô* organização (por meio de  $P$ ), podemos dizer simplesmente "*o sistema*  $[U]$ ", em vez de "*o sistema*  $[U;P]$ ", pois não haverá então lugar para confusões.

Na organização de um dado conjunto, convirá, pelo menos do ponto de vista da elegância, escolher um conjunto de relações tal que nenhum seu subconjunto próprio lhe seja equivalente. Se esta condição se verificar, diremos que as relações primitivas são *independentes* entre si. Pode porém acontecer que tal condição não seja realizável, e é evidente que, neste caso, o conjunto das relações primitivas será, necessariamente, infinito. Por outro lado, entre dois conjuntos *mínimos* de relações primitivas, poderá suceder que um deles seja mais *simples* do que o outro, usando um critério de *simplicidade* que se refira ao *número*, ao *grau* e ao *tipo* das relações.

Finalmente, podemos ir mais longe, concebendo uma *mudança* de relações primitivas, que seja acompanhada de uma *mudança* de conjunto fundamental (§18) de modo que o novo sistema se possa considerar ainda como *equivalente* ao primeiro. Por exemplo, nas geometrias planas racionais, podemos tomar como

conjunto fundamental o conjunto  $U$  dos pontos e como relação primitiva a relação  $R_t(x,y,z)$  (" $x,y,z$  estão em linha recta") ou o conjunto  $V$  das rectas (conjunto de tipo 2), tendo-se então  $[U, R_t] = [U, V]$  (1). Mas pode igualmente tomar-se como conjunto fundamental a reunião  $W$  dos conjuntos  $U$ , dos pontos, e  $V$  das rectas e como relações primitivas, não sã as relações unitárias  $x \in U, x \in V$  (que são agora ambas de tipo 1), mas ainda as relações binárias conjugadas  $x < y$  (" $x$  jaz em  $y$ ") e  $x > y$  (" $x$  passa por  $y$ "), em substituição da constante lógica  $\epsilon$  e da sua conjugada, aplicadas entre pontos e rectas; constituindo deste modo o sistema  $[W, U, V, <, >]$ .

26. — ISOMORFISMO.— Dados dois sistemas concretos  $[U; P]$  e  $[V; Q]$ , seja  $\theta$  uma transformação biunívoca do conjunto  $U$  no conjunto  $V$ . É fácil ver que este mesmo operador estabelece uma correspondência biunívoca entre as relações sobre  $U$  e as relações sobre  $V$ ; com efeito, chamando *imagem* (por intermédio de  $\theta$ ) de um dado elemento  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $U^{(n)}$ , ao elemento  $(\theta(x_1), \dots, \theta(x_n))$  de  $V^{(n)}$ , podemos convencionar que  $\theta$  é uma transformação tal que: a cada relação  $n$ -ária de tipo 1 sobre  $U$ , fará corresponder a relação  $n$ -ária (de tipo 1) sobre  $V$ , cujas soluções são as imagens, por intermédio de  $\theta$ , das soluções da primeira; a cada relação de tipo 2 sobre  $U$  fará corresponder a relação (de tipo 2) sobre  $V$ , cujas soluções são imagens das soluções da primeira, as quais, por sua vez, são agrupamentos de

---

(1) É claro que, neste exemplo, nos referimos a uma determinada concretização da axiomática geométrica, por exemplo à concretização cartesiana, por meio de pares de números racionais.



elementos de tipo não superior a 2, a respeito de  $U$ ; e assim sucessivamente, passando ao transfinito de um modo análogo. Representaremos, naturalmente, por  $\theta(\alpha)$  a relação que  $\theta$  faz corresponder a  $\alpha$ , e deste modo o operador  $\theta$  resulta prolongado (§11) num conjunto arbitrário de relações sobre  $U$ .

Seja agora  $\sigma$  uma transformação biunívoca do conjunto  $P$  no conjunto  $Q$ . Diremos que  $\theta$  é um *isomorfismo* do sistema  $[U]$  no sistema  $[V]$ , a respeito da transformação  $\sigma$ , quando, qualquer que seja  $\alpha$  pertencente a  $P$ , se tiver  $\theta(\alpha) = \sigma(\alpha)$ , isto é, quando o operador  $\theta$  não for mais do que um prolongamento de  $\sigma$ . Vê-se imediatamente que, se  $\theta$  for um isomorfismo de  $[U]$  em  $[V]$ , a respeito de  $\sigma$ , também  $\theta^{-1}$  será um isomorfismo de  $[V]$  em  $[U]$ , a respeito de  $\sigma^{-1}$ .

Se, em particular, as relações primitivas forem todas de tipo 1, é fácil ver que os isomorfismos de  $[U]$  em  $[V]$ , a respeito de  $\sigma$ , serão aquelas transformações biunívocas  $\theta$  (de  $[U]$  em  $[V]$ ) tais que

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) \equiv \sigma(\alpha) [\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)]$$

qualquer que seja a relação primitiva  $\alpha$ . Exemplo: Seja  $U$  o conjunto dos raios de uma estela, organizado por meio da relação  $Pl(x, y, z)$  (" $x, y, z$  são coplanares"); seja  $V$  o conjunto dos pontos de um plano projectivo que intersecte os raios da estela em pontos distintos da origem, tomando como relação primitiva, sobre este conjunto, a relação  $Rt(x, y, z)$ ; e seja finalmente  $\sigma$  o operador que transforma  $Pl$  em  $Rt$ ; então, se representarmos por  $\theta$  a transformação que faz corresponder a cada raio da estela a

sua intersecção com o plano  $V$ , é fácil ver que  $\theta$  será um isomorfismo de  $U$  em  $V$ , por intermédio de  $\sigma$ ; isto é, que se terá

$$Pl(x,y,z) \equiv Rt [\theta(x),\theta(y),\theta(z)]$$

Pode ainda acontecer que os símbolos usados para representar as relações  $\mathcal{P}$  coincidam com os símbolos para representar as relações  $\mathcal{Q}$ , que correspondem as primeiras por intermédio de  $\sigma$ . Nestes casos  $\sigma$  poderá considerar-se como operador *idêntico*.

Suponhamos que uma das relações primitivas assume a forma de um operador  $\phi(x_1, \dots, x_n)$ , de tipo 1, e que  $\sigma$  é a identidade. Neste caso, a condição para que a transformação biunívoca  $\theta$  seja um isomorfismo, tomará, relativamente a  $\phi$ , o seguinte aspecto

$$\phi[\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)] \equiv \theta[\phi(x_1, \dots, x_n)]$$

isto é, traduzir-se-á numa permutabilidade dos operadores  $\theta, \phi$ . É com este último aspecto que o conceito de isomorfismo se apresenta, geralmente, na literatura matemática dos nossos tempos (em Álgebra abstracta, em Topologia geral, etc.)

Um exemplo sugestivo em que as relações primitivas se apresentam sob a forma de operadores, mas em que  $\sigma$  não se reduz à identidade, é o seguinte: Seja  $U$  o conjunto dos números positivos, organizados por meio da operação  $.$ ; e seja  $V$  o conjunto dos números reais organizado por meio da operação  $+$ ; então, o conhecido operador  $\log$  representará um isomorfismo do sistema  $[U, .]$  no sistema  $[V, +]$ , a respeito do operador  $\sigma$  que transfor-

ma . em +, pois que se verificam as duas condições: 1) o operador  $\log$  define uma transformação biunívoca de  $U$  em  $V$ ;

2)  $\log (x.y) = \log x + \log y$ .

27.— AUTOMORFISMO.SISTEMAS INDEFORMÁVEIS.— Suponhamos agora que os dois sistemas  $[U;P]$   $[V;Q]$ , considerados no § anterior, são coincidentes; isto é, sejam  $\theta$  e  $\sigma$ , respectivamente, transformações biunívocas dos conjuntos  $U$  e  $P$  em si mesmos. Em virtude do que foi convencionado no § anterior, sabemos em qual caso  $\theta$  constitue um isomorfismo a respeito de  $\sigma$ . Pois bem: se a transformação  $\theta$  for isomórfica a respeito de  $\sigma$ , e  $\sigma$  for a identidade,  $\theta$  dir-se-á um *automorfismo* do sistema  $[U;P]$ . Os automorfismos de um sistema  $[U;P]$  são pois aquelas transformações biunívocas do conjunto  $U$  em si mesmo que conservam as relações primitivas  $P$ .

Diremos *indeformável* todo o sistema que admita como único automorfismo a identidade. *Condição suficiente para que um sistema seja indeformável é que todos os seus elementos fundamentais se possam exprimir logicamente nas relações primitivas*. Será esta condição também necessária? Eis aí um problema cuja solução depende, naturalmente, do significado atribuído à locução "*exprimir logicamente*"; problema de que nos ocuparemos desenvolvidamente adiante, como caso particular de uma das questões que constituem objecto fundamental de estudo do presente trabalho.

São exemplos de sistemas indeformáveis os conjuntos dos números naturais, dos números racionais, dos números reais, etc.

organizados por meio das relações  $+, \cdot, >$ . Porém, já o conjunto dos números complexos, organizado por meio dos operadores  $+, \cdot$ , e da relação  $|x| > |y|$ , constitui um sistema deformável, pois admite como automorfismos, além da identidade, a transformação que faz corresponder a cada número  $z = x + iy$  (com  $x$  e  $y$  reais) o seu conjugado  $\bar{z} = x - iy$ , como resulta do que segue:  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ,  $(|x| < |y|) \equiv (|\bar{x}| < |\bar{y}|)$ .

A Geometria fornece-nos exemplos sugestivos de isomorfismos de um sistema em si mesmo. Limitar-nos-emos, para maior simplicidade, às geometrias racionais. Consideremos então o sistema  $[U, V_1, V_2, V_3, \rho]$  em que  $U$  representa a reunião dos conjuntos  $V_1, V_2, V_3$  respectivamente, dos pontos, das rectas e dos planos (no sentido afim) e  $\rho$ , a relação binária simétrica "*incide em*" (isto é, "*faz em*", ou "*passa por*") aplicável entre pontos e rectas, entre pontos e planos, e entre rectas e planos, em substituição das constantes lógicas  $\varepsilon, \subset$ . Como se sabe, este sistema admite infinitos automorfismos, comumente chamados afinidades, mas não admite nenhum isomorfismo em si mesmo, a respeito dum operador  $\sigma$  que permuta entre si as relações  $V_1, V_2, V_3, \rho$ . Se a estas relações primitivas juntarmos a relação quaternária  $\delta(x, y) = \delta(x', y')$ , aplicável a pontos, a família dos automorfismos reduzir-se-á ao conjunto das semelhanças (que podem ser, em particular, rotações, translações, homotetias, etc.)

Porém, se, em vez desta ampliação do conjunto das relações primitivas, com a adjunção dos elementos impróprios, passarmos à Geometria projectiva, o sistema anterior será substituído por um outro  $[U^*, V_1^*, V_2^*, V_3^*, \rho]$  que além dos automorfismos

(chamados *homográficas*), admitirão também isomorfismos em si mesmos, a respeito dum operador  $\sigma$  que transforma os pontos em planos, deixando fixos  $V_2^*$  e  $\rho$ . Estes isomorfismos, chamados *correlações*, estão, como se sabe, intimamente ligados à lei da dualidade.

Notemos, finalmente, que a família  $H$  dos automorfismos de um sistema constitue uma relação unitária de tipo 2 (conjunto de operadores de tipo 1), a qual se exprime logicamente nas relações primitivas. Ter-se-á portanto  $\theta(H) = H$ , qualquer que seja  $\theta$  pertencente a  $H$ .

28.— SISTEMAS ABSTRACTOS.— MÉTODO AXIOMÁTICO.— Dados dois sistemas  $[U_1; P_1]$  e  $[U_2; P_2]$ , seja  $\theta$  um isomorfismo entre o primeiro e o segundo, a respeito duma transformação biunívoca  $\sigma$  de  $P_1$  em  $P_2$ . É fácil ver que, se for  $\alpha$  uma relação sobre  $U_1$ , exprimível nas relações primitivas por meio de uma função lógica  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  e se representarmos por  $\sigma(\alpha)$  a relação sobre  $U_2$ , que se exprime nas relações  $P_2$ , por meio da função lógica  $F[\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)]$  (isto é do mesmo modo que  $\alpha$  se exprime nas relações  $P_1$  correspondentes) ter-se-á  $\theta(\alpha) = \sigma(\alpha)$ . Assim por exemplo, se forem  $H_1$  e  $H_2$  respectivamente, as famílias dos automorfismos do primeiro e do segundo sistema, virá  $H_2 = \sigma(H_1)$  e  $\theta(H_1) = H_2$  (1).

---

(1) É preciso não confundir  $\theta(H_1)$  com  $\theta.H$  isto é, com o conjunto de todas as transformações da forma  $\theta.\phi$ , em que  $\phi \in H_1$ . É porém fácil reconhecer que, segundo a convenção introduzida no §26, se tem  $\theta(H_1) = \theta.H.\theta^{-1}$

Em particular, poderá apresentar-se uma função lógica  $P(x_1, \dots, x_n)$  das relações  $P$ , que se reduza a uma proposição categórica; isto é, uma função lógica em cujo desenvolvimento simbólico todas as variáveis sejam aparentes (§§5,6), e é claro que neste caso, se for verdadeira a proposição  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  será também verdadeira a proposição  $P[\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)]$ , e reciprocamente. Vê-se portanto que:

*Toda a proposição categórica verdadeira no sistema  $[U_1, P_1]$  (isto é, expressa unicamente nas relações  $P_1$ , por meio de constantes lógicas) se converte numa proposição categórica, ainda verdadeira, no sistema  $[U_2; P_2]$  mediante uma conveniente tradução dos termos, em que o dicionário é representado pela transformação  $\sigma$ ; e reciprocamente, utilizando a transformação  $\sigma^{-1}$ . Atendendo a este facto, diremos que os sistemas  $[U_1; P_1], [U_2; P_2]$  têm a mesma estrutura lógica ou definem o mesmo sistema abstracto a respeito de  $\sigma$ .*

Assim, por exemplo, no caso da estela de rectas cortada por um plano projectivo que não passa pela origem, a tradução do primeiro para o segundo sistema, far-se-á mediante o dicionário: *Recta*  $\rightarrow$  *Ponto*, *Plano*  $\rightarrow$  *Recta*; e deste modo a geometria projectiva da estela se reduz à do plano, com uma simples mudança de símbolos ou palavras.

Mas há um outro facto que é preciso pôr em relevo. Como acabámos de ver, as proposições categóricas verdadeiras, que relativamente a um dado sistema concreto, se podem construir a partir das relações primitivas, segundo o processo indicado no §22 (aplicando os quantificadores de modo que todas

as variáveis se tornem aparentes), constituem *propriedades formais* do sistema, isto é, propriedades que dependem *exclusivamente* da estrutura lógica do mesmo, e não da natureza dos seus elementos. Ora sucede que, uma vez reconhecida a veracidade de algumas dessas proposições, uma parte ou mesmo a totalidade das proposições restantes (de tipo inferior a um limite arbitrariamente dado) se podem reconhecer como verdadeiras, sem necessidade de uma observação directa sobre o sistema, mas simplesmente por *dedução*, isto é não fazendo mais do que aplicar as regras da Lógica formal.

Consideremos, por exemplo, o conjunto  $U$  dos seres humanos, organizado por meio da relação " $x$  é descendente de  $y$ ", que escreveremos abreviadamente  $x < y$ . Todos sabemos que, em tal sistema, são verdadeiras as proposições categóricas:

- a)**  $(x < y) \subset (x \neq y)$  (propriedade artireflexiva)
- b)**  $(x < y) \cap (y < z) \subset (x < z)$  (propriedade transitiva)

Mas, deste modo, também a proposição

- c)**  $(x < y) \subset \neg(y < x)$  (propriedade antisimétrica)

não poderá deixar de ser verdadeira no mesmo sistema, pois que, se fosse falsa, isto é, se existissem dois indivíduos  $x, y$ , tais que  $(x < y) \cap (y < x)$ , ter-se-ia, em virtude de **b**,  $x < x$  o que, segundo **a**, é impossível. Vê-se, pois que, uma vez admitida a veracidade das proposições **a, b**, a proposição **c** não poderá deixar de ser admitida como verdadeira, *qualquer que seja o significado concreto atribuído aos símbolos  $<, U$* . Assim, onde dissermos "*conjunto dos seres humanos*" poderíamos ter dito "*con-*

*junto das aves*" atribuindo a  $<$  o significado "*ascendente de*" ; poderíamos ter dito "*conjunto dos números*" interpretando  $x < y$  como a relação "*x é um divisor próprio de y*"; poderíamos ter dito "*conjunto das funções reais de variável real*", considerando a expressão  $\phi < \psi$  como uma abreviatura desta outra  $\bigcup_x [\phi(x) < \psi(x)]$ , etc. etc.; em qualquer destes casos as proposições  $a, b$  são verdadeiras, e o mesmo sucederá, necessariamente, a respeito da proposição  $c$ . E é claro que não são  $c$ , mas ainda outras proposições poderão ser deduzidas, sucessivamente, das proposições  $a, b$ , tomadas como *axiomas* (isto é, admitidas como verdadeiras); deste modo, a partir de tais axiomas será desenvolvida uma *teoria dedutiva* que podemos chamar *teoria das relações binárias antisimétricas transitivas*, ou ainda, como veremos adiante, *teoria dos conjuntos parcialmente ordenados*.

E é nisto, precisamente, que consiste a moderna orientação *axiomática, abstracta ou formal* de Matemática: em reduzir a uma teoria única, condensada numa axiomática, o estudo de uma classe de propriedades que, mediante convenientes traduções de linguagem, se revelam comuns a infinitos sistemas possíveis. *Vantagem imediata* deste método: economia extraordinária de pensamento, resultante da possibilidade de aplicar, a infinitos campos concretos, um mesmo aparelho lógico, constituído por uma rede de raciocínios *efectuados uma vez por todas*. Os princípios de dualidade e de transporte, tão fecundamente utilizados em Geometria constituem um exemplo da aplicação do método axiomático. Todavia contra este método, aponta-se, entre outros, o inconveniente de que, esvaziando os conceitos primitivos de todo o conteúdo



intuitivo, ele romperia aquele contacto entre o investigador e a Realidade, sem o qual toda a actividade Matemática se reduz a um jogo inteiramente estéril de símbolos e de fórmulas. Ora a verdade é que nada impede o investigador, ao desenvolver uma teoria construída axiomáticamente, de apoiar a imaginação sobre alguns, ou melhor, sobre vários dos modelos que verificam a axiomática.

29.— COMPATIBILIDADE E CATEGORICIDADE.— Dar uma axiomática  $Ax[U;P]$  consistirá em introduzir: 1) um sinal  $U$  representativo de um conjunto fundamental; 2) um conjunto  $P$  de sinais  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , representativos de relações primitivas sobre  $U$ ; 3) um conjunto  $Ax$  finito de axiomas, isto é, de expressões  $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ ,  $l(\alpha_1, \alpha_2, \dots), \dots$ , obtidas por conexões de sinais primitivos e de constantes lógicas, de tal modo que, uma vez atribuído um significado concreto aos sinais  $U$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , tais expressões se transformam em proposições categóricas, verdadeiras ou falsas.

Diremos que um dado sistema concreto  $[U_1; P_1]$  constitui uma concretização da axiomática  $Ax[U; P]$  segundo uma dada transformação biunívoca  $\sigma$  de  $P$  em  $P_1$ , quando, efectuando nas expressões  $Ax$  a substituição representada por  $\sigma$ , todas as proposições categóricas assim obtidas são verdadeiras.

Dadas duas concretizações  $[U_1; P_1]$  e  $[U_2; P_2]$  de uma mesma axiomática  $Ax[U; P]$  segundo as transformações  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente de  $P$  em  $P_1$  e de  $P$  em  $P_2$ , seja  $\sigma$  a transformação  $\sigma_2 \sigma_1^{-1}$  de  $P_1$  em  $P_2$ ; por isomorfismo entre a primeira e a

segunda concretização deverá entender-se todo o isomorfismo de  $[U_1; P_1]$  em  $[U_2; P_2]$  a respeito da transformação  $\sigma$ . Nestas condições, duas concretizações isomorfas de uma mesma axiomática definirão um mesmo sistema abstracto, e a cada sistema abstracto assim definido chamaremos *solução* da axiomática considerada.

As concretizações e as soluções de uma mesma axiomática convém naturalmente atribuir uma designação comum, e é deste modo que se apresentam na literatura corrente as palavras "*grupo*" "*corpo*", "*espaço topológico*", etc. Segundo as convenções introduzidas anteriormente, dois grupos *concretos* isomorfos representarão o mesmo grupo *abstracto*, isto é, a mesma solução da axiomática dos grupos; dois corpos *concretos* isomorfos representarão o mesmo corpo *abstracto*, etc. Importa notar porém que, em virtude de noções análogas às que foram apresentadas no § 20, não será lícito falar da *totalidade* das concretizações de uma dada axiomática, e em certos casos (como sucede a respeito dos grupos, dos corpos, dos espaços topológicos, etc.) não será lícito, sequer, falar da totalidade das soluções da axiomática, a não ser que a esta se junte uma nova condição (isto é, um novo axioma) relativa à potência do conjunto  $U$ .

De um modo geral, a respeito de uma axiomática, uma e uma só das três seguinte hipóteses se deve necessariamente verificar:

1) A axiomática não admite nenhuma solução (e portanto nenhuma concretização).

2) A axiomática admite uma, e uma só, solução (isto é, admite concretizações várias, mas todas isomorfas entre si).

3) A axiomática admite mais de uma solução.

A axiomática dir-se-á *incompatível* na hipótese 1); *compatível* nas hipóteses 2) e 3); *categórica* na hipótese 2).

Somos porém colocados agora perante as seguintes questões: Como reconhecer, *effectivamente*, se uma dada axiomática é ou não é compatível, e, no caso afirmativo, se ela é ou não é categórica? Mais ainda: Visto que toda a axiomática categórica define um sistema abstracto, ocorre perguntar: será também verdadeira a recíproca? Isto é: podemos nós afirmar que todo o sistema abstracto é susceptível de uma definição axiomática, ou como também se diz, de uma *caracterização* por meio de algumas das suas propriedades formais, tomadas em número finito? Trata-se aí de um género de problemas tão interessantes quanto delicados, alguns dos quais (como o da não-contradição da Aritmética, a que a escola hilbertiana dedicou muitos anos de labor, não inteiramente infecundo) parecem já, *a priori*, condenados a não serem resolvidos. Não entrarei, contudo, em particulares sobre tais assuntos, que se afastam, sensivelmente, do objectivo fundamental do presente trabalho.

30.— DEMONSTRABILIDADE.— AXIOMÁTICAS EQUIVALENTES.— O desenvolvimento de uma teoria dedutiva consistirá, formalmente, na aplicação reiterada e indefinida dos dois seguintes processos: o processo da *definição*, mediante o qual, partindo dos conceitos primitivos, se chega aos conceitos derivados; 2) o processo da *dedução*, que, aplicado a partir dos axiomas e das definições, conduz, sucessivamente, às proposições *demonstráveis*

da teoria, também chamadas *teoremas*. Já no § 22 se viu em que consiste o mecanismo das definições; resta portanto ver em que consiste o mecanismo das deduções. Não é contudo meu propósito desenvolver aqui a teoria da demonstração; limitar-me-ei a observar que as deduções se efectuam por um processo análogo ao que no referido § 22 foi descrito para as definições: uma proposição será *demonstrável* no seio da teoria considerada, se puder figurar como termo de uma cadeia *finita* de proposições em que os termos iniciais sejam constituídos por axiomas e, eventualmente, por definições, e cada um dos termos seguintes se deduz *imediatamente* de alguns dos precedentes pela aplicação de uma das *regras fundamentais* da Lógica. Todavia, é preciso notar que, a respeito destas regras denominadas *fundamentais*, não só poderá haver uma certa arbitrariedade (tal como se verifica a respeito da escolha das operações lógicas fundamentais) mas sucede até que o uso de algumas das regras tradicionais da Lógica (princípio do *tertium non datur* e seus derivados) é considerado como geralmente ilegítimo, pela moderna escola intuicionista de Brouwer. Como resulta do que foi dito no § 3 as regras aqui admitidas são todas as da Lógica clássica, das quais damos alguns exemplos, relativos ao cálculo proposicional, no referido § 3, e um exemplo, relativo ao cálculo das relações, no § 6.

O conceito de *dedução* (ou de *demonstrabilidade*) poderá concretizar-se do seguinte modo: diremos que uma dada proposição  $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$  é *demonstrável* a respeito de uma axiomática  $Ax[U; P]$  quando a adjunção de  $P(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ , ao conjunto

Ax dos axiomas, conduz a uma axiomática tal que toda a solução da primeira será ainda uma solução da seguinte. Concebendo as proposições *categóricas* de uma teoria como proposições *condicionais* nas variáveis  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , constituídas pelos sinais primitivos, poderemos ainda chamar demonstráveis, nessa teoria, a todas as proposições que sejam *implicadas incondicionalmente* (§ 5) pela *conjunção* dos axiomas (1). Importa, contudo, observar — e é esta a diferença essencial — que, ao contrário do que sucede com as proposições condicionais ordinárias, não é *fixado* o campo de variação das variáveis  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , as quais constituem, propriamente, *indeterminadas*, segundo o sentido precisado no § 19.

Vejamos agora o que deve entender-se por *axiomáticas e quivalentes*. Para maior clareza de exposição convirá partir do caso mais simples: Duas axiomáticas  $Ax[U;P]$  e  $Ax^*[U;P]$  relativas a um *mesmo* conjunto fundamental  $U$  e a um mesmo conjunto  $P$  de relações primitivas, dir-se-ão *equivalentes*, quando cada um dos axiomas da primeira for demonstrável a respeito dos axiomas da segunda, e, reciprocamente; ou ainda, por outras palavras quando toda a solução de cada uma delas for ainda solução de outra.

---

(1) Importa notar porém que não se sabe (e, naturalmente nunca se poderá vir a saber) se o conceito de demonstrabilidade assim concretizado coincide exactamente com o primeiro ou se é mais geral do que ele. A hipótese segundo a qual estes dois conceitos coincidem será do género do princípio de Zermelo e da hipótese da não — contradição da Aritmética.

Dadas porêm, duas axiomáticas  $Ax[U;P]$  e  $Ax^*[U;P^*]$  que difiram, não sô pelos conjuntos dos axiomas, mas também pelos conjuntos  $P$  e  $P^*$  dos sinais primitivos, o conceito de equivalência não será aplicável neste caso, senão quando for referido a um conjunto  $Def$  de definições, que exprimam logicamente as relações  $P^*$  nas relações  $P$ . Então, as duas axiomáticas consideradas dir-se-ão *equivalentes a respeito de  $Def$*  quando forem verificadas as duas condições: 1) cada um dos axiomas da segunda se possa deduzir do conjunto  $Ax$  dos axiomas da primeira, ampliado com o conjunto  $Def$ ; 2) seja possível exprimir logicamente as relações  $P$  nas relações  $P^*$  por meio de um conjunto  $Def^{-1}$  de definições tal que não sô as proposições  $Ax$ , mas também as proposições  $Def$ , se tornem demonstráveis a respeito dos axiomas  $Ax^*$  e das definições  $Def^{-1}$ , tomados conjuntamente.

Finalmente, o conceito de equivalência poderá ser generalizado ao caso de duas axiomáticas quaisquer,  $Ax[U;P]$  e  $Ax^*[U^*;P^*]$  ligadas entre si por um conjunto  $Def$  de definições que exprima logicamente nas relações  $P$ : 1) o conjunto fundamental  $U^*$ ; 2) uma parte das relações  $P^*$ . As relações pertencentes a  $P^*$ , que não se deixam exprimir logicamente nas relações  $P$  serão representadas na primeira axiomática por constantes lógicas  $\epsilon, \subset, \cap$ , etc. e, como tais, o seu significado na segunda não poderá ser senão limitado, por meio de alguns dos axiomas  $Ax^*$ . Tendo em consideração este particular, a generalização do conceito de equivalência far-se-á de um modo análogo ao anterior. Já vimos como, no estudo das geometrias, se apresentam exemplos deste gênero de equivalências; em tais casos, a relação lógica  $x \in X$  conver-

te-se, quando aplicada entre pontos, rectas e planos, às relações geométricas  $x < y$  ("x faz em y") e  $x > y$  ("x passa por y"), mediante as condições:

$$1) (x < y) \equiv (y > x), \quad 2) (x < y) \cap (y < z) \subset (x < z).$$

Já no § 19 se viu que toda a constante lógica se desdobra em infinitas relações de tipos diversos, sobre um dado conjunto fundamental. É fácil ver agora que, dada uma axiomática  $Ax [U; \mathbf{P}]$  esta poderá ser sempre substituída por uma outra  $Ax^* [U; \mathbf{P}^*]$  equivalente à primeira, de modo que certas relações lógicas de tipo determinado, passem a figurar na segunda, como *novas relações primitivas*, adjuntas a  $\mathbf{P}$ , por meio de novos axiomas, adjuntos a  $Ax$ , (em particular, se algumas das relações  $\mathbf{P}$  forem de tipo superior a um, poderão passar-se, por tal processo, a uma nova axiomática, equivalente à primeira e em que todas as relações primitivas sejam de tipo não superior a 1). Seja por exemplo a relação lógica, ternária de tipo 2,  $\zeta(x, y)$  que, para cada determinação  $\alpha$  de  $\zeta$ , é verificada por todas aquelas determinações de  $(x, y)$  que verificam a relação binária de tipo 1,  $\alpha(x, y)$ ; tal relação de tipo 2 poderá, manifestamente, ser reduzida a uma relação primitiva  $\Omega$  de tipo 1, mediante os axiomas

$$1) \bigcap_{\zeta} \bigcup_z [\zeta(x, y) \not\equiv_{x, y} \Omega(x, y, z)]$$

$$2) [\Omega(x, y, z_1) \not\equiv_{x, y} \Omega(x, y, z_2)]_{z_1, z_2} (z_1 = z_2)$$

os quais correspondem, visivelmente, aos axiomas lógicos de Russell, ditos de *reducibilidade* (o primeiro) e de *extensão* (o segundo).

31.— INDEPENDÊNCIA E SATURAÇÃO.— Os axiomas de uma dada axiomática dir-se-ão *independentes* se nenhum deles puder ser deduzido da conjunção dos restantes, isto é, se a supressão de cada um deles conduzir a uma axiomática mais pobre do que a primitiva.

Uma axiomática compatível dir-se-á *saturada*, se a adjunção de um novo axioma conduzir, necessariamente, a uma axiomática que, ou é equivalente à primeira, ou é incompatível; isto é quando, dada uma proposição cuja veracidade dependa unicamente do valor dos sinais primitivos, se verifica necessariamente uma e uma só, das hipóteses: 1) a proposição é verdadeira (isto é, demonstrável) na teoria considerada; 2) a proposição é falsa (isto é, será demonstrável a sua contraditória) na referida teoria. Vê-se imediatamente que toda a axiomática categórica será saturada, visto que, admitindo uma única solução, a adjunção de um novo axioma ou elimina tal solução, conduzindo a uma axiomática incompatível, ou a conserva, conduzindo a uma axiomática equivalente. Mas será verdadeira também a recíproca, isto é, será verdade que toda a axiomática saturada é também categórica? É este um problema do gênero de problemas da não — contradição da Aritmética, do princípio de Zermelo, etc: É fácil ver ainda que tal problema se reduz ao de saber se todo o sistema abstracto é susceptível de uma definição axiomática.

Notemos, por último, que o conceito de categoricidade é historicamente posterior ao de saturação. Foram ambos introduzidos, no estudo dos fundamentos da Geometria, o primeiro por O. Veblen e o segundo por D. Hilbert.



32.— REPARTIÇÕES.— RELAÇÕES DE CONGRUÊNCIA. Neste § e no seguinte, serão apresentados alguns exemplos de axiomáticas, que, além de permitirem esclarecer vários dos conceitos atrás definidos, serão utilizados em resultados ulteriores.

Dado um conjunto  $U$  qualquer, chamaremos *repartição* de  $U$ , a toda a família  $C$  de subconjuntos de  $U$ , disjuntos dois a dois, cuja reunião coincida com o conjunto  $U$ ; isto é, em símbolos:

$$\begin{aligned} c_1) \quad & \bigcup_{X \in C} X = U \\ c_2) \quad & \bigcap_{X, Y} (X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset) \end{aligned}$$

Ao sistema  $[U, C]$  assim obtido (tendo como única relação primitiva a família  $C$ ) chamaremos conjunto *repartido*, e a cada conjunto da família  $C$  chamaremos *célula* da repartição.

Definindo agora em  $U$  uma relação binária  $x \approx y$  tal como segue:

$$d) \quad (u \approx v) \equiv \bigcup_{X \in C} (u, v \in X)$$

será fácil a partir dos axiomas  $c_1, c_2$ , e da definição  $d$ , demonstrar as proposições seguintes:

$$\begin{aligned} c_1^*) \quad & \bigcap_x (x \approx x) \quad (\text{reflexividade}) \\ c_2^*) \quad & (x \approx y) \subset (y \approx x) \quad (\text{simetria}) \\ c_3^*) \quad & (x \approx y) \cap (y \approx z) \subset (x \approx z) \quad (\text{transitividade}) \end{aligned}$$

As relações binárias reflexivas, simétricas e transi-

tivas, chamaremos, genericamente, relações de congruência. Vê-se portanto que *toda a repartição de U determina neste conjunto uma relação de congruência  $\approx$* , mediante a definição **d**. Mas a recíproca também é verdadeira. Com efeito, se representarmos por  $\Phi(x)$  o conjunto de todos os elementos congruentes a um dado  $x$ , e por  $C$  a família dos conjuntos  $\Phi(x)$ , quando  $x$  percorre  $U$ , isto é, em símbolos:

$$d^{-1}(x \in C) \equiv \bigcup_u [x = K_v (u \approx v)] ,$$

será fácil ver que, não sô as proposições  $c_1, c_2$ , mas também a proposição **d**, podem ser deduzidas das proposições  $c_1^*, c_2^*, c_3^*$ ,  $d^{-1}(1)$ .

Trata-se, portanto, de duas axiomáticas equivalentes a respeito da definição **d** (ou, o que é o mesmo, a respeito da definição  $d^{-1}$ ). Vê-se, por outro lado, que tais axiomáticas são compatíveis, mas não categóricas e portanto não saturadas.

Ainda sobre este assunto, há um facto que convirá sempre pôr em evidência. Como vimos, a partir de toda a relação de congruência  $\approx$  sobre um dado conjunto  $U$ , poderá ser definido um operador  $\Phi$  que, a cada elemento  $x$  de  $U$ , faça corresponder a classe  $\Phi(x)$  dos elementos de  $U$  congruentes a  $x$ . Ora é este um operador notável, mediante o qual a relação de congruência  $\approx$  (entre elementos de  $U$ ) se traduz na relação de identidade  $=$ , entre células de repartição correspondentes:

---

(1) A demonstração deste mesmo resultado, segundo uma ordem de ideias diversa; pode encontrar-se, por exemplo, em VAN DER WAERDEN (I).

$$(x \approx y) \equiv [\Phi(x) = \Phi(y)]$$

É neste facto que se baseia o método das *definições por abstracção*, de uso tão frequente em Matemática e que já aqui utilizamos, por exemplo, na definição do conceito de *sistema abstracto* a partir do conceito de *isomorfismo* (1). Mas outros exemplos, mais familiares podem ser apresentados.

Assim, por exemplo, a relação "*x é paralelo a y*", aplicável entre rectas (considerando como paralelas duas rectas coincidentes) converte-se na relação de identidade " *direcção de x = direcção de y*".

Analogamente, é definindo entre pares de números inteiros a relação de congruência  $\approx$ , tal como segue

$$[(x,y) \approx (u,v)] \equiv (x.v = y.u),$$

que, por abstracção se chega ao conceito de número racional. Tem-se então  $(\frac{x}{y} = \frac{u}{v}) \equiv [(x,y) \approx (u,v)]$ . Notemos ainda que, neste caso, ao contrário de que sucede a respeito do exemplo anterior, existe um *representante* privilegiado para cada célula da repartição : este representante é a fracção irredutível.

Por sua vez, a relação de identidade entre os números naturais não é mais que uma tradução, em nova linguagem, da relação de equivalência entre os conjuntos finitos. E a relação de identidade entre os elementos de tais conjuntos? Essa poderá pro

---

(1) Neste caso porém há uma restrição a fazer: não é lícito, como vimos, falar da totalidade dos sistemas isomorfos a um sistema dado.

vir, por sua vez, de uma outra relação de congruência. Mas é claro que tal processo de revisão histórica da gênese dos diversos conceitos de identidade deverá chegar a um termo. Em geral, o matemático detém-se nos objectos do mundo empírico, e encarrega o filósofo de prosseguir a revisão; o filósofo dedica-se ao estudo do problema e chega a uma conclusão inquietante, que quase não se deixa exprimir por palavras: a "*identidade absoluta*" tal como a "*elementaridade absoluta*" ou o "*efectivamente concreto*" são expressões a que não corresponde nenhuma realidade; o homem deve contentar-se com a aplicação sempre aproximada e nunca exacta dos seus conceitos a este mundo instável e quasi contraditório em que se vê constrangido a viver.

Então, o matemático parte do princípio de que a relação *lógica* de identidade é *automaticamente* definida em todo o conjunto  $U$ , apenas tal conjunto tenha sido, ele mesmo, definido; e regista os seguintes factores:

$$1) \quad (x=y) \equiv \bigcap_{\xi} [\xi(x) \neq \xi(y)] ;$$

$$2) \quad \bigcap_x (x=x); (x=y) \subset (y=x) ; (x=y) \cap (y=z) \subset (x=z) ;$$

isto é, a relação de identidade será sempre uma das relações de congruência possíveis no conjunto  $U$  (e mesmo, por assim dizer, a mais *fina* de todas elas).

Finalmente, os factos 1), 2) constituem, precisamente, uma parte daquelas regras de Lógica formal que o matemático, consciente ou inconscientemente, aplica em todas as suas deduções.

33.— CONJUNTOS QUASI-ORDENADOS e CONJUNTOS PARCIALMENTE ORDENADOS.— Suponhamos agora definida num dado conjunto  $U$ , uma relação binária  $\leq$ , reflexiva e transitiva, mas não necessariamente simétrica; isto é, uma relação  $\leq$  tal que:

$$o_1) \bigcap_x (x \leq x) \quad (\text{reflexividade})$$

$$o_2) (x \leq y) \cap (y \leq z) \subset (x \leq z) \quad (\text{transitividade})$$

Diremos então que  $\leq$  é uma relação de *quasi-ordem* ou que o sistema  $[U, \leq]$  é um *conjunto quasi-ordenado*.

Definindo agora uma família  $F$  de subconjuntos de  $U$ , tal como segue

$$d) (X \in F) \equiv \bigcup_u [X = K_v(u \leq v)] ,$$

ter-se-ã:

$$o_1^*) \bigcap_u \bigcup_{X \in F} \{ (u \in X) \cap [(X \in F) \cap (u \in Y) \rightarrow (X \subset Y)] \}$$

$$o_2^*) \bigcap_{X \in F} \bigcup_u \{ (u \in X) \cap [(X \in F) \cap (u \in Y) \rightarrow (X \subset Y)] \}$$

Reciprocamente, seja  $F$  uma família de subconjuntos de  $U$  que verifique as duas condições anteriores, e  $\leq$  uma relação binária definida a partir de  $F$ , tal como segue

$$d^{-1}) (u \leq v) \equiv \bigcap_{X \in F} (u \in X \rightarrow v \in X) ;$$

será fácil ver então que, não sã as proposições  $o_1, o_2$ , mas também a proposição  $d$  se podem demonstrar a partir das proposições  $o_1^*, o_2^*, d^{-1}$ .

Trata-se, portanto, de duas axiomáticas equivalentes a respeito de  $\mathbf{d}$ ; axiomáticas manifestamente mais pobres do que as do § anterior (1).

Juntemos agora aos axiomas  $\sigma_1, \sigma_2$  este outro axioma

$$\sigma_3) \quad (x \leq y) \cap (y \leq x) \subset (x = y) \text{ (antisimetria atenuada)}$$

ou, o que será equivalente, juntemos às condições  $\sigma_1^*, \sigma_2^*$  esta outra condição:

$$\sigma_3^*) \quad \bigcap_{x \in F} (u \in X \nrightarrow v \in X) \subset (u = v) ;$$

diremos então que  $\leq$  é uma relação de *ordem parcial* e que o sistema  $[U; \leq]$  é um *conjunto parcialmente ordenado*.

É claro que, substituindo a relação  $\leq$  por uma relação  $<$  definida tal como segue:  $(x < y) \equiv (x \leq y) \cap (x \neq y)$ , a axiomática dos conjuntos parcialmente ordenados se pode resumir nos dois axiomas seguintes:

$$\bar{\sigma}_1) \quad (x < y) \subset (x \neq y) \text{ (antireflexividade)}$$

$$\bar{\sigma}_2) \quad (x < y) \cap (y < z) \subset (x < z) \text{ (transitividade)}$$

já considerados no §28. Diremos então que  $<$  é uma relação de *ordem parcial*, sob a forma *antireflexiva*.

Ora é fácil ver que, dado um conjunto *quasi-ordenado*  $[U, \leq]$  a relação  $\leq$  se traduz imediatamente numa relação de ordem

---

(1) G. Birkhoff estabelece uma equivalência entre as relações de *quasi-ordem* e os *anéis de conjuntos*, por um lado; e entre as relações de *congruência* e *corpos de conjuntos* por outro lado. Ver G. BIRKHOFF (I).

parcial, entre as células de uma conveniente repartição de  $U$ . Bastará tomar para relação de congruência, correspondente a tal repartição, a relação  $\sim$ , definida tal como segue

$$d_1) \quad (x \sim y) \equiv (x \leq y) \cap (y \leq x)$$

Assim, por exemplo, se  $U$  for o conjunto dos inteiros de Gauss, isto é, dos números da forma  $a+bi$ , com  $a$  e  $b$  racionais inteiros, a relação  $x|y$ , definida em tal conjunto, será uma relação de quasi-ordem, pois que se tem: 1)  $(x=y) \subset (x|y)$ ; 2)  $(x|y) \cap (y|z) \subset (x|z)$  mas não será uma relação de ordem parcial visto que se tem, por exemplo,  $1+i|i-1, i-1|1+i$ , sem que  $1+i=i-1$ . Neste caso a relação de congruência definida segundo  $d_1$ , será a relação " $x$  é um conjugado algébrico de  $y$ "; então, se tomarmos como células da repartição, os conjuntos dos números que são entre si conjugados algebricamente, a relação "divide" converter-se-á numa relação de ordem parcial entre estas células (1).

34.— RELATIVIZAÇÃO.— FUNÇÕES LÓGICAS RESPEITADAS POR ESTA OPERAÇÃO. Dados um conjunto  $U$  e um subconjunto  $V$  de  $U$ , chamaremos *relativização* em  $V$ , àquela operação que, a cada relação  $\alpha$  sobre  $U$  faz corresponder uma relação  $\bar{\alpha}$  (relação  $\alpha$  relativizada em  $V$ ), conforme as duas seguintes regras:

1) Se  $\alpha$  é de tipo 1, as soluções de  $\bar{\alpha}$  serão todas

---

(1) É por um processo análogo que Fréchet define *tipo de dimensão*, FRÉCHET (I).

aquelas soluções de  $\alpha$ , formadas exclusivamente por elementos de  $V$ ; isto é, em símbolos

$$\bar{\alpha}(x_1, \dots, x_n) \equiv \alpha(x_1, \dots, x_n) \quad (x_1, \dots, x_n \in V)$$

2) Se  $\alpha$  é de tipo  $i > 1$ , as soluções de  $\bar{\alpha}$  serão todas aquelas soluções de  $\alpha$ , formadas exclusivamente por relações (de tipo inferior a  $i$ ) relativizadas em  $V$ , incluindo os elementos deste conjunto.

Posto isto, chamaremos *subsistema* de um dado conjunto organizado  $[U; P]$  a todo o sistema  $[V; \bar{P}]$  constituído por um subconjunto  $V$  de  $U$  e por um conjunto  $\bar{P}$  de relações primitivas que resultam das relações  $P$  por relativização em  $V$ ; diremos ainda que o sistema  $[U; P]$  é uma *extensão* do sistema  $[V; \bar{P}]$ .

Dado então um subsistema  $[V; \bar{P}]$  do sistema  $[U; P]$  seja  $\alpha$  uma relação sobre  $U$  que se exprima nas relações primitivas  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , mediante uma função lógica  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Pergunta-se: Em que casos é que a relação  $\bar{\alpha}$ , obtida por relativização de  $\alpha$  em  $V$ , se pode ainda exprimir nas relações primitivas  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , mediante a função lógica correspondente  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ? Notemos, em primeiro lugar, que se deve começar por averiguar o que sucede quando  $F$  se reduz a um dos operadores lógicos fundamentais, pois que, em qualquer caso,  $F$  se obtém por sobreposições, em número finito, de tais operadores, como vimos no §22. Ora o resultado a que sobre este assunto fui conduzido é o seguinte: as únicas operações lógicas fundamentais, que a relativização pode não respeitar, são as duas espécies de quantificação e, portanto, a explicitação. Por conseguinte, se na



arquitectura lógica de  $F$  não intervierem tais constantes lógicas podemos desde logo afirmar que a relação  $\bar{\alpha}$  se exprime nas relações  $P$  por meio da referida função  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Limitar-me-ei a mostrar o que sucede a respeito das constantes  $\neg, \sim$  (recordamos que as constantes  $\cup, \rightarrow$  se podem reduzir às duas primeiras):

Para fixar ideias considerarei apenas relações binárias de tipo 1; para graus e tipos diversos proceder-se-á de um modo análogo. Sejam pois  $\alpha$  e  $\beta$  duas relações binárias quaisquer definidas em  $U$ , e ponhamos

$$\gamma_1(x, y) \equiv \alpha(x, y) \cap \beta(x, y); \gamma_2(x, y) \equiv \sim \alpha(x, y) .$$

Ter-se-á, então, sucessivamente,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1(x, y) &\equiv \gamma_1(x, y) \cap (x, y \in V) \\ &\equiv [\alpha(x, y) \cap (x, y \in V)] \cap [\beta(x, y) \cap (x, y \in V)] \\ &\equiv \bar{\alpha}(x, y) \cap \bar{\beta}(x, y) , \end{aligned}$$

como se pretendia demonstrar. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_2(x, y) &\equiv \gamma_2(x, y) \cap (x, y \in V) \\ &\equiv (x, y \in V) \cap \sim [\alpha(x, y) \cap (x, y \in V)] \\ &\equiv \sim_1 \alpha(x, y) \end{aligned}$$

representando, naturalmente, por  $\sim_1$  a negação interpretada no conjunto fundamental  $V$ . Pode portanto dizer-se que a negação é respeitada por relativização.

Uma consequência imediata deste facto é a seguinte:

Se  $P$  e  $Q$  forem dois conjuntos equivalentes de relações primitivas sobre  $U$ , isto é, se for  $[U;P]=[U;Q]$  não se terá necessariamente  $[V;\bar{P}]=[V;\bar{Q}]$  quando as relações  $\bar{P}$  e  $\bar{Q}$  são obtidas, respectivamente, das relações  $P$  e  $Q$  por relativização em  $V$ ; por outras palavras; a relativização não é necessariamente invariante para qualquer substituição do conjunto de relações primitivas, por um outro que lhe seja equivalente.

Um exemplo muito simples, entre numerosíssimos outros que podem ser apresentados para ilustrar este facto é o seguinte:

Seja  $U$  o conjunto dos números naturais e  $V$  o conjunto dos números pares. Se a organização em  $U$  for definida pela relação " $x$  é sucessor de  $y$ ", ou, abreviadamente,  $x=suc\ y$ , obter-se-á por relativização em  $V$ , uma organização nula, pois que se terá então:  $\sim \bigcup_{x,y} (x=suc\ y)$ ; mas tal não sucederá se a mesma organização for definida por meio da relação  $x<y$ ; o sistema  $[V,<]$  será até isomorfo ao sistema inicial. Tal discordância está em ligação com o facto de não ser possível exprimir logicamente o conceito de  $suc$ , no conceito de  $<$ , sem recorrer à quantificação (1).

35.— EFEITO DA RELATIVIZAÇÃO SOBRE AS PROPOSIÇÕES CATEGÓRICAS.— Uma função lógica  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  das relações primitivas de um sistema  $[U;P]$  pode em particular (se todas as suas variáveis forem aparentes, por quantificação) reduzir-se a uma

---

(1) Notemos que, Topologia, a relativização se refere à relação primitiva  $x \in \bar{X}$ , e não à relação  $Y=\bar{X}$ .

proposição categórica. Mas neste caso será preciso distinguir os operadores *externos* (isto é, que efectuam a passagem final da proposição condicional à proposição categórica) dos restantes quantificadores, que chamaremos *internos*. Ora é fácil ver que, se o quantificador  $\bigcap_x$  ou mesmo o seu derivado  $\bigcap_{x,y,\dots}$ , não são necessariamente respeitados por quantificação, quando *internos*, se-lo-ão, todavia, quando *externos*; mas que tal não sucede a respeito da outra espécie de quantificação.

O resultado anterior fornece-nos um método geral para abordar o seguinte problema: *Determinar um mínimo de condições a que deva satisfazer um subsistema [V] de um sistema [U], concretização de uma dada axiomática, para que [V] seja ainda uma concretização dessa mesma axiomática.*

Por exemplo: em que condições é que um subsistema de um grupo é ainda um grupo; ou um subsistema de um corpo é ainda um corpo; ou um subsistema de uma álgebra de Boole é ainda uma álgebra de Boole; ou um subsistema de um espaço metrizável é ainda um espaço metrizável, etc. etc.? A resposta a tais perguntas depende manifestamente da arquitectura lógica dos axiomas sobre os quais se baseia cada uma dessas teorias (1).

---

(1) É preciso notar, porém, que a resposta varia com o conjunto das relações primitivas, nas diversas axiomáticas possíveis da teoria. Assim por exemplo, as condições para que um subsistema de uma álgebra de Boole seja ainda uma álgebra de Boole, não são as mesmas quando se tomam para primitivos os conceitos de  $\cap$  e  $\cup$ , ou quando se toma como única relação primitiva a relação de ordem parcial correspondente.

Não entrarei em pormenores sobre este assunto. Observarei, simplesmente, que o critério anterior poderá ser substituído por outros de mais fácil aplicação, a respeito de certas operações lógicas derivadas. Entre tais operações derivadas, uma das que se apresentam com mais frequência é aquela que no §11 denominamos *sobreposição de operadores*; ora é fácil ver que tal operação será respeitada por relativização, desde que seja verificada a condição:

a) Qualquer que seja o operador  $n$ -ário primitivo,  $\phi$ , e o agrupamento  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  elementos de  $V$ , tem-se  $\phi(x_1, \dots, x_n) \in V$ .

Em particular, serão respeitados aqueles axiomas que se apresentam sob a forma de identidades entre expressões obtidas por sobreposições de operadores primitivos, como, por exemplo a propriedade associativa de certas operações binárias:

$$\phi[(x, y), z] \equiv \phi[x, \phi(y, z)]$$

### 36.— ISOMORFISMOS ENTRE SUBCONJUNTOS DE UM SISTEMA.—

Entre dois subconjuntos  $V_1, V_2$  de um mesmo sistema  $[U; P]$  duas espécies de isomorfismos podem ser definidos:

1) *Isomorfismos fracos* ou, simplesmente, *isomorfismos*, que se reduzirão aos isomorfismos entre os subsistemas  $[V_1; \bar{P}]$  e  $[V_2; \bar{P}]$  a respeito da transformação  $\sigma$  que faz corresponder a cada relação primitiva  $\bar{\alpha}$  do primeiro a relação  $\bar{\alpha}$  do segundo que provém da mesma relação  $\alpha$  sobre  $U$ .

2) *Isomorfismos fortes* que serão aquelas transformações biunívocas de  $V_1$  em  $V_2$  que respeitam *qualquer relação, primitiva ou derivada do sistema*  $[U; P]$ ; isto é, aqueles isomorfismos do sistema  $[V; \bar{P}]$  no sistema  $[V_2; \bar{\bar{P}}]$  que subsistem para todas as mudanças de  $\bar{P}$  e de  $\bar{\bar{P}}$  resultantes de uma substituição do conjunto de relações primitivas  $P$  por um outro que lhe seja equivalente.

Veremos adiante que todo o isomorfismo forte é prolongável num automorfismo.

Notemos, entretanto, que os dois conceitos agora introduzidos são ainda generalizáveis ao caso em que  $V_1$  e  $V_2$  sejam subconjuntos não de um mesmo, mas de dois sistemas distintos  $[U_1; P]$   $[U_2; Q]$  devendo então os isomorfismos referir-se a uma dada transformação biunívoca  $\sigma$  de  $P$  em  $Q$ .

Exemplo de isomorfismo forte no espaço euclídeo: uma transformação biunívoca  $\theta$  de uma circunferência  $C_1$ , numa circunferência  $C_2$ , tal que:

$$\frac{\delta[\theta(x), \theta(y)]}{\delta(x, y)} = \text{const}; [\delta(x_1, x_2) < \delta(y_1, y_2)] \rightarrow \{\delta[\theta(x_1), \theta(x_2)] < \delta[\theta(y_1), \theta(y_2)]\}$$

quaisquer que sejam  $x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \in C_1$

Exemplo de isomorfismo fraco no conjunto dos números naturais: a transformação biunívoca do conjunto dos números ímpares, no conjunto dos números pares, representada pelo operador *suc*, tomando para primitiva a relação  $<$ .

## 37.— SOLUÇÕES MÁXIMAS E MÍNIMAS DE UMA AXIOMÁTICA.—

Em campos particulares da Matemática moderna (teorias dos grupos, dos anéis, etc.) costuma demonstrar-se um teorema quase evidente, que, no caso geral, se pode enunciar tal como segue:

*Dados dois sistemas  $[U; P]$  e  $[V; Q]$  tais que o primeiro seja isomorfo a um subconjunto do segundo, a respeito de uma transformação  $\sigma$  de  $P$  em  $Q$ , será sempre possível construir uma extensão do primeiro que seja isomorfa do segundo, a respeito de  $\sigma$  (1). A demonstração deste teorema pôde ser feita segundo um método análogo ao que é seguido nos campos particulares (2).*

Posto isto, se  $[U; P]$  e  $[V; Q]$  forem concretizações de uma mesma axiomática, diremos que o sistema abstracto  $S_1$  definido pela primeira, está *contido* no sistema abstracto  $S_2$  definido pela segunda, e escreveremos  $S_1 \leq S_2$ , quando  $[U; P]$  for isomorfo a um subconjunto de  $[V; Q]$

Uma solução de uma axiomática dir-se-á *máxima*, quando contiver qualquer outra solução da referida axiomática; dir-se-á *mínima*, quando estiver contida em qualquer outra solução da mesma axiomática.

Um novo problema se apresenta então: Dados dois sistemas abstractos  $S_1$  e  $S_2$  tais que  $S_1 \leq S_2$  e  $S_2 \leq S_1$  ter-se-á, necessariamente,  $S_1 = S_2$ ? Mais ainda: Pode uma axiomática admitir mais

---

(1) A restrição que obriga os conjuntos  $U$  e  $V$  a serem disjuntos não é necessária.

(2) Veja-se VAN DER WAERDEN (I), p. 42.

de uma solução máxima ou mais de uma solução mínima? A resposta à primeira questão é, *no caso geral*, negativa, como resulta de vários exemplos topológicos (1).

Quanto à segunda questão, notarei apenas que, nos casos comuns a categoricidade é geralmente atingida mediante um axioma que consiste no afirmar que o sistema abstracto a definir é o máximo ou é o mínimo dos que verificam as restantes condições: tais são, por exemplo, o axioma da indução completa para os números naturais, e o axioma da saturação, introduzido por Hilbert nas axiomáticas dos números reais e da Geometria. (2).

Convém notar, finalmente, que uma axiomática não admite necessariamente uma solução máxima ou uma solução mínima.

38. — HOMOMORFISMOS E ENDOMORFISMOS. — É agora altura de introduzir o conceito de homomorfismo, de que o conceito de isomorfismo é apenas um caso particular.

Dados dois sistemas  $[U;P]$  e  $[V;Q]$ , sejam  $\theta$  uma transformação *unívoca* de  $U$  em  $V$ , e  $\sigma$  uma transformação *biunívoca* de  $P$  em  $Q$ . Para maior clareza de exposição, comecemos por supor que as relações primitivas  $P$  e  $Q$  são todas de tipo 1; diremos então que  $\theta$  é um *homomorfismo* de  $[U;P]$  em  $[V;Q]$  a respeito de  $\sigma$ , quando, qualquer que seja a relação  $n$ -ária  $\alpha$  pertencente a  $P$ , se tiver

---

(1) É atendendo precisamente a um facto deste género que Fréchet introduz o seu conceito de tipo de dimensão. FRECHET (I).

(2) HILBERT (III) p.183.

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) \subset \sigma(\alpha) [\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)] .$$

Tratando-se agora de passar ao caso geral, convirá introduzir previamente algumas convenções auxiliares.

Se chamarmos imagem, por intermédio de  $\theta$ , de um qualquer agrupamento  $(a_1, \dots, a_n)$ , ao agrupamento  $[\theta(a_1), \dots, \theta(a_n)]$  a transformação  $\theta$  poderá ser prolongada a um conjunto qualquer de relações sobre  $U$ , conforme as duas seguintes regras:

1) Se  $\alpha$  for uma relação de tipo  $l$ , sobre  $U$ ,  $\theta(\alpha)$  será aquela relação sobre  $V$ , cujas soluções são as imagens, por intermédio de  $\theta$  das soluções de  $\alpha$ .

2) Se  $\alpha$  for uma relação de tipo  $i$  qualquer sobre  $U$ ,  $\theta(\alpha)$  será aquela relação (do mesmo tipo) sobre  $V$ , cujas soluções são as imagens por intermédio de  $\theta$ , das soluções de  $\alpha$ , as quais, por sua vez, são, como sabemos, constituídas por relações de tipo inferior a  $i$ .

Por outro lado, escreveremos, naturalmente,  $\alpha \subset \beta$ , para indicar que toda a solução de  $\alpha$  é ainda uma solução de  $\beta$ .

Posto isto, diremos que a transformação  $\theta$  é um *homomorfismo* de  $[U; P]$  em  $[V; Q]$  a respeito de  $\sigma$  quando, qualquer que seja a relação  $\alpha$  de  $P$  se tiver

$$\theta(\alpha) \subset \sigma(\alpha) .$$

Exemplo: Seja  $U$  o conjunto dos pontos do espaço ordinário, organizado por meio da relação  $R_t(x, y, z)$  e  $V$  o conjunto das rectas desse espaço, paralelas a uma direcção dada, or



ganizado por meio da relação  $P1(u,v,w)$ . Então, se designarmos por  $\theta$  a transformação unívoca que, a cada ponto  $x$  faz corresponder a recta  $\theta(x)$  de  $V$  que por ele passa,  $\theta$  será um homomorfismo de  $[U, Rt]$  em  $[V, P1]$  a respeito da transformação  $\sigma$  que muda  $Rt$  em  $P1$ , pois que se tem

$$Rt(x,y,z) \subset P1[\theta(x), \theta(y), \theta(z)]$$

Um primeiro resultado, relativo ao conceito de homomorfismo será o seguinte:

**Teorema:** Se  $\theta_1$  é um homomorfismo de  $[U]$  em  $[V]$  a respeito de  $\sigma_1$  e  $\theta_2$  é um homomorfismo de  $[V]$  em  $[W]$  a respeito de  $\sigma_2$ , o produto  $\theta_1 \cdot \theta_2$  será um homomorfismo de  $[U]$  em  $[W]$  a respeito do produto  $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ .

Para a demonstração deste teorema, do qual se encontram consequências em todos os campos da Matemática, bastará atender à propriedade transitiva da implicação condicional.

Quando se falar de homomorfismo entre duas concretizações de uma mesma axiomática, deverá entender-se, naturalmente, um homomorfismo entre esses dois sistemas, a respeito da transformação que resulta automaticamente definida, depois da interpretação dos sinais primitivos em cada um deles. Ficará assim estabelecido o significado de expressões tais como; homomorfismo do grupo  $G_1$  no grupo  $G_2$ ; homomorfismo do corpo  $K_1$  no corpo  $K_2$ , etc..

Dados dois sistemas  $[U]$  e  $[V]$  que sejam concretizações de uma mesma axiomática, diremos que  $[U]$  é homomorfo a  $[V]$ ,

se existe, pelo menos, uma transformação  $\theta$  que seja um homomorfismo do primeiro no segundo. Resulta imediatamente do teorema anterior que a relação de *homomorfia* assim definida goza das propriedades reflexiva e transitiva: é portanto uma relação de quasi-ordem; não chega a ser porém uma relação de ordem parcial, e não se pode sequer afirmar que, da conjunção lógica  $[U]$  é homomorfo a  $[V]$  e  $[V]$  é homomorfo a  $[U]$  "resulte"  $[U]$  é isomorfo a  $[V]$ .

Notemos finalmente que, do mesmo modo que o conceito de isomorfismo se generaliza no conceito de homomorfismo, o de automorfismo se generaliza no de *endomorfismo*.

Chamaremos portanto *endomorfismos* de um sistema  $[U; P]$  a respeito do conjunto  $P$ , aos homomorfismos deste sistema em si mesmo, a respeito da transformação idêntica do conjunto  $P$  em si mesmo.

Consequência imediata do teorema anterior é que: o *produto* de dois endomorfismos de  $[U]$  será sempre um endomorfismo de  $[U]$  (1).

Quanto aos automorfismos, ter-se-á uma proposição aná

---

(1) É claro que, ao efectuar sucessivamente dois endomorfismos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  de um sistema  $[U]$ , o segundo deverá ser aplicado à imagem  $\theta_1(U)$  de  $U$  por intermédio de  $\theta_1$ ; se  $\theta_1(U)$  não coincide com  $U$ , aplicar  $\theta_2$  consistirá, naturalmente, em aplicar o operador  $\theta_2^*$  induzido por  $\theta_2$  em  $\theta_1(U)$ . Com tal convenção, ficará esclarecido o significado da expressão "produto de  $\theta_1$  por  $\theta_2$ ".

lógica precedente, e ainda a seguinte: a transformação inversa de um automorfismo é ainda um automorfismo.

### 39.— FUNÇÕES LÓGICAS RESPEITADAS PELOS HOMOMORFISMOS.—

Um problema análogo ao que no §35 se pôs a respeito das relativizações, apresenta-se agora para os homomorfismos.

Seja  $\theta$  um homomorfismo de  $[U; P]$  em  $[V; Q]$  a respeito de  $\sigma$  e seja  $\alpha$  uma relação sobre  $U$  que se exprima nas relações  $P$  mediante a função lógica  $F(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Representaremos então por  $\sigma(\alpha)$  a relação sobre  $V$  que se exprime nas relações  $Q$  mediante a função lógica  $F[\sigma(\alpha_1), \dots, \sigma(\alpha_n)]$ .

Assim o operador  $\sigma$  resulta prolongado num conjunto arbitrário de relações do primeiro sistema.

Pergunta-se agora: qual deve ser a arquitectura lógica da função  $F$  para que se tenha  $\theta(\alpha) \subset \sigma(\alpha)$ ; isto é, para que o homomorfismo  $\theta$  se estenda à relação  $\alpha$ , respeitando assim a função  $F$ ?

Tal como anteriormente, deve começar-se por investigar o que sucede a respeito dos operadores lógicos fundamentais. Em tal investigação fui conduzido aos seguintes resultados:

No caso de a imagem homomórfica de  $U$  coincidir com  $V$ , as únicas operações lógicas fundamentais não necessariamente respeitadas são: a implicação  $\rightarrow$  e a negação  $\sim$  (1).

---

(1) Podemos, contudo, afirmar que, para aqueles homomorfismos a respeito de  $\sigma$  tais que  $\theta(\alpha) = \sigma(\alpha)$ , qualquer que seja a relação primitiva  $\alpha$ , a implicação incondicional  $\subset$  é respeitada.

No caso de a imagem homomórfica de  $U$  ser apenas uma parte de  $V$ , além da implicação e da negação pode não ser respeitada a quantificação.

Abster-me-ei de demonstrar aqui a veracidade das duas proposições anteriores, demonstração que não oferece particular dificuldades.

Convém todavia salientar o seguinte facto importante, análogo a um outro que já foi apontado a respeito das relativizações:

Ao contrário do que sucede com os isomorfismos, os homomorfismos não subsistem, necessariamente, para qualquer substituição do conjunto das relações primitivas, por um outro que lhe seja equivalente.

Um exemplo bem sugestivo é o seguinte: Consideremos o conjunto  $U$  dos números naturais, organizado por meio da relação  $<$ . É claro que a transformação  $\theta$  de  $U$  em si mesmo tal que  $\theta(x) \equiv 2x$  será um endomorfismo do sistema  $[U, <]$  a respeito da relação  $<$ ; mas não será já um endomorfismo do mesmo sistema, a respeito da relação  $suc$ , embora se tenha  $[U, <] = [U, suc]$ . Esta discordância liga-se ao facto de não ser possível exprimir logicamente o conceito de  $suc$  a partir do conceito de  $<$ , sem fazer intervir implicações ou negações:

$$suc\ x = \iota_y \{ (y > x) \cap [(z > x) \rightarrow (z > y)] \} \quad (1).$$

---

(1) Este endomorfismo reduz-se visivelmente a um isomorfismo fraco entre  $U$  e o conjunto dos números pares, isomorfismo que já nos serviu de exemplo (§35).

Um outro exemplo: Consideremos o conjunto  $U$  dos pontos do espaço ordinário, organizado por meio da relação  $R_t(x,y,z,)$ ; e  $V$  o conjunto dos pontos de um plano, organizado por meio da mesma relação. Se  $\theta$  for a projecção ortogonal dos pontos do espaço sobre o plano, é claro que será um homomorfismo de  $[U, R_t]$  em  $[V, R_t]$  a respeito da transformação  $R_t \rightarrow R_t$ . Ora a mesma organização poderá ser definida, tomando para conceito primitivo o de *recta* (isto é, a relação "*é uma recta*"), e contudo a referida transformação primitiva já não será um homomorfismo a respeito da nova relação primitiva, uma vez que transforma em pontos, e não em rectas, as rectas perpendiculares ao plano. Tal discordância está em ligação com o facto de não ser possível exprimir o conceito de *recta*, a partir do conceito de *estar em linha recta*, sem recorrer a implicações ou a negações; com efeito, tem-se, representando por  $\mathcal{R}$  a família das rectas:

$$(X \in \mathcal{R}) \equiv \bigcup_{u \neq v} [(w \in X) \nrightarrow_w R_t(u,v,w)]. \quad (1)$$

Finalmente, os resultados anteriores fornecem um critério geral para a resolução do seguinte género de problemas:

Sejam  $[U]$  e  $[V]$  dois sistemas, dos quais o primeiro verifica uma dada axiomática. Suponhamos, além disso, que  $[U]$  é homomorfo a  $[V]$ . Determinar um mínimo de condições a que deva satisfazer  $[V]$  para que este sistema seja ainda uma concretização da mesma axiomática.

---

(1) Convém notar que, como já sucede para as relativizações, os homomorfismos que em Topologia são denominados *transformações contínuas*, se referem à relação primitiva  $x \in \bar{X}$ .

Notemos que, ao contrário do que sucede a propósito das relativizações, não há agora nenhuma distinção a fazer entre os quantificadores internos e os quantificadores externos. Surge porém um facto novo que convém tratar em separado no § seguinte.

40.— HOMOMORFISMOS OPERATÓRIOS:— Como sabemos (§11) todo o operador unívoco  $\phi$  de grau  $n$  e de tipo 1, corresponde a uma determinada relação  $\alpha$  do mesmo tipo, e de grau  $n+1$ :

$$[y = \phi(x_1, \dots, x_n)] \equiv \alpha(y, x_1, \dots, x_n).$$

Suponhamos agora que  $\alpha$  é uma das relações primitivas de um dado sistema  $[U, \mathcal{P}]$ , e que  $\theta$  é um homomorfismo deste sistema, em um outro sistema  $[V, \mathcal{Q}]$ , a respeito de uma transformação  $\sigma$  tal que  $\sigma(\alpha) = \beta$ , sendo  $\beta$  naturalmente, uma das relações  $\mathcal{Q}$ . Ter-se-á então:

$$\alpha(y, x_1, \dots, x_n) \subset \beta[\theta(y), \theta(x_1), \dots, \theta(x_n)].$$

Nada nos habilita, porém, a afirmar que deste modo,  $\phi$  corresponde um operador  $\psi$  ainda unívoco; a única coisa que podemos dizer, no caso geral, é que  $\phi$  corresponde, por intermédio de  $\sigma$ , ao operador  $\beta$ , não necessariamente unívoco, tal que:

$$[y \in \psi(x_1, \dots, x_n)] \equiv \beta(x_1, \dots, x_n),$$

tendo-se, além disso,

$$[y = \phi(x_1, \dots, x_n)] \subset \{\theta(y) \in \psi[\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)]\},$$

Isto é: os homomorfismos tais como atrás foram defini

dos, não respeitam necessariamente a univocidade dos operadores unívocos, o que está em ligação directa com o facto de não ser possível definir a univocidade, sem recorrer a uma negação ou a uma implicação.

Todavia, os homomorfismos, tais como costumam ser definidos em muitos campos particulares (teoria dos grupos, dos anéis, etc.), satisfazem já a condição de respeitar a univocidade dos operadores unívocos primitivos. Este facto, que não é para desprezar, levou-me a considerar uma vasta categoria de homomorfismos, que direi *operatórios* e que são precisamente aqueles que respeitam a univocidade dos operadores unívocos primitivos. Vê-se imediatamente que tais homomorfismos respeitarão, não só a univocidade dos operadores primitivos, mas ainda:

- 1) Os respectivos domínios de existência (1)
- 2) As sobreposições de tais operadores.

Além disso, as condições de homomorfismo tomam o seguinte aspecto:

$$\theta[\phi(x_1, \dots, x_n)] \equiv \bar{\phi}[\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)] ,$$

relativamente a todo o operador primitivo  $\phi$ , de grau  $n$  e de tipo 1, e supondo que  $\bar{\phi} = \sigma(\phi)$ .

Exemplo: Se  $U$  for o conjunto dos números complexos e

---

(1) É preciso não perder de vista que, segundo a terminologia abreviada aqui adoptada, se diz que um homomorfismo  $\theta$ , referido a uma transformação  $\sigma$ , *respeita* uma relação  $\alpha$ , quando se tem  $\theta(\alpha) \subset \sigma(\alpha)$ .

$\theta$  a transformação unívoca (mas não biunívoca) deste conjunto em si mesmo, definida pela fórmula  $\theta(x) = c^x$ , a transformação  $\theta$  será um homomorfismo operatório do sistema  $[U, +, \cdot]$  em si mesmo a respeito do operador  $\sigma$  que troca a adição pela multiplicação, visto que se tem  $\theta(x + y) = \theta(x) \cdot \theta(y)$ . Importa contudo notar que  $\theta$  não é um endomorfismo.

Será fácil ver ainda que os homomorfismos operatórios respeitam aquelas proposições, tão frequentes nos sistemas algébricos (propriedades associativa, distributiva, etc.) que se apresentam sob a forma de *identidades* entre expressões obtidas por sobreposições de operadores.

#### 41.— CONJUNTOS ORDENADOS E CONJUNTOS BEM ORDENADOS (1).

Por conjunto *ordenado* entende-se todo o conjunto parcialmente ordenado  $[U, <]$ , que verifica o seguinte axioma suplementar

$$\bar{\sigma}_3) \bigcap_{x,y} (x < y) \cup (x = y) \cup (y < x) , \quad (2)$$

o qual, juntamente com a propriedade antireflexiva e antisimétrica, constitue o *princípio tricotômico* dos conjuntos ordenados: *Dados dois elementos  $x, y$ , quaisquer, uma e uma só das três hipóteses  $x < y, x = y, y < x$  se verifica necessariamente.* Transitividade e tricotomia, eis as propriedades características das relações de ordem.

(1) Sobre este assunto pode ver-se, por exemplo, SIERPINSKI (I).

(2) Os axiomas  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2$  foram enunciados no §33.



Os isomorfismos entre conjuntos ordenados são comumente conhecidos pela designação de *semelhanças*. Por outro lado, os sistemas abstractos definidos pelos conjuntos ordenados (isto é as soluções da axiomática  $\bar{o}_1, \bar{o}_2$ ) são chamados *tipos de ordem*.

Entre os conjuntos ordenados, são particularmente importantes os conjuntos *bem ordenados*, que se distinguem pelo facto de todo o subconjunto não vazio conter um *primeiro* elemento, isto é, em símbolos:

$$\bar{o}_4) \bigcap_{X \neq \emptyset} \bigcup_{u \in X} [v \in X \rightarrow (u=v) \cup (u < v)],$$

axioma que poderá ser substituído pelos dois seguintes:

$$o'_4) \bigcup_u \bigcap_x [(u=x) \cup (u < x)]$$

$$o''_4) \bigcup_u [(x \leq u) \rightarrow_x \zeta(x)] \cap \{[(y < v) \rightarrow_y \zeta(y) \rightarrow_v \zeta(v)]\} \rightarrow_\zeta \bigcap_z \zeta(z)$$

O último axioma não é mais do que o princípio de indução. Se uma dada proposição  $\zeta(x)$  condicional em  $x$  verifica as duas condições: 1) existe um elemento  $u$ , a respeito do qual se sabe que a proposição  $\zeta(x)$  é verdadeira para todo o  $x$  tal que  $x \leq u$ ; 2) o facto de a proposição  $\zeta(x)$  ser verdadeira para todos os elementos anteriores (1) a um dado elemento  $v$ , implica, qualquer que seja  $v$ , que ela será ainda verdadeira para este elemento - então pode afirmar-se que a proposição  $\zeta(x)$  é verdadeira qualquer que seja  $x$ .

---

(1) O símbolo  $<$  poderá ler-se indiferentemente "é anterior a", "precede", "é menor que", "é inferior a", etc.

Se representarmos pelo símbolo  $1$  aquele primeiro elemento cuja existência é postulada em  $\sigma_4'$ , isto é, se puzermos

$$1 = \iota_U(u \neq x \rightarrow_x u < x),$$

e se, por outro lado, adoptarmos na escrita simbólica a forma *conjunto*, em vez da forma *relação*, o princípio de indução pode tomar o seguinte aspecto.

$$\sigma_4''') \quad (1 \in X) \cap [(u <_U v \rightarrow_u u \in X) \rightarrow_v (v \in X)] \rightarrow_x (X = U).$$

Posto isto, chamaremos *secção*  $[a]$  de um conjunto bem ordenado  $[U, <]$  ao conjunto dos elementos  $x$  de  $U$  tais que  $x < a$ , em que  $a$  designa um dado elemento de  $U$ . Na teoria dos conjuntos bem ordenados, desempenham um papel fundamental os dois seguintes teoremas:

I) *Dados dois conjuntos bem ordenados, será sempre possível e de um só modo, estabelecer um isomorfismo ou entre um deles e o outro ou entre um deles e uma secção do outro.*

II) *Nenhum conjunto bem ordenado pode ser isomorfo a uma das suas secções.*

De tais teoremas, podemos deduzir, imediatamente, as seguintes consequências:

a) *Entre dois conjuntos bem ordenados, um deles será necessariamente, isomorfo a um subconjunto do outro; isto é: dadas duas soluções  $S_1$  e  $S_2$  (tipos de ordem) da axiomática  $\sigma_1 - \sigma_2$  uma das hipóteses  $S_1 \leq S_2, S_2 \leq S_1$  se verifica necessariamente.*

b) *Dois conjuntos bem ordenados, tais que cada um*

deles seja isomorfo a um subconjunto do outro, são isomorfos entre si; isto é, se  $S_1$  e  $S_2$  forem duas soluções da axiomática  $\bar{o}_1 - \bar{o}_4$ , tais que  $S_1 \leq S_2, S_2 \leq S_1$ , ter-se-á necessariamente  $S_1 = S_2$ .

Notemos, de passagem, que o último teorema já não é verdadeiro na teoria dos conjuntos ordenados. Com efeito, se  $U$  for, por exemplo, o conjunto de todos os números racionais, e  $V$  o conjunto dos números racionais  $x$  tais que  $0 \leq x \leq 1$ , organizados por meio da relação natural de ordem, é fácil ver que  $[U, <]$  é isomorfo a um subconjunto de  $V$  (o conjunto dos números racionais  $x$  tais que  $0 < x < 1$ ), e que  $[V, <]$  é isomorfo a um subconjunto de  $U$  (aquele mesmo conjunto  $V$ ), sem que  $[U, <]$  seja isomorfo a  $[V, <]$  (recorde-se, a propósito, o que foi dito no §37).

Vários autores (Fréchet, Sierpinski, etc.) chamam *números ordinais* aos tipos de ordem dos conjuntos bem ordenados, isto é, às soluções da axiomática  $\bar{o}_1 - \bar{o}_4$ . Parece-nos, no entanto, preferível introduzir este conceito do seguinte modo, talvez mais intuitivo:

Diremos que dois elementos  $u, v$  de dois conjuntos bem ordenados  $[U]$ ,  $[V]$ , definem nestes sistemas o mesmo número ordinal, quando tais elementos se correspondem mutuamente naquele isomorfismo que, segundo o teorema I, se verifica necessariamente, ou entre um dos conjuntos  $[U]$ ,  $[V]$  e o outro, ou entre um deles e uma secção do outro (1).

É fácil ver que a axiomática  $\bar{o}_1 - \bar{o}_4$  é, como as anteriores compatível mas não categórica. Surgem no entanto as ques

---

(1) Tal é, no fundo, o conceito adoptado por certos autores como Borel, Baire, etc; Veja-se, por exemplo, BAIRE, R. (I).

tões: Esta axiomática admite uma solução mínima? Esta axiomática admite uma solução máxima?

À primeira questão responde-se afirmativamente. À segunda responde-se com o paradoxo de Burali-Forti, isto é, negativamente; e é atendendo ao teorema II que se chega a tal conclusão. Não é portanto admissível a existência de um conjunto bem ordenado tal que qualquer outro conjunto bem ordenado seja isomorfo a um subconjunto do primeiro; ou ainda, por outras palavras: não é lícito falar da *totalidade dos números ordinais*; será permitido tão somente falar da totalidade, sim, dos números ordinais anteriores a um número ordinal arbitrário (para além do qual novos números ordinais poderão vir a ser considerados).

Notemos, finalmente, que, embora na arquitectura lógica do axioma  $\bar{\sigma}_4$  intervenha um quantificador  $\bigcup_x$ , se pode afirmar que todo o subconjunto de um conjunto bem ordenado é, por relativização ainda bem ordenado.

42.— NÚMEROS ORDINAIS FINITOS.— Diremos *numerado* todo o conjunto bem ordenado que verifique o seguinte axioma suplementar

$$\bar{\sigma}_5) (x < y) \xrightarrow{x, y} \bigcup_u \{ (u < y) \cap [ (v < y) \rightarrow (v = u) \cup (v < u) ] \} ,$$

ou seja, por palavras: Para todo o elemento distinto do primeiro existirá um outro que o precede imediatamente.

Números ordinais finitos serão todos aqueles números

ordinais, definidos pelos conjuntos numerados.

Chamaremos *conjuntos numerados de 1<sup>a</sup> espécie* aqueles conjuntos numerados que verificam este outro axioma.

$\bar{o}_5^*) \bigcup_u (x \neq u \rightarrow_x x < u)$  (isto é: *Existe um último elemento*).

Notemos que os conjuntos *numeráveis de 1<sup>a</sup> espécie* (isto é susceptíveis de neles ser definida uma relação  $<$  que satisfaça aos axiomas  $\bar{o}_1\text{--}\bar{o}_5^*$  não são mais do que os conjuntos *finitos*. Vê-se então imediatamente que a axiomática  $\bar{o}_1\text{--}\bar{o}_5^*$  não admite uma solução máxima; o mesmo não sucede, porém (1), a respeito da axiomática  $\bar{o}_1\text{--}\bar{o}_5$ , que terá como solução máxima, precisamente, a solução da axiomática (a primeira axiomática categórica que encontramos neste trabalho) que se obtém da anterior pela adunção deste último axioma.

$\bar{o}_6) \bigcap_x \bigcup_y (x < y)$  (isto é: *Não existe um último elemento*)

Chamaremos *conjuntos numerados de 2<sup>a</sup> espécie* aos sistemas  $[U, <]$  que verificam axiomas  $\bar{o}_1\text{--}\bar{o}_6$ . Os conjuntos susceptíveis de uma tal organização serão, naturalmente, os *conjuntos infinitos numeráveis* a que, para transigir com o uso, passaremos a chamar simplesmente *conjuntos numeráveis*.

---

(1) Notemos, entretanto, que afirmação da *não-existência* de uma solução máxima para a axiomática  $\bar{o}_1\text{--}\bar{o}_6$  será já equivalente à afirmação de *existência* de, pelo menos, uma solução da axiomática  $\bar{o}_1\text{--}\bar{o}_6$  isto é, à afirmação de compatibilidade desta última. Por outro lado, a afirmação de existência de uma solução máxima para a axiomática  $\bar{o}_1\text{--}\bar{o}_6$  conduziria imediatamente a um paradoxo como o de Burali-Forti. Estaria portanto aqui uma primeira confirmação de compatibilidade da axiomática.

Uma concretização privilegiada das axiomáticas  $\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_6$  (entre infinitas outras, construíveis a partir desta) é o conjunto dos números naturais, com a relação comum de ordem. É preciso, porém, não perder de vista que se tal axiomática basta para fixar as propriedades formais daqueles entes, nada porém nos pode dizer sobre a gênese do conceito de *número natural*, conceito que nos é dado pela *intuição* (1) e que, como se teve ocasião de verificar, se encontra na base da própria Lógica. Note mos entretanto que, apesar da sua origem intuitiva, este conceito acusa já um certo grau de idealização, uma vez subordinado ao axioma  $\bar{\sigma}_6$ , no qual reside essencialmente a dificuldade do problema da não-contradição da Aritmética, pois que é precisamente em tal axioma que se encontra a ideia de infinito. Não aprofundarei, contudo, este delicadíssimo problema que, conforme já disse atrás, me afastaria do objectivo fundamental do presente trabalho (1).

Tornemos à axiomática  $\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_5$  e introduzamos o novo símbolo  $\text{suc}$ , mediante a definição:

$$\text{S)} \quad (y = \text{suc } x) \equiv (x < y) \cap [(x < z) \rightarrow_z (y \leq z)]$$

- 
- (1) Segundo a escola intuicionista de Brouwer, que se filia em parte na tradição Kantiana, a ideia de número deriva imediatamente da intuição do tempo. Porém os intuicionistas brouwerianos rejeitam a intuição espacial - e é neste ponto que se afastam de Kant; assim, toda a matemática intuicionista se apoia construtivamente sobre a noção de número natural, de acordo com o ponto de vista que já Kronecker defendia.
- (2) Sobre este assunto, veja-se HILBERT, D. und BERNAYS, P. (19), HERBRAND, J. (III), GÖDEL, K. (I), GENTZEN, G. (I).

Será então fácil demonstrar as seguintes propriedades:

$$e_1) (y = \text{suc } x) \cap (z = \text{suc } x) \xrightarrow{x,y,z} (y = z)$$

$$e_2) (y = \text{suc } x) \cap (y = \text{suc } z) \xrightarrow{x,y,z} (x = z)$$

$$e_3) \bigcup_u \bigcap_x (\text{suc } x \neq u)$$

$$e_4) \left[ \bigcap_x (\text{suc } x \neq u) \xrightarrow{u} \zeta(u) \right] \cap \left[ \zeta(x) \xrightarrow{x} \zeta(\text{suc } x) \right] \xrightarrow{\zeta} \bigcap_x \zeta(x)$$

A fórmula  $e_1$  exprime simplesmente a univocidade do operador unitário  $\text{suc}$ . A fórmula  $e_2$  exprime o facto de dois elementos distintos não admitirem um mesmo sucessor. A fórmula  $e_3$  exprime a existência de um primeiro elemento. Finalmente a fórmula  $e_4$  traduz o princípio da indução finita.

Ora não será fácil ver que a axiomática  $\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_5$  é equivalente à axiomática  $e_1 - e_2$ , a respeito da definição  $S$ . Quando a definição  $s^{-1}$  que exprime logicamente o conceito de  $<$  no conceito de  $\text{suc}$ , ela não poderá deixar de ser uma definição de altura 1, muito mais complicada do que a primeira:

$$s^{-1}) \left[ (x < y) \xrightarrow{x,y} \zeta(x,y) \right] \equiv \bigcap_x \left[ \zeta(x, \text{suc } x) \cap \sim \zeta(x,x) \right] \cap \left[ \zeta(x,y) \xrightarrow{x,y} \zeta(x, \text{suc } y) \right] \\ \cap \left[ \sim \zeta(x,y) \xrightarrow{x,y} \sim \zeta(\text{suc } x,y) \right]$$

Se aos axiomas  $e_1 - e_4$  juntarmos este outro:

$e_5^*) \bigcup_v \left[ \sim \bigcup_x (x = \text{suc } v) \right]$  (isto é: Existe um último elemento), teremos a axiomática dos conjuntos numerados de 1ª espécie, em termos de  $\text{suc}$ .

Se em vez de  $e_5^*$  juntarmos aos axiomas  $e_1 - e_4$  o axioma:

$e_5) \bigcap_x \bigcup_y (y = \text{suc } x)$  (isto é: *todo o elemento admite um sucessor*) teremos a axiomática dos conjuntos numerados de 2<sup>a</sup> espécie (1).

Esta última axiomática apresenta de notável o seguinte facto: o operador unitário *suc* não só é definido em todo o conjunto fundamental *U*, mas até, em virtude do axioma  $e_2$ , constitui uma transformação *biunívoca* do conjunto *U* num seu subconjunto próprio: o conjunto *V* que se obtém de *U* pela supressão do primeiro elemento. Assim, o conjunto *U* será equivalente a uma sua parte: propriedade características dos conjuntos infinitos, em geral, que Dedekind adopta para a classificação dos conjuntos em finitos e infinitos. Sabe-se, todavia, a que dificuldades pode conduzir este critério (positivo para os conjuntos infinitos e negativo para os conjuntos finitos). Em vez de tal critério poderá ser usado um outro (positivo no caso finito e negativo no caso infinito): a possibilidade ou impossibilidade de introduzir no conjunto considerado um operador unitário *suc*, que verifique as condições  $e_1$ - $e_5^*$ .

Notemos, finalmente, que as anteriores axiomáticas em termos de *suc* poderão ser ligeiramente modificadas, com a introdução de um novo sinal primitivo: o símbolo *l*, tal que  $l = \bigcap_u (\text{suc } x \neq u)$ . Então, os axiomas  $e_3, e_4$  tomarão, respecti-

---

(1) É fácil ver agora que, como já observámos no §37, o axioma da indução completa, equivale a acrescentar uma condição de mínimo à axiomática  $e_1, e_2, e_3, e_5$  o conjunto dos números naturais será, a menos de um isomorfismo, o mínimo sistema  $[U, \text{suc}]$  que satisfaz a esta última axiomática.



vamente, o aspecto:

$$e_3') \bigcap_x (\text{suc } x \neq 1)$$

$$e_4') \zeta(1) \cap [\zeta(x) \rightarrow \zeta(\text{suc } x)] \rightarrow \bigcap_x \zeta(x),$$

É fácil ver agora que aparte diferenças formais, a axiomática  $e_1, e_2, e_3', e_4', e_5$  coincide com a conhecida axiomática de Peano (1).

Em vez do sinal 1, poderíamos ainda usar o sinal 0, pondo  $1 = \text{suc } 0$ . No primeiro caso, diremos que se adopta a *notação dos números naturais* e no segundo caso, a *notação dos números inteiros positivos*.

43.— DEFINIÇÕES RECORRENTES.— Sobre o princípio de indução finita, tal como foi formulado no § anterior, baseiam-se as definições recorrentes, relativas aos conjuntos numerados, em particular ao domínio dos números naturais ou ao domínio dos inteiros positivos. É a este último conjunto que nos referiremos no que se segue (2).

Seja, por exemplo,  $\phi$  um operador (unívoco, de tipo 1) que verifique as duas seguintes condições

$$(I) \quad \begin{cases} \phi(0) = a \\ \phi(\text{suc } n) \equiv \psi(\phi(n), n) \end{cases},$$

- 
- (1) Todavia a axiomática de Peano corresponde a um espírito diverso do da escola formalista de Hilbert, e assim o axioma: *1 é um número natural*, deixa de ter aqui um sentido..
- (2) Respeitando o uso, representarei neste § a variável inteira por letras tais como  $n, m, p, q, k$ , etc. É claro que diremos aqui "*positivo*" no sentido de  $\geq 0$ .

em que  $a$  representa um número dado e  $\psi$  um operador binário já definido. Em virtude do princípio da indução, existirá um e só um operador  $\phi$ , que verifique tais condições, operador que poderá então ser representado pela fórmula  $\vdash_{\phi} \{ [\phi(0)=a] \cap [\phi(\text{suc } n)=\psi(\phi(n),n)] \}$ .

Trata-se portanto de uma definição implícita (de altura 1) e todavia *construtiva*, se atendermos a que os valores da função podem, segundo tal definição, ser *calculados* sucessivamente, um por um, para todos os valores  $0,1,2,\dots$ , da variável independente  $n$ .

Mais geralmente, podemos considerar o seguinte esquema de definição por recorrência:

$$(II) \quad \begin{cases} \phi(k,0) \equiv \psi(k) \\ \phi(k,\text{suc } n) \equiv \chi(\phi(k,n),k,n) \end{cases}$$

em que  $\psi, \chi$  representam operadores já definidos,  $n$  a *variável de indução* e  $k$  um *parâmetro* (isto é, uma variável sobre a qual não incide a indução). Tomando, naturalmente, como ponto de partida (no lugar de  $\psi$  e  $\chi$ ) os símbolos  $0, \text{suc}$ , a primeira operação que se pode definir segundo o esquema (I) será a *adição*:

$$k + n \equiv \phi(k,n) \quad \begin{cases} \phi(k,0) \equiv k \\ \phi(k, \text{suc } n) \equiv \text{suc } \phi(k,n) \end{cases}$$

A partir deste momento a função  $\text{suc } n$  poderá assumir a forma  $n+1$ . Notemos, por outro lado, que, tomada como única noção primitiva, a adição permite fundar uma nova axiomática dos conjun-

---

(1) ACKERMANN (II), p.

tos numerados, que me abstenho, todavia de apresentar aqui.

Depois da adiçāo, poderā definir-se a multiplicaçāo:

$$k.n \equiv \phi(k,n) \begin{cases} \phi(k,0) \equiv 0 \\ \phi(k,n+1) \equiv \phi(k,n)+k \end{cases}$$

e assim por diante.

Podemos agora alargar o esquema (II) considerando em vez de um sō parâmetro  $k$ , vários parâmetros  $k_1, \dots, k_r$ :

$$(III) \begin{cases} \phi(k_1, \dots, k_r, 0) \equiv \psi(k_1, \dots, k_r) \\ \phi(k_1, \dots, k_r, n+1) \equiv \chi(\phi(k_1, \dots, k_r, n), k_1, \dots, k_r, n) \end{cases}$$

No sentido clāssico, entende-se por *função recorrente* toda a função  $\phi$  definida, quer directamente segundo o esquema (III), quer por sobreposições, em número finito, de outras funções assim definidas. Tem-se, deste modo, uma classe particular da classe das definições lógicas descritas no § 22. Wilhem Ackermann (1) deu o exemplo de uma função de inteiros, que se pode definir por um processo de indução finita e não é, todavia, uma função recorrente no sentido clāssico: a função  $\phi(n, p, q)$  que é idêntica a  $p+q$  para  $n=0$ , a  $p \cdot q$  para  $n=1$ , a  $p^q$  para  $n=2$ , a  $p^q$  para  $n=3$ , e assim sucessivamente. Vê-se, portanto, que o esquema (III) não esgota a noção intuitiva de recorrência.

O alargamento do esquema clāssico das definições por recorrência constitue uma das belas obras da escola hilbertiana.

---

(1) R. PETER (I), p. 613.

Rozsa Pēter (1) considera as seguintes modalidades de recorrências: *decursiva*, *imbricada* e *cruzada* (ou *múltipla*) (2). Na recorrência decursiva, o valor da função  $\phi(n+1)$  é calculado, não apenas a partir do valor precedente  $\phi(n)$ , mas a partir de um certo número dos valores precedentes  $\phi(0), \dots, \phi(n-1)$ . Da recorrência imbricada limitar-me-ei a apresentar um exemplo:

$$\phi(k,0) = \begin{cases} 1 & \text{para } k=0 \\ 0 & \text{para } k \neq 0 \end{cases}; \quad \phi(k,n+1) = \begin{cases} 1 & \text{para } k=0 \\ \phi(k-1,n) + \phi(k,n) & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$$

É fácil ver que a função  $\phi(k,n)$  assim definida é a mesma que em Análise combinatória se representa por  $\binom{n}{k}$ . Em particular, a segunda condição constitui a conhecida regra do triângulo aritmético de Tartaglia.

Finalmente, na recorrência cruzada, o processo de indução incide sobre mais de uma variável ao mesmo tempo: a referida função de Ackermann pode ser definida por tal processo.

Por outro lado, R. Pēter demonstra que só a última modalidade é irreduzível ao esquema clássico.

Notemos agora que as definições por recorrência podem ser estendidas a operadores de tipo superior a 1. Consideremos, por exemplo, o funcional  $\phi_k[m,n,\phi(k)]$  que verifica as condições

$$(IV.) \begin{cases} \phi_k[n,m,\phi(k)] \equiv 0 \\ \phi_k[\bar{m},n+1,\phi(k)] \equiv \phi_k[m,n,\phi(k)] + \phi(n+1) \end{cases}$$

---

(1) R.PETER (I), p. 613.

(2) Expressões do autor: Wertreterlanfrekursion, eingeschachtelte Rekursion, e mehrfachen Rekursion.

É fácil ver que se trata do somatório  $\sum_{k=m}^{k=n} \phi(k)$ , cuja definição por recorrência é precisamente a anterior (1).

Hilbert pensou que a intervenção de tipos superiores permitiria atingir todas as modalidades de recorrência, e, porventura, todas as possibilidades de construção de funções de inteiros; e é guiado por esta ideia que estabelece o seu esquema geral

$$(V) \quad \begin{cases} \rho(\gamma, \theta, 0) \equiv \theta \\ \rho(\gamma, \theta, n+1) \equiv \gamma(\rho(\gamma, \theta, n), n) \end{cases},$$

em que  $\theta$  e  $\gamma$  representam variáveis funcionais, de tipos quaisquer, com possíveis parâmetros;  $\gamma$  depende de duas variáveis, a primeira do mesmo tipo que  $\theta$  e a outra uma variável fundamental; o valor de  $\gamma$  tem o tipo de  $\theta$ .

44.— IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DA RECORRÊNCIA.— EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS FINITAS.— A importância das investigações no campo das definições recorrentes manifesta-se tanto do lado prático, quanto do lado teórico.

Skolem mostrou que a Aritmética comum se deixa construir por via finita ("finitely"), sem o emprego dos quantificadores, desde que se adoptem exclusivamente os métodos de re

- 
- (1) Será interessante pôr esta definição em confronto com aquela de integral de Cauchy, dada no § 24. A segunda condição poderia ainda ser substituída pelas duas seguintes:  $\phi_k[m, n+p, \phi(k)] \equiv \phi_k[m, n, \phi(k)] + \phi_k[n, n+p, \phi(k)]$ ,  $\phi_k[0, 1, \phi(k)] \equiv \phi(1)$ .

corrência ("rekurriende Denkweise"). Deste modo, a classe das funções recorrentes - que contém todos os conceitos usuais da teoria dos números - constitui um dos domínios respeitados pelo ponto de vista do intuicionismo.

Por outro lado, Hilbert e Ackermann aplicam as funções recorrentes ao estudo do problema do contínuo; Gödel toma a noção de recorrência como base das suas notáveis investigações sobre a impossibilidade de demonstrar certos teoremas de não contradição.

É claro que o facto de ser possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números reais e as funções de inteiros de uma só variável (por meio das fracções decimais, ou das fracções contínuas) determina uma imediata repercussão no domínio da Análise das investigações sobre os processos de recorrência. Quando, numa proposição da Análise, se fala de uma sucessão *qualquer* de números, abstrai-se completamente do modo como tal sucessão possa vir a ser efectivamente construída, e chega a admitir-se a possibilidade de que tal sucessão seja dada por meio de infinitas escolhas arbitrárias e independentes, tal como sucede a respeito do princípio de Zermelo; ora a verdade é que, passando à prática, uma sucessão numerável não poderá ser construída (completamente), senão com um *número finito* de escolhas, que podem consistir, por exemplo, em fixar alguns termos iniciais e em adoptar uma *lei de recorrência*, em virtude qual *todos os termos seguintes resultem potencialmente determinados*.

Ora é fácil ver que as considerações anteriores relativas às definições recorrentes se aplicam, *mutatis mutandis*, a funções que dependem de variáveis inteiras e tomam os valores no conjunto dos números racionais, ou no conjunto dos números reais ou, finalmente, no conjunto dos números complexos: basta rã que, para ponto de partida, se tomem, por exemplo, as quatro operações elementares da Aritmética e os símbolos  $0, 1, i$ .

Posto isto, notemos a analogia entre o esquema (I) do § anterior e o esquema das equações diferenciais ordinárias, completadas com uma condição inicial; esta analogia tornar-se-ã flagrante se fizermos

$$\Delta\phi(n) \equiv \phi(n+1) - \phi(n)$$

chamando *primeiras diferenças* da função  $\phi(n)$  aos valores  $\Delta\phi(0)$ ,  $\Delta\phi(1)$ ,  $\Delta\phi(2)$ , ... da função  $\Delta\phi(n)$ . Então, o esquema (I) poderá tomar o aspecto

$$(VI) \quad \phi(0)=a \ ; \ \Delta\phi(n) \equiv \psi(\phi(n), n).$$

Fazendo  $\Delta\Delta\phi(n) \equiv \Delta^2\phi(n)$ ,  $\Delta\Delta^2\phi(n) \equiv \Delta^3\phi(n)$ , etc. e chamando *segundas diferenças* de  $\phi(n)$  aos valores da função  $\Delta^2\phi(n)$  *terceiras diferenças* de  $\phi(n)$  aos valores de função  $\Delta^3\phi(n)$ , etc., poderemos imaginar o seguinte esquema mais geral, de equações às diferenças finitas:

$$(VII) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi(0)=a_1, \phi(1) = a_2, \dots, \phi(r-1) = a_r \\ \Delta^p\phi(n) \equiv \psi(\Delta^{p-1}\phi(n), \dots, \Delta\phi(n), \phi(n), n) \end{array} \right.$$

o qual corresponde, manifestamente, às *recorrências recursivas*

da classificação de Pêter.

Poderíamos ainda considerar sistemas de equações às primeiras diferenças, e, finalmente, equações às *diferenças parciais*, que estarão incluídas no processo da *recorrência cruzada*.

Ora é preciso notar que não se trata aqui de puras especulações. Todos estes tipos de equações às diferenças finitas (exceptuado o último) se têm apresentado, por exemplo, em vários problemas de cálculo das probabilidades (1).

Sucede, além disso, que, na resolução de algumas dessas equações se podem usar métodos semelhantes a certos métodos utilizados na integração de equações diferenciais. Será pois natural que as duas teorias possam desenvolver-se com um certo paralelismo, fornecendo-se muitas sugestões. Para as equações às diferenças finitas, as quadraturas são manifestamente representadas pelos somatórios, tais como foram definidos no § anterior. Todavia, entre as duas referidas teorias, observa-se uma diferença capital: enquanto para as equações diferenciais é necessário estabelecer difíceis, e nem sempre muito eficazes, teoremas de existência e de unicidade, para as equações às diferenças finitas tal dificuldade nem sequer se apresenta, visto que, não só a existência e a unicidade, mas até a construtividade são garantidas imediatamente pelo princípio de indução.

Deste modo, a *integração* das equações às diferenças

---

(1) Sobre este assunto, pode, ver-se, por exemplo, FRÉCHET (II).



finitas, adquire um significado preciso: trata-se de evitar uma recorrência, exprimindo a solução das equações ou do sistema em operadores já conhecidos, mediante um número finito de sobreposições (1). Trata-se portanto, de uma resolução, por assim dizer, indirecta, não numérica, no género da resolução de equações algébricas por meio de radicais — e eis que um novo programa de trabalho se desenha imediatamente: *estender a teoria de Galois às equações de recorrência.*

Não devia estar longe da verdade Poincaré, quando no processo de indução finita reconheceu o princípio dinamizador da Matemática. No futuro desta ciência, um papel importante parece reservado ao estudo das funções recorrentes.

45.— NÚMEROS ORDINAIS TRANSFINITOS.— POTÊNCIAS SUPERIORES À DO NUMERÁVEL.— Vimos no §42 como a axiomática  $\sigma_1 - \sigma_4$  se pode tornar categórica, mediante a adjunção dos axiomas  $\sigma_5, \sigma_6$ . Não haverá então outros modos de saturar a mesma axiomática?

Consideremos, por exemplo, o conjunto U dos polinômios inteiros em x, de coeficientes inteiros positivos, organizado por meio de uma relação < assim definida: 1)  $\phi(x) < \psi(x)$  se o grau do primeiro for inferior ao grau do segundo; 2) dados dois polinômios  $\phi(x), \psi(x)$  do mesmo grau, supostos ordenados se

---

(1) Assim, por exemplo, supondo já conhecido o operador! e as operações elementares da Aritmética, a função recorrente  $\binom{n}{k}$  a que nos referimos no § anterior poderá definir-se directamente pela fórmula  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ; analogamente da expressão  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$  poderá passar-se à expressão  $\frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$ .

gundo as potências decrescentes de  $x$ , ter-se-á  $\phi < \psi$  se, e só se, o primeiro coeficiente pelo qual diferem é maior em  $\psi$  do que em  $\phi$ .

É claro que se trata de um conjunto bem ordenado que, porém, já não satisfaz ao axioma  $\bar{o}_5$ , visto que, por exemplo, o polinômio  $x$  (de grau 1) aparece imediatamente a seguir aos polinômios que se reduzem a uma constante (de grau 0) e não é todavia precedido imediatamente por nenhum deles: corresponder-lhe-á o número ordinal comumente designado pelo símbolo  $\omega$  - o primeiro número ordinal transfinito. É claro que tal conjunto bem ordenado poderá ser agora estendido (§ 34), passando, sucessivamente, aos conjuntos de polinômios em duas variáveis  $x, x'$  em três variáveis  $x, x', x''$ , etc. e adoptando critérios análogos de ordenamento: cada polinômio em  $x, x'$ , pode considerar-se como um polinômio em  $x'$ , tendo como coeficientes polinômios em  $x$ ; e assim por diante. Após a introdução de uma sucessão numerável de variáveis  $x, x', x'', \dots$ , uma nova sucessão numerável  $x_1, x'_1, x''_1, \dots$  e uma outra  $x_2, x'_2, x''_2, \dots$ , poderão ser introduzidas, etc. etc. ter-se-á então:  $1 < 2 < \dots < x < x+1 < \dots < 2x < \dots < 3x < \dots$   
 $\dots < x^2 < \dots < x^3 < \dots < x' < \dots < x'x < \dots < x'' < \dots < x''' < \dots < x'_1 < \dots$   
 $\dots < x'_2 < \dots$ .

Em qualquer destes casos, um mesmo facto se verifica: cada um dos elementos, a partir de certa ordem, é precedido por uma infinidade apenas numerável de outros elementos.

Consideremos então, entre os conjuntos bem ordenados, aqueles que verificam o seguinte axioma:

$\sigma_5$ ) Cada elemento  $\bar{\epsilon}$  precedido por um número finito ou uma infinidade quando muito numerável de outros elementos.

Aos números ordinais transfinitos (isto é, não finitos) definidos pelos elementos de tais conjuntos costuma dar-se o nome de números ordinais de classe II, chamando de classe I aos números ordinais finitos.

Se, além do axioma  $\sigma_5$  juntarmos à axiomática  $\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_4$  este outro axioma:

$\sigma_6$ ) A seguir a cada infinidade numerável de elementos existirá sempre um novo elemento;

obteremos, pela segunda vez, uma axiomática categórica. Todavia, a respeito da compatibilidade de uma tal axiomática, ou, o que é equivalente, a respeito da legitimidade da expressão "totalidade dos ordinais de classe II", os empiristas, como Borel, decidem-se pela negativa — embora nenhum paradoxo, como o de Burali-Forti, se tenha apresentado para esta classe de números ordinais (1). Admitida, porém, a totalidade dos ordinais de classe II, resulta que tal conjunto terá uma potência imediatamente superior à do numerável-potência que se designa pelo símbolo  $\aleph_1$  enquanto a potência do numerável se designa pelo símbolo  $\aleph_0$ ; por outro lado, o primeiro número ordinal que segue todos os ordinais de classe II é designado pelo símbolo  $\Omega$ .

Tratando agora de passar à escrita simbólica os dois axiomas anteriores, sem fazer intervir directamente o conceito

---

(1) Como veremos no § seguinte é precisamente um paradoxo como o de Burali-Forti que resulta de supor que os axiomas  $\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_4, \bar{\sigma}_5, \bar{\sigma}_6$  não são susceptíveis de verificação simultânea.

de numerável, convirá previamente representar por  $\Phi(X)$  a seguinte proposição condicional em  $X$  (subconjunto variável de  $U$ ):

$$(x, y \in X) \cap (y < x) \xrightarrow{x, y} \bigcup_{u \in X} \{(u < x) \cap [(v < x) \xrightarrow{v} \sim (u < v)]\}$$

a qual equivale a afirmar que o tipo de ordem de  $X$  é, por relativização, quando muito igual ao tipo de ordem  $\omega$  (do conjunto dos números naturais); e convirá, por outro lado, convencionar escrever  $X < u$ , em vez de  $(v \in X) \xrightarrow{v} (v < u)$ . Posto isto, será fácil ver que os dois axiomas anteriores são substituíveis pelos seguintes:

$$\begin{aligned} \bar{o}_5) \quad & (y < x) \xrightarrow{x, y} \bigcup_{\Phi(X)} \{(X < x) \cap [v < x] \xrightarrow{v} \sim (X < v)]\} , \\ \bar{o}_6) \quad & \bigcap_{\Phi(X)} \bigcup_u (X < u) \end{aligned} \quad (1)$$

É notório que a solução da axiomática  $\bar{o}_1 - \bar{o}_4, \bar{o}_5, \bar{o}_6$  coincide com a solução máxima da axiomática  $\bar{o}_1 - \bar{o}_4, \bar{o}_5$  e com a solução mínima da axiomática  $\bar{o}_1 - \bar{o}_4, \bar{o}_6$

Notemos agora que a geração dos números ordinais pode prosseguir para além de  $\Omega$ ; a geração dos números cardinais, para além de  $\Omega_1$ . A cada número ordinal  $i$  virá a corresponder, assim um número cardinal  $\aleph_i$ , potência do conjunto dos números ordinais que são precedidos por  $\aleph_k$  números ordinais, para algum  $k < i$ ; a cada número cardinal  $\aleph$  virá a corresponder o nũme-

- 
- (1) O axioma  $\bar{o}_5$  afirma que, para todo o elemento  $x$  distinto do primeiro, existe, pelo menos, um subconjunto de  $U$ , cujo tipo de ordem é quando muito igual a  $\omega$  e que precede imediatamente  $x$ . O axioma  $\bar{o}_6$  afirma que para além de todo o subconjunto de  $U$ , cujo tipo de ordem não ultrapasse  $\omega$ , existirá sempre um novo elemento.

ro ordinal  $\tau(\aleph)$ , o primeiro que é precedido por  $\aleph$  números ordinais (tem-se, por exemplo  $\tau(\aleph_0) = \omega, \tau(\aleph_1) = \Omega$ . Existirá então um primeiro número ordinal  $\mu$  tal que  $\tau(\aleph_\mu) = \mu$ ; poderia tomar-se  $\mu$  como limite superior definitivo da série dos números ordinais, e portanto  $\aleph_\mu$  como limite superior definitivo da série dos números cardinais.

46.— RELAÇÕES DE GRAU INFINITO.— O PLATONISMO EM MATEMÁTICA. Já no § 2 apresentamos uma noção geral de agrupamento. Todavia, até aqui, não temos feito referência senão a agrupamentos finitos.

Como vimos, dado um conjunto fundamental  $U$  e o conjunto  $P$  de posições, um agrupamento de elementos de  $U$ , a respeito de  $P$  será definido por uma transformação unívoca  $\theta$  que, a cada elemento  $i$  de  $P$  faça corresponder um elemento  $\theta(i) = a_i$  de  $U$ . É claro que o papel desempenhado pelo símbolo  $\theta$  será, neste caso, equivalente ao papel desempenhado pelo símbolo  $a$ ; todavia, para evitar confusões, convencionaremos escrever em tal caso  $\bar{a}_i$  em vez de  $a$ , para designar o agrupamento em questão; em virtude de tal convenção, o agrupamento  $\bar{a}_i$  distinguir-se-á, nitidamente, da função  $a_i$ : assim, por exemplo, as fórmulas  $\phi(\bar{a}_i)$  e  $\psi(a_i)$  sendo  $\phi$  e  $\psi$  símbolos de operadores, designarão coisas bem diversas — uma função composta do agrupamento  $\bar{a}_i$ , a primeira, e uma função composta de  $i$ , a segunda (1). Por outro la

---

(1) Convirá não perder de vista a distinção feita no § 11 entre *função* e *operador*, distinção que, transigindo com o uso, nem sempre tem sido respeitada neste trabalho.

do, designaremos por  $\{a_i\}$  o conjunto dos valores da função  $a_i$ , isto é, o subconjunto de  $U$  descrito pelo elemento variável  $a_i$  quando  $i$  percorre  $P$ .

Notemos agora que o conjunto  $P$  poderá ser, como conjunto de posições, substituído por um outro  $P^*$ , equivalente ao primeiro, desde que seja dada uma transformação biunívoca  $\sigma$  de  $P^*$  em  $P$ . Então, cada agrupamento de elementos de  $U$ , a respeito de  $P$  poderá traduzir-se, mediante o operador  $\sigma$ , num agrupamento dos mesmos elementos, a respeito de  $P^*$ : dá-se portanto uma mudança de sistema de referência análogo às mudanças de coordenadas nos espaços geométricos; e, ainda por analogia podemos conceber que cada agrupamento se conserva idêntico a si mesmo, em tais mudanças de conjuntos referenciais, do mesmo modo que cada ponto é invariante, a respeito das mudanças de coordenadas.

É nesta ordem de ideias que podemos supor os agrupamentos finitos sempre referidos a uma secção do conjunto dos números naturais - e, em tal hipótese - o termo "*sucessão*" (finita) aparece como talvez mais indicado para exprimir a ideia de "*agrupamento*". Mais geralmente, se admitirmos o princípio de Zermelo, o qual equivale a afirmar que *todo o conjunto é bem ordenável*, podemos supor cada agrupamento referido a uma classe de números ordinais - e ainda, em tal hipótese, o termo "*sucessão*" parece impor-se.

Posto isto, além das relações e dos operadores de grau finito até aqui considerados, podemos agora passar a considerar relações e operadores de grau infinito: relação  $\alpha$  de grau

$\aleph_0$  definida em  $U$ , será toda a lei que, a cada agrupamento de  $\aleph_0$  elementos de  $U$  (tomando para referencial o conjunto dos números naturais) faça corresponder um, e um só dos valores lógicos: verdadeiro, falso. Analogamente para as relações de grau  $\aleph_1$ , etc. É claro que toda a relação de grau infinito e de tipo 1, se reduz imediatamente a uma relação de grau finito e de tipo superior a 1; assim, por exemplo, a relação simétrica que consiste em afirmar a convergência de uma sucessão numerável de números racionais  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , e o operador numérico  $\lim$  que a tal sucessão faz corresponder um número determinada  $a = \lim a_n$  não são mais, no fundo, do que uma relação unitária de tipo 2 e um operador unitário do mesmo tipo.

Todavia, pode ser *cômoda* e até certo ponto *fecunda* (em virtude das analogias que daí resultam) a concepção de relações de grau infinito, pois que é esse um modo de evitar uma operação mental a que o nosso espírito não se adapta imediatamente, a consideração directa de tipos superiores a (1). Além disso, entra aqui em jogo uma das tendências do espírito humano - a tendência, denominada geralmente *platônica*, que consiste em atribuir aos objectos matemáticos uma existência independente da respectiva construção (o papel do matemático seria então *descobrir* e não *inventar*) e em admitir, portanto, como aplicáveis aos conjuntos infinitos os métodos combinatórios usados para os conjuntos finitos. Daqui, os conceitos *quase-combinatórios* expressão de Bernays) de conjunto, sucessão, etc. tal como se apre-

---

(1) É na intervenção de tipos superiores a 1 que consistem, parcialmente, as dificuldades conceptuais da Análise Funcional.

sentam correntemente em Análise e na teoria dos conjuntos; com efeito, uma vez admitido que, por exemplo, toda a sucessão numerável *preexiste* às definições que dela possam vir a ser dadas, nós poderemos sempre, ao falar de sucessões numeráveis em geral, abstrair completamente do modo como possam ser definidas, admitindo implicitamente a possibilidade *ideal* de que sejam construídas a partir dos respectivos termos, mencionados um por um.

Numa sua bela conferência sobre o platonismo em Matemática, Bernays (1) procurou mostrar que, enquanto um platonismo absoluto que postula a existência de uma realidade intelegível constituída por *todas* as entidades matemáticas, é insustentável por causa das antinomias que se ligam ao paradoxo de Russell - um platonismo restrito, invulnerável a respeito de tais antinomias pode considerar-se uma hipótese de trabalho cômoda e fecunda (2).

Formas deste platonismo atenuado são, por exemplo, as concepções sobre a totalidade dos números inteiros (infinito numerável actual), o princípio de Zermelo, etc. Todavia, numa reacção que *atê certo ponto* se deve considerar salutar, os intuitionistas brouwerianos pretendem eliminar da Matemática todo o resíduo de platonismo, ainda que atenuado - desenvolvendo assim

---

(1) Conferência feita a 18 de Junho de 1934 no ciclo das *Conferências internacionais das Ciências matemáticas* organizadas pela Universidade de Genebra; série consagrada à Lógica matemática. Veja-se BERNAYS (I)

(2) Convém recordar que o platonismo é uma forma daquela tendência, denominada *racionalista*, que parece coexistir em todo o homem com a tendência oposta, denominada *empirista*. Na Idade Média chamavam-se realismo e nominalismo.



as ideias de Kronecker sobre tal assunto. Em particular, o intuicionista não admite a totalidade dos números naturais. Ocorre no entanto perguntar se não será este empirismo extremo tão ilusório como a concepção do platonismo absoluto. Abstenho-me de aprofundar tal assunto. Não deixarei contudo de lembrar a conveniência que parece haver em conservar estas duas espécies de Matemática: a *Matemática existencial ou descritiva* e a *Matemática construtiva* (1). Abolir a primeira (se tal é possível) seria talvez pôr um entrave ao progresso desta ciência, obrigando-a a caminhar com maior segurança, mas também com maior lentidão, sobre as vias do intuicionismo. (2) Mas será também necessário não cair no excesso oposto - que será o de permanecer extasiado na contemplação das "harmoniosas linhas" do edifício matemático, esquecendo que esta ciência será sempre, no fim de contas, "*obra do homem e para o homem*" (3).

- 
- (1) Recordemos, a propósito, a distinção que tanto agradava a Klein, entre *Matemática de precisão* e *Matemática de aproximação*. Não se trata, porém exactamente, da distinção aqui assinalada.
- (2) O intuicionismo, considerado como meio para evitar as antinomias cantorianas, já foi comparado ao ponto de vista de um cirurgião, que para curar radicalmente uma unha encravada, resolve amputar a perna inteira (BARZIN (I)p.11). Com efeito, a maior parte da Análise, com as suas importantes aplicações à Técnica, não seria mais do que um montão de ruínas.
- (3) Em particular, deverá sempre tentar-se a substituição de uma definição implícita ou quantificada por uma definição recorrente. Mas não é nisto que, em última análise, consistem os problemas da Matemática? Não foi assim que nasceram a teoria das equações algébricas, a teoria das equações diferenciais e, finalmente, a Análise funcional?

47.— A DEFINIÇÃO PARA ALÉM DO NUMERÁVEL E AS IDEIAS DE LEIBNIZ SOBRE UMA LINGUA UNIVERSAL CIENTÍFICA.— Notemos agora que não sō para as funções de variável inteira se podem imaginar processos de definição recorrente. De um modo geral, para qualquer conjunto bem ordenado se podem estabelecer esquemas de recorrência, baseados no princípio geral da indução, enunciado no §41.

Para maior clareza, introduzamos uma convenção auxiliar: Se forem  $\phi$  um operador, definido numa dada classe  $U$  de números ordinais e  $k$  um destes números, representaremos por  $\phi_{[k]}$  o operador induzido por  $\phi$  na secção  $[k]$  (1).

Podemos então estabelecer o seguinte esquema de recorrência transfinita:

$$\phi(0) = a; \phi(k) \equiv \phi_x(\phi_{[k]}(x), k),$$

em que  $a$  representa um número dado, e  $\phi$  um operador (de tipo 2) já definido. É fácil ver que, em virtude do princípio geral de indução, existirá um e um sō operador  $\phi$ , que verifique as duas condições precedentes, operador que será definido em todo o conjunto fundamental  $U$  (2). (Notemos que já a propósito dos conceitos de relativização e de homomorfismo foi utilizado intuitivamente o método da recorrência transfinita).

Todavia, esta forma de recorrência diz respeito ape

(1) Sobre o significado dos termos "induzido" e "secção" vejam-se os §§ 11,41.

(2) O esquema aqui indicado coincide, à parte diferenças formais, com o que von NEUMANN apresenta em (I).

nas  $\bar{a}$  definição de operadores e, de nenhum modo,  $\bar{a}$  definição de elementos de  $U$ . A garantia dada pelo esquema anterior  $\bar{e}$  a seguinte: *qualquer que seja o modo como venham a ser introduzidos no vos números ordinais da classe  $U$ , o valor da função  $\phi(x)$  para esses números resultará automaticamente determinado.*

Ocorre, no entanto, indagar: Como definir ou construir cada um dos elementos de  $U$ ? Haverá elementos de  $U$  inacessíveis, isto  $\bar{e}$ , que não possam vir a ser definidos? O problema  $\bar{e}$  deveras delicado. Uma resposta negativa  $\bar{a}$  segunda pergunta provoca imediatamente as seguintes objecções: Como admitir em Matemática a existência de entidades que não se possam definir? Se não se podem definir, apontar, individualizar, por qualquer meio, porque não libertar a Matemática desses fantasmas? Todas estas perguntas têm sido feitas a seu tempo, por matemáticos de tendência empirista, entre os quais Borel.

A existência de números inacessíveis resultaria do seguinte facto: Um número não se poderá definir efectivamente senão com um número finito de palavras e símbolos; deste modo, atendendo a que: 1) uma língua científica não contém mais de um número finito  $N$  de sinais elementares; 2) o número das expressões com sentido que se podem construir tomando  $P$  destes sinais de cada vez (com ou sem repetição) não será nunca superior a  $N^P$ . — segue-se que o conjunto dos números *efectivamente definíveis*, terá a potência do numerável (1). Por outro lado

---

(1) É claro que para o cálculo do número  $N^P$  se admite que o sistema de escrita considerado  $\bar{e}$  de carácter exclusivamente unidimensional. Mas  $\bar{e}$  fácil ver que todo o sistema de escrita em que intervenham agrupamentos bidimensionais (determinantes, fracções, etc.) poderá reduzir-se a um do primeiro tipo.

sabe-se que o conjunto dos números de classe II tem uma potencia superior à do numerável (e analogamente para o conjunto das funções de inteiros ou de números reais). *Deste modo, seríamos levados a admitir a existência de números inacessíveis.*

Todavia, se o conjunto dos números de classe II, que se podem definir por meio de um número finito de palavras, tem a potência do numerável, existirá necessariamente um primeiro número da mesma classe que não se pode definir por tal processo; e contudo, dizendo que é "*o primeiro*" que não se pode definir com um número finito de palavras, ele resulta "*ipso facto*" definido com um número finito de palavras. Tal é o paradoxo de Richard, aplicado primitivamente aos números reais, com o processo de diagonal.

A primeira observação que este paradoxo sugere é que a palavra "*definir*" não corresponde um significado preciso, determinado, definitivo: trata-se de um conceito *natural* e, por isso mesmo, *sujeito a uma evolução no tempo*. No caso do paradoxo de Richard, a palavra aparece empregada com dois sentidos diversos, mais restrito a princípio do que no fim: *é-se levado intuitivamente a ampliar o significado inicial.*

Chamaremos *língua unívoca, científica ou exacta*, a todo o sistema de expressão constituído por um determinado conjunto (finito) de sinais elementares e por uma lei uniforme de agrupamento, tal que: 1) dada uma expressão qualquer, é sempre possível saber se ela tem ou não tem significado, não podendo verificar-se as duas hipóteses simultaneamente; 2) a uma mesma expressão não pode corresponder mais de um significado. As *lin*

guas comuns não satisfazem a estes requisitos: trata-se portanto de línguas plásticas, essencialmente dinâmicas, mesmo abstraíndo da evolução externa — reproduzindo na sua mutabilidade aquele fluir constante que caracteriza o mundo empírico. Uma língua exacta, embora rudimentar, é já o sistema de numeração árabe. Mas as línguas científicas, por excelência, são os chamados *formalismos* rigorosos, constituídos pelos símbolos e regras da Lógica matemática (adaptados, por exemplo, aos tipos finitos), com a adjunção dos sinais primitivos e dos axiomas de uma dada teoria. É fácil ver então que, em qualquer destes formalismos, o conjunto dos entes que se podem *definir logicamente* (§22) terá a potência do numerável. (1) Simplesmente — e é este o nervo da questão — todo o formalismo rigoroso poderá ser enriquecido com a adjunção de novos símbolos ou de novas convenções simbólicas, permitindo novas possibilidades de definição, com a intervenção de tipos superiores àqueles anteriormente usados. Por outro lado, não há nenhuma lei formalizável a que possam submeter-se todas as possíveis ampliações de um formalismo, o que significaria a possibilidade de um formalismo rigoroso definitivo.

Numa sua outra conferência, Bernays (2), depois de falar dos dois grupos de antinomias cantorianas — as que se reduzem ao paradoxo de Russelle as que se reduzem ao paradoxo de

---

(1) É preciso contudo não perder de vista que uma língua *absolutamente* exacta, rígida, não passa de uma aspiração jamais realizável. Em particular, uma língua exacta supõe certas condições *materiais*, que não são perfeitamente realizáveis: superfície plana indefinidamente prolongável, etc.

(2) BERNAYS (II).

Richard — chamou a atenção para a correspondência que se verifica entre estes dois grupos de antinomias e as duas seguintes concepções filosóficas: a de Platão sobre o mundo das ideias e a de Leibniz sobre uma língua científica universal. Do mesmo modo que o paradoxo de Russell exclui o platonismo absoluto, o paradoxo de Richard torna impossível a realização integral da aspiração de Leibniz (de que nasceu a Lógica matemática). Como nota Carnap, (1) *"tudo o que é matemático é formalizável; porém a Matemática não se esgota num único sistema, mas necessita de uma série infinita de línguas cada vez mais ricas"*

É precisamente a impossibilidade de fixar uma regra que baste para definir qualquer número de classe II ou que baste para definir qualquer número real (em particular um sistema universal de notações, como o da numeração árabe para os números inteiros, é, neste caso, impossível) que leva certos empiristas moderados, tipo Borel, a não admitir a totalidade dos números de classe II ou a totalidade dos números reais. Todavia, a admissão destas totalidades não conduz a nenhum paradoxo do grupo do paradoxo de Russell. Pelo contrário, é um paradoxo no gênero do de Burali-Forti que surge ao supor que os axiomas  $\bar{o}_1 - \bar{o}_4, \bar{o}_5, \bar{o}_6$  não podem ser simultaneamente verificados pois que tal equivale a admitir que a axiomática  $\bar{o}_1 - \bar{o}_4, \bar{o}_5, \sim \bar{o}_6$  admite uma solução máxima, isto é, que existe um conjunto bem ordenado numerável tal que qualquer outro nas mesmas condições é isomorfo a um subconjunto do primeiro.

---

(1) CARNAP (III).

A fim de precisar as ideias que acabo de expôr, vou indicar um modo de construir números transfinitos, mediante definições de altura finita. Introduzamos então, sucessivamente, as seguintes convenções:

1) *Potência de um operador unitário*  $\phi$ . Define-se imediatamente por indução finita  $\phi^0 = I; \phi^{(n+1)} = \phi^n \cdot \phi$

2) Chamaremos *limite de uma sucessão numerável* de números ordinais  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , e representaremos por  $\lim_n a_n$  o primeiro número ordinal que goze da propriedade de não ser anterior a nenhum dos termos da sucessão.

3) Representando por  $F_1$  a classe dos operadores unitários (unívocos) de tipo 1, por  $F_2$  a classe dos operadores que a cada operador pertencente a  $F_1$  fazem corresponder um operador pertencente a  $F_1$  e assim sucessivamente, o operador *lim* poderá ser prolongado a cada um destes conjuntos, tal como segue:

$$(\lim_n {}^1\phi_n)(x) \equiv \lim_n ({}^1\phi_n(x)) \text{ e de um modo geral}$$

$$(\lim_n {}^{p+1}\phi_n)({}^p\theta) \equiv \lim_n ({}^{p+1}\phi_n({}^p\theta))$$

em que  $p$ , na posição de índice superior esquerdo, indica que o operador correspondente pertence a  $F_p$ .

4) Finalmente, definiremos uma sucessão de operadores  ${}^2\gamma, {}^3\gamma, \dots, {}^p\gamma, \dots$ , tal como segue:

$${}^2\gamma({}^1\phi) \equiv \lim_n {}^1\phi^n; {}^{p+1}\gamma({}^p\phi) \equiv \lim_n {}^p\phi^n$$

Obtêm-se deste modo uma sucessão de processos de defini

nição de altura finita, englobáveis num processo único, mediante o operador  $\gamma$  de tipo transfinito. Para avaliar a potência deste processo bastará dar os seguintes exemplos (sem passar do tipo 2):

$$({}^2\gamma(\text{suc}))(0) = \omega; ({}^2\gamma(\text{suc}))(\omega) = 2\omega; ({}^2\gamma^2(\text{suc}))(0) = \omega^2$$

$$({}^2\gamma^3(\text{suc}))(0) = \omega^\omega; ({}^2\gamma^4(\text{suc}))(0) = \varepsilon \text{ (representando por } \varepsilon$$

o limite de sucessão  $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots$ ) etc. (1)

Podemos agora imaginar uma definição de altura transfinita, formalizável mediante novas convenções simbólicas: a definição do limite da sucessão

$$({}^2\gamma(\text{suc}))(0), ({}^3\gamma({}^2\gamma)(\text{suc}))(0), ((({}^4\gamma({}^3\gamma))({}^2\gamma))(\text{suc}))(0), \dots$$

Será este número efectivamente de altura transfinita, isto é, não será possível construí-lo por uma definição de altura finita? Eis uma questão a que não procuro responder. Entretanto, notarei que no artigo de Hilbert "Über das Unendliche" (2) pode ver-se uma possibilidade de, por métodos de recorrência, fazer corresponder a cada número ordinal  $k$ , já definido, uma função de inteiros de altura  $k$ . Neste trabalho, cujo objectivo principal é o de fornecer um esboço da resolução do problema do contínuo (que consiste em saber se a potência do contínuo coincide com o número cardinal  $\aleph_1$ ), Hilbert serve-se do esquema ge

---

(1) A existência de números transfinitos de altura finita sugere imediatamente o seguinte problema: *existirá um número de classe II, cuja altura seja precisamente igual a  $k$ ?*

(2) HILBERT (I).



ral indicado no §43 e procura mostrar como todo o número de classe II será atingível por processos de recorrência, mediante uma ampliação natural do formalismo.

Convém ainda notar que é sobre os factos acabados de expôr que se baseia a demonstração do notável teorema de Goedel (1) *segundo o qual é impossível atingir a demonstração da não contradição de um formalismo lógico-matemático, utilizando unicamente os meios oferecidos por este formalismo.* Em particular, tem-se que, ao contrário do que supunham os promotores da aritmetização da Análise, não é possível reconduzir a não contradição da teoria dos números reais (ou dos números de classe II) à não contradição da teoria dos números inteiros. Trata-se, portanto, de *graus diversos de idealização.*

Uma ideia tentadora seria a de eliminar da Matemática as definições de altura transfinita. Que interesse podem vir a ter semelhantes definições, não sô na prática, mas até no decurso de uma teoria? Porém, tal medida significaria de novo o regresso ao numerável — e é preciso atender a que, em tal hipótese, certas teorias, como por exemplo a teoria da medida de Lebesgue, seriam pura e simplesmente aniquiladas.

Antes de terminar este §, convirá notar que o anterior

---

(1) Na sua originalíssima demonstração, Goedel estabelece uma correspondência biunívoca entre as expressões do formalismo considerado e os números naturais mediante a decomposição destes em factores primos. Nestas condições, a *síntaxe* do formalismo, isto é, as constantes lógicas, os conceitos de definição, de demonstração, etc. aparecem sob a forma de funções e relações recorrentes.

processo de construção de números transfinitos se pode aplicar *mutatis mutandis*, à construção de funções de uma variável inteira (e portanto de números reais): bastará interpretar o símbolo *suc* como indicativo da *adição de uma unidade* e o símbolo *lim* como indicativo, por exemplo, da passagem de cada sucessão  $\phi_1(n), \phi_2(n), \dots, \phi_p(n), \dots$  à função  $\psi(n)$  tal que  $\psi(n) \equiv \phi_n(n) + 1$  (processo da diagonal).

Obteremos assim, em particular, uma formalização do conhecido processo intuitivo de formação de funções sucessivamente mais crescentes (1).

48.— O PRINCÍPIO DE ZERMELO.— Concentremos um pouco a atenção sobre o princípio de Zermelo, várias vezes aqui citado.

Seja  $F$  uma família qualquer de conjuntos não vazios, que podemos supor incluídos num sistema  $[U; \mathcal{P}]$ , como conjuntos de tipo 1. O princípio de Zermelo afirma simplesmente a existência de um operador unívoco  $\theta$  (operador de escolha) que, a cada conjunto  $X$  de tal família faz corresponder um elemento do mesmo conjunto; isto é; em símbolos  $\bigcap_F \bigcup_{\theta} [(X \in F) \rightarrow_{\theta} (X) \in X]$ . Uma demonstração finitista de tal princípio deveria efectuar-se segundo um, pelo menos, dos métodos seguintes: 1) por redução ao absurdo; 2) por via construtiva, isto é, indicando um modo de, para cada  $F$ , definir logicamente um tal operador  $\theta$  a partir das relações primitivas. É claro que uma restrição deverá, desde logo, ser imposta: o sistema  $[U; \mathcal{P}]$  deve ser indeformável.

---

(1) Veja-se, por exemplo, R. BAIRE (I), p. 24.

Ainda sobre a definição de números ordinais, veja-se CHURCH (I), KLEENE (I, II, III), TURING (I, II), CHURCH and KLEENE (I)

A escola polaca dedicou-se ao trabalho de estabelecer várias proposições equivalentes a este princípio. Todavia a possibilidade de uma demonstração geral de tal proposição parece excluída.

Tudo se passa como se este princípio admitisse a possibilidade de construir o operador  $\Theta$ , escolhendo, um por um, os pontos que tal operador faz corresponder aos diversos conjuntos, o que, no caso de  $F$  ser infinita, é manifestamente impossível. Contra tal interpretação reagem, porém, os zermelianos, entre os quais Fraenkel (1) que insiste sobre o carácter puramente *existencial* do referido princípio.

Entre as duas posições extremistas a respeito do princípio de Zermelo — empirismo e platonismo — parece-me que o mais razoável será o ponto de vista intermédio, adoptado por Sierpinski, que reconhece em tal princípio uma útil hipótese de trabalho, devendo todavia fazer-se o possível por estabelecer em cada caso, um processo construtivo de escolha. E nesta ordem de ideias serão sempre interessantes as investigações tendentes a determinar uma lei de escolha, aplicável a famílias de conjuntos tão extensas quanto possível; assim por exemplo, Guido Ascoli (2) conseguiu demonstrar o princípio de Zermelo (por um processo todavia não construtivo, no sentido intuicionista) para as famílias dos conjuntos fechados e dos conjuntos abertos, de um qualquer espaço métrico separável completo.

Não me parece, contudo, muito aconselhável a designação de "*axioma*" dada comumente a tal princípio: trata-se an-

---

(1) FRAENKEL (III).

(2) GUIDO ASCOLI (I).

tes de uma hipótese meta-matemática, como a *hipótese* de não-contradição da Aritmética, a hipótese do contínuo, etc.

Recordemos, por último, que uma das proposições equivalentes ao princípio de Zermelo é a da bem-ordenabilidade de qualquer conjunto. Por outro lado, resulta do teorema I enunciado no §41, que *todo o conjunto bem ordenado é indeformável*. Veremos assim transformado o problema posto no §: podemos nós afirmar que todo o elemento de um conjunto indeformável se pode expressar logicamente nas relações primitivas? Já vimos o estudo da questão para os números de classe II. Notemos no entanto que, intuitivamente, se tende para resposta afirmativa: se um elemento não é individualizável, e portanto discernível logicamente de certos outros elementos (como o número  $i$  é indiscernível do número  $-i$ , por meio das noções primitivas usuais) parece que deve existir um automorfismo do sistema que transforme esse elemento em qualquer dos outros. Tornaremos adiante a este assunto.

49.— CONDENSAÇÃO.— Além da *relativização*, já estudada no §34, um outro processo de formação de novos sistemas, a partir de sistemas dados, é aquele a que chamarei *condensação*.

Sejam  $[U;P]$  um conjunto organizado e  $C$  uma repartição de  $U$ . Introduzamos no conjunto  $C$  uma organização tal como segue: Se representarmos por  $\Phi$  aquela transformação unívoca de  $U$  em  $C$ , que faz corresponder a cada elemento  $x$  de  $U$  a célula da repartição a que  $x$  pertence, e se prolongarmos ao conjunto  $P$  o operador  $\Phi$  segundo o processo indicado no §32, tomaremos para

conjunto de relações primitivas sobre  $C$  o conjunto  $R$  das relações  $\Phi^*(\alpha)$  em que  $\alpha \in P$  e  $\Phi^*$  é o prolongamento de  $\Phi$  a  $P$  (1). Resultará assim definido um sistema  $[C; R]$  a partir do primeiro, e é fácil ver que não só a transformação  $\Phi$  é, por definição, um homomorfismo de  $[U; P]$  em  $[C; R]$  a respeito de  $\Phi^*$ , mas ainda:

**Teorema:** *Consideremos dois sistemas  $[U; P]$ ,  $[V; Q]$  tais que o segundo seja a imagem homomórfica do primeiro, por intermédio de uma transformação unívoca  $\theta$ , a respeito de uma transformação biunívoca  $\sigma$  de  $P$  em  $Q$ ; e seja  $C$  a repartição determinada em  $U$  por  $\theta$  (tomando para células as imagens completas inversas dos elementos de  $V$ ). Em tal caso, a transformação biunívoca  $\theta^*$  tal que  $\theta^* \cdot \Phi = \theta$  será um homomorfismo de  $[C; R]$  em  $[V; Q]$  a respeito da transformação biunívoca:  $\sigma^* = \sigma \cdot \Phi^{*-1}$  de  $R$  em  $Q$ .*

Este teorema pode ser completado com a seguinte propriedade: a organização  $R$  introduzida em  $C$  por condensação de  $P$  é a única que verifica a condição de todo o homomorfismo  $\theta$  de  $[U; P]$  num outro sistema  $[V; Q]$  se traduzir num homomorfismo biunívoco de  $[C; R]$  em  $[V; Q]$ , quando  $C$  é a repartição determinada em  $U$  por  $\theta$ .

Os anteriores resultados concretizam-se em numerosas proposições das teorias dos grupos, dos anéis, dos espaços topológicos, etc. Por outro lado, visto que a transformação  $\Phi$  a que nos referimos é um homomorfismo (e um homomorfismo de natureza particular, pois que se tem  $\Phi(\alpha) = \Phi^*(\alpha)$ , qualquer que se

---

(1) Para evitar fáceis confusões, represento aqui por  $\Phi^*$  o operador  $\Phi$  prolongado a  $P$ ; com efeito, não se trata do mesmo operador, visto que os domínios de existência são diversos (veja-se §11).

ja  $\alpha \in P$ ) poderá aplicar-se à condensação, *mutatis mutandis*, quanto foi dito para os homomorfismos.

Em particular, condição necessária e suficiente para que uma repartição  $H$  de um grupo  $G$  se torne, por condensação, um novo grupo, é que a família  $H$  seja constituída pelas classes resto de  $G$  em relação a um seu subgrupo invariante  $N$ ; e então  $H$  será precisamente o grupo cociente  $\frac{G}{N}$ .

Por outro lado, toda a repartição de um espaço topológico de Kuratowski será ainda, por condensação, um espaço topológico de Kuratowski. (1)

O conceito de condensação está intimamente relacionado com um outro conceito — uma relação de ordem parcial entre as organizações possíveis sobre um mesmo conjunto fundamental — conceito já posto em evidência para o caso das topologias. (2)

Abstenho-me todavia, por falta de tempo, de desenvolver aqui esta ideia.

---

(1) Veja-se por exemplo, ALEXANDROFF und HOPF (I) *Zerlegungsraum*, p.62. Poderá aí avaliar-se o interesse e o poder de síntese do conceito geral agora introduzido.

(2) Num meu trabalho inédito, estudo a comparação de topologias em espaços muito gerais. No meu trabalho "*Les ensembles fermés et le problème de Wiener*", aplico o mesmo conceito.

CAPÍTULO III. — ESTUDO DOS AUTOMORFISMOS E DOS ENDOMORFISMOS  
DE UM SISTEMA QUALQUER.

50.— CONJUNTOS UNIVOCAMENTE FECHADOS NUM SISTEMA.— BA  
SE LÓGICA DE UM CONJUNTO.— Consideremos um sistema  $[U; P]$  e um  
subconjunto  $V$  de  $U$ . Diremos que uma relação  $\alpha$  (de grau finito  
ou infinito) se pode *exprimir univocamente* em  $V$ , quando  $\alpha$  se po  
de exprimir logicamente nas relações  $P$  e nos elementos de  $V$ . Di  
remos ainda que o subconjunto  $V$  de  $U$  é *univocamente fechado nes*  
*te sistema*, quando todos os elementos de  $U$  que se podem expri -  
mir univocamente em  $V$  pertencem a este mesmo conjunto.

*Exemplos:* O conjunto dos números inteiros não é univo  
camente fechado no seio do conjunto dos números racionais, com  
as relações primitivas comuns. Pelo contrário, todo o plano será  
univocamente fechado no espaço euclideo ordinário.

Será fácil ver que, *qualquer que seja a família  $F$  de*  
*conjuntos univocamente fechados, a intersecção de tais conjun-*  
*tos será ainda univocamente fechada.* Em particular, a intersec  
ção  $K$  dos conjuntos univocamente fechados que contem um dado con  
junto  $A$  será o menor dos conjuntos que gozam de tal propriedade;  
diremos então que  $K$  é *logicamente gerado* por  $A$ , ou que  $A$  é uma  
*base lógica* de  $K$ .

Note-se que o conjunto vazio pode não ser univocamente  
fechado; é o que sucede, por exemplo a respeito do conjunto dos  
números reais ou do conjunto dos números complexos, tomando como

primitivos os conceitos de subtracção, divisão e desigualdade (entre módulos); o conjunto logicamente gerado pelo conjunto vazio coincide, no primeiro caso, com o conjunto fundamental, e no segundo caso, com o conjunto dos números reais.

Pelo contrário, nos espaços topológicos o conjunto vazio é univocamente fechado. De um modo geral, nos sistemas algébricos (grupos, anéis, corpos, etc.) o conjunto vazio não é univocamente fechado, o que equivale a dizer que em tais sistemas existem necessariamente elementos que permanecem fixos para todos os automorfismos. Em particular, se o conjunto fundamental admite como base lógica o conjunto vazio, tratar-se-á, manifestamente, de um sistema indeformável.

Dados um sistema  $[U; P]$ , um subconjunto  $V$  de  $U$  e um subconjunto  $W$  de  $V$ , chamaremos ainda *base lógica* de  $V$ , a respeito de  $W$ , a toda a família  $\{a_i\}$  de elementos de  $V$ , tal que todo o elemento de  $V$  se possa exprimir univocamente em  $W$  e nos elementos  $a_i$  (1). Diremos além disso que duas famílias  $\{a_i\}, \{b_i\}$  de elementos de  $U$ , constituem *bases lógicas equivalentes* a respeito de  $W$ , se os conjuntos logicamente gerados por cada uma destas famílias são idênticos entre si. Uma base lógica  $\{a_i\}$  de  $V$ , a respeito de  $W$ , dir-se-á *mínima*, se não for equivalente a nenhum seu subconjunto próprio; e, em tal caso, dir-se-á ainda que os elementos  $a_i$  são *logicamente independentes* a respeito de  $W$ .

---

(1) É claro que não será necessário supor, a respeito dos conjuntos  $V$  e  $W$ , que eles são univocamente fechados.



*Exemplo:* Uma base lógica mínima do conjunto dos números complexos a respeito do conjunto dos números reais (com os conceitos primitivos usuais) poderá ser constituída por qualquer número não real, em particular o número  $i$ .

É claro que nem sempre um conjunto  $V$  admitirá uma base lógica mínima a respeito de um seu subconjunto  $W$ , o que, evidentemente, só acontece quando  $V$  não admite uma base lógica finita a respeito de  $W$ . É também manifesto que, no caso geral, o conjunto  $V$  poderá admitir mais de uma base lógica mínima; por outro lado, duas bases mínimas não serão, necessariamente, formadas pelo mesmo número de elementos, como se pode verificar a respeito da teoria dos corpos.

NOTA.— Comecei por introduzir o conceito de base lógica de um conjunto  $V$ , sem referência a nenhum outro conjunto.

É fácil ver agora que se trata, precisamente, da base lógica de  $V$  a respeito do conjunto vazio. Este facto sugere uma convenção cômoda e sugestiva: diremos "*base lógica de  $V/W$* " em vez de "*base lógica de  $V$ , a respeito de  $W$* ". De resto, uma convenção simbólica análoga se pode encontrar na teoria dos corpos.

51.— **RELAÇÕES IRREDUTÍVEIS NUM CONJUNTO.**— Dados um sistema  $U$  e um subconjunto  $V$  de  $U$ , direi que uma relação  $\alpha(\bar{x}_i)$  de tipo 1 e de grau finito ou infinito, univocamente exprimível em  $V$ , é *irredutível* neste conjunto, quando, dada uma outra relação  $\beta(\bar{x}_i)$ , do mesmo grau e do mesmo tipo, univocamente exprimível em  $V$  e compatível com  $\alpha$  (isto é, que tenha pelo menos

uma solução comum) se tem necessariamente.

$$\alpha(\bar{x}_i) \subset \beta(\bar{x}_i) ;$$

isto é, toda a solução de  $\alpha$  será ainda uma solução de  $\beta$ .

Trata-se, manifestamente, da generalização do conceito de irreducibilidade de uma equação algébrica, a respeito de um corpo que contenha os seus coeficientes; generalização efectuada a partir da propriedade característica das equações irreducíveis, que entra em jogo constantemente nas demonstrações da teoria de Galois: *Dada uma equação algébrica  $f(x)=0$  irreducível num corpo  $K$  que contenha os seus coeficientes, qualquer outra equação  $g(x)=0$  de coeficientes em  $K$ , que tenha, pelo menos, uma solução comum com  $f(x)=0$ , admitirá todas as outras raízes desta equação.*

Sejam agora  $V$  um subconjunto de  $U$ ,  $W$  um subconjunto de  $V$  e  $\{a_i\}$  uma base lógica de  $V/W$ .

É fácil ver que existirá pelo menos uma relação univocamente exprimível em  $W$  e que admita  $\bar{a}_i$  como solução: a relação idêntica  $\bar{x}_i = \bar{x}_i$ . Posto isto, consideremos a conjunção de todas as relações  $\xi(x)$  que admitem  $\bar{a}_i$  como solução; isto é, consideremos a relação  $\rho(\bar{x}_i)$  tal que

$$(a) \quad \rho(\bar{x}_i) \equiv \bigcap_{\xi(\bar{a}_i)} \xi(\bar{x}_i)$$

ou, o que é equivalente,

$$(b) \quad \rho = \bigcap_{\eta} \{ \eta(\bar{a}_i) \cap [\zeta(\bar{a}_i) \rightarrow (\eta \subset \zeta)] \} ;$$

supondo, além disso, que as variáveis  $\xi, \eta, \zeta$  representam relações univocamente exprimíveis em  $W$ .

Podemos agora demonstrar por redução ao absurdo, que a relação  $\rho$  é irreduzível em  $W$ . Com efeito, supondo que existem pelo menos, uma solução  $\bar{b}_i$  de  $\rho$  e uma relação  $\alpha$ , univocamente exprimível em  $W$ , tais que  $\bar{b}_i$  seja solução de  $\alpha$ , mas  $\bar{a}_i$  não seja solução de  $\alpha$ , a relação  $\rho^*$  tal que  $\rho^*(\bar{x}_i) \equiv \rho(\bar{x}_i) \cap \sim(\alpha(\bar{x}_i))$  será ainda univocamente exprimível em  $W$ , admitirá a solução  $\bar{a}_i$  de  $\rho$ , e, contudo, não admitirá a solução  $\bar{b}_i$  da mesma relação, o que é manifestamente contrário a (b).

É preciso notar, porém, que tais raciocínios se apoiam sobre a hipótese de que a relação atrás definida é univocamente exprimível em  $W$ , o que, atendendo ao modo como foi introduzido este último conceito no § anterior, não se pode considerar evidente. Para manter a legitimidade das afirmações feitas, será portanto necessário alargar o significado da locução "*exprimir univocamente*", admitindo a existência, em qualquer caso, da intersecção de todos os conjuntos que gozam de uma dada propriedade. De resto, uma tal concessão de carácter quase combinatório é corrente em toda a Matemática não intuicionista. LUSIN por exemplo chama-lhe *princípio do mínimo*, a propósito do corpo de Borel. (1) Notemos, por outro lado, que também os teoremas de existência que se encontram nos fundamentos da Análise (máximo e mínimo das funções contínuas, continuidade uniforme, etc.) não são demonstrados construtivamente, como resulta da crítica intuicionista. A respeito da referida concessão, deverá manter-se, portanto, uma atitude análoga à que Sierpinski

---

(1) LUSIN (I).

aconselha para o princípio de Zermelo: admitir a existência no caso geral, como hipótese cômoda de trabalho; procurar demonstrações construtivas, em cada caso particular.

Uma vantagem se obtém, pelo menos, com tal atitude: não será preciso repetir constantemente a hipótese "suponhamos que existe a intersecção, etc." (1)

52.— TEOREMAS FUNDAMENTAIS.— Dado um conjunto organizado  $[U;P]$ , sejam  $V$  um subconjunto univocamente fechado de  $U$ ;  $W$  um subconjunto de  $V$ , e  $\{a_i\}$  uma base lógica de  $V/W$ . Seja, por outro lado,  $\rho(\bar{x}_i)$  a relação irreduzível em  $W$  que admite  $\bar{a}_i$  como solução. Podemos então estabelecer os seguintes resultados:

I) Os isomorfismos fortes (§36) que, deixando fixos todos os elementos de  $W$ , transformam  $V$  em subconjuntos  $V', V'', \dots$  de  $U$  são constituídos por aquelas transformações biunívocas  $\theta$  de  $U$  que fazem corresponder a cada elemento  $y = \phi(\bar{a}_i)$  de  $V$ , o elemento  $\theta(y) = \phi(\bar{b}_i)$ , em que  $\bar{b}_i$  designa uma solução qualquer de  $\rho(\bar{x}_i)$  determinada para cada  $\theta$ .

II) Se todas as soluções de  $\rho$  estão contidas em  $V$ , os isomorfismos fortes de  $V$  que deixam fixos os elementos de  $W$  transformam o conjunto  $V$  em si mesmo, isto é, reduzem-se aos automorfismos fortes de  $V$  que deixam fixos os elementos de  $W$ .

Demonstração do teorema I. Suponhamos, em primeiro lugar, que as relações  $P$  são todas de tipo 1. Seja então  $\theta$  um iso

---

(1) A questão poderá ainda ser estudada do ponto de vista da teoria dos tipos, o que não fiz por falta de tempo.

morfismo forte de  $V$  que deixe fixos todos os elementos de  $W$ ; como, por hipótese, a relação  $\rho$  é univocamente exprimível em  $W$ , ela será conservada por  $\theta$ , é portanto a solução  $\bar{a}_i$  de  $\rho$  será transformada numa outra solução  $b_i = \overline{\theta(a_i)}$  de  $\rho$ . Por outro lado, visto que  $\{a_i\}$  é uma base lógica de  $V/W$ , cada elemento  $y$  de  $V$  será susceptível da representação  $y = \phi(\bar{a}_i)$  em que  $\phi$  designa um operador unívoco que por ser univocamente exprimível em  $W$ , será também respeitado por  $\theta$ . Ter-se-á portanto  $\theta(y) = \phi(\theta(\bar{a}_i)) = \phi(\bar{b}_i)$ .

Reciprocamente, seja  $\theta$  uma transformação que faça corresponder a cada elemento  $y = \phi(\bar{a}_i)$  de  $V$  o elemento  $\theta(y) = \phi(\bar{b}_i)$ , em que  $\bar{b}_i$  designa uma solução de  $\rho$ . Vê-se imediatamente que  $\theta$  não só deixará fixos todos os elementos de  $W$ , mas será também uma transformação biunívoca de  $V$  em  $\theta(V)$  (1). Além disso, qualquer que seja a relação  $\alpha(y_1, y_2, \dots)$ , logicamente exprimível nas relações  $P$ , cada solução  $(c_1, c_2, \dots)$  de  $\alpha$  poderá ser posta sob a forma  $[\phi_1(a_i), \phi_2(\bar{a}_i), \dots]$  em que  $\phi_1, \phi_2, \dots$ , designam operadores unívocos e univocamente exprimíveis em  $W$ , o que mostra que a proposição  $\alpha[\phi_1(\bar{a}_i), \phi_2(\bar{a}_i), \dots]$ , é verdadeira, e que, portanto, se fizermos  $\alpha^*(\bar{x}_i) \equiv \alpha[\phi_1(\bar{x}_i), \phi_2(\bar{x}_i), \dots]$ , a relação  $\alpha^*(\bar{x}_i)$  assim definida, univocamente exprimível em  $W$ , admite a solução  $\bar{a}_i$  de  $\rho(\bar{x}_i)$ . Mas, por hipótese, a relação  $\rho$  é irreduzível em  $W$ , logo, a solução  $\bar{b}_i$  de  $\rho$  será também uma solução de

---

(1) É preciso notar porém que, não sendo o operador  $\rho$  univocamente determinado para cada  $y$ , parece haver aqui uma intervenção do princípio de Zermelo. Uma análise mais profunda mostrará que tal não sucede porém.

$\alpha^*(\bar{x}_i)$ , isto é, a proposição  $\alpha[\phi_1(\bar{b}_i), \phi_2(\bar{b}_i), \dots]$ , ou o que é o mesmo, a proposição  $\alpha[\theta(c_1), \theta(c_2), \dots]$ , será verdadeira. Tem-se portanto:

$$\alpha(y_1, y_2, \dots) \subset \alpha[\theta(y_1), \theta(y_2), \dots]$$

e analogamente

$$\alpha[\theta(y_1), \theta(y_2), \dots] \subset \alpha(y_1, y_2, \dots)$$

para toda a relação  $\alpha$  univocamente exprimível em  $W$ , e relativizada a  $V$ ; o que significa que  $\theta$  é um isomorfismo forte de  $V$ .

No caso de algumas relações  $P$  serem de tipo superior a 1, bastará efectuar previamente uma mudança de conjunto fundamental que reduza todas as relações primitivas ao tipo 1. É fácil vêr que os isomorfismos fortes de  $V$ , antes e depois da mudança, serão os mesmos, à parte a linguagem.

**DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA II.** Seja  $\bar{b}_i$  uma solução qualquer de  $\rho_i$ ; tem-se, por hipótese,  $\{b_i\} \subset V$ , donde, representando por  $\theta$  o isomorfismo de  $V$  que resulta de substituir  $\bar{a}_i$  por  $\bar{b}_i$ :  $\theta(V) \subset V$ . Trata-se então de demonstrar que se tem reciprocamente,  $V \subset \theta(V)$  e portanto  $V = \theta(V)$ .

Visto que  $\{b_i\} \subset V$  e que  $\{a_i\}$  é uma base lógica de  $V/W$  existirá um operador  $\bar{\phi}$ , unívoco, múltiplo (§14) e univocamente exprimível em  $W$ , tal que  $\bar{b}_i = \bar{\phi}(\bar{a}_i)$ .

Ponhamos então

$$\alpha(x_i) \equiv \bigcup_{\bar{y}_i} \{[\bar{x}_i = \bar{\phi}(\bar{y}_i)] \cap \rho(\bar{y}_i)\}.$$

Imediatamente se vê que a relação  $\alpha$  é univocamente expressível em  $W$  e que, além disso, admite a solução  $\bar{b}_i$  de  $\rho$ . Mas a relação  $\rho$  é por hipótese irreduzível em  $W$ ; logo,  $\bar{a}_i$  será também uma solução de  $\alpha$ , o que, atendendo ao modo como foi definida a relação, significa que existe uma solução  $\bar{c}_i$  de  $\rho$  tal que  $\bar{a}_i = \bar{\phi}(\bar{c}_i)$ . Mas, ainda por hipótese, a família  $\{c_i\}$  está contida em  $V$ , donde se conclue, atendendo novamente a que  $\{a_i\}$  é uma base lógica de  $V/W$ , que existe um operador  $\bar{\psi}$  unívoco, múltiplo, e univocamente expressível em  $W$ , tal que  $\bar{c}_i = \bar{\psi}(\bar{x}_i)$  donde  $\bar{c}_i = \bar{\psi}[\bar{\phi}(c_i)]$  (recordando que  $\bar{a}_i = \bar{\phi}(c_i)$ ).

Então, se fizermos

$$\beta(\bar{x}_i) = \{x_i = \bar{\psi}[\bar{\phi}(x_i)]\}$$

vê-se que a relação  $\beta$ , univocamente expressível em  $W$ , admite a solução  $\bar{c}_i$  de  $\rho$ , o que, por ser  $\rho$  irreduzível em  $W$ , implica que  $\beta$  admitirá também a solução  $\bar{a}_i$ ; isto é, ter-se-á:  $\bar{a}_i = \bar{\psi}[\bar{\phi}(\bar{a}_i)]$  ou ainda  $\bar{a}_i = \bar{\psi}(\bar{b}_i)$ .

Visto que  $\{a_i\}$  é uma base lógica de  $V/W$ , cada elemento  $k$  de  $V$  será susceptível da representação  $k = \chi(\bar{a}_i)$ , em que  $\chi$  designa um operador unívoco e univocamente expressível em  $W$ ; então, atendendo ao último resultado, ter-se-á  $k = \chi[\bar{\psi}(\bar{b}_i)]$  ou, abreviadamente  $k = \chi^*(\bar{b}_i)$  sendo ainda  $\chi^*$ , como é fácil ver, um operador unívoco e univocamente expressível em  $W$ . E, como  $k$  é arbitrário, tem-se que  $\{b_i\}$  é ainda uma base lógica de  $V/W$ , o que significa que  $\theta(V) = V$ , q.e.d.

53.— CONJUNTOS NORMAIS; GRUPO DE GALOIS DE UM CONJUNTO NORMAL.— Vimos no §38 que: 1) o produto de dois automorfismos é ainda um automorfismo; 2) a transformação inversa de um automorfismo é ainda um automorfismo. Tal significa, como se sabe, que a família dos automorfismos de um sistema constitui um grupo a respeito da multiplicação que no §13 foi definida entre operadores. Analogamente, será fácil ver que a família dos automorfismos fortes de um conjunto univocamente fechado  $V$ , que deixam fixos os elementos de um seu conjunto  $W$ , será ainda um grupo a respeito da mesma operação.

Posto isto, dados um sistema  $[U; \mathcal{P}]$ , um subconjunto  $V$  de  $U$ , univocamente fechado, e um subconjunto  $W$  de  $V$ , diremos que o conjunto  $V$  é *normal* a respeito do conjunto  $W$ , se existe pelo menos, uma base lógica  $\{a_i\}$  de  $V/W$ , tal que todas as soluções da relação irredutível  $\rho(x)$  que admite  $\bar{a}_i$  como solução pertençam a  $V$ . Chamaremos então *grupo de Galois* do conjunto normal  $V$  a respeito do seu subconjunto  $W$ , ao grupo dos automorfismos fortes de  $V$ , que deixam fixos os elementos de  $W$ . Finalmente, dada uma base lógica  $\{a_i\}$  de  $V/W$ , e uma relação  $\rho$  irredutível em  $W$  que admite  $\bar{a}_i$  como solução, diremos que  $\rho$  é uma *resolvente de Galois* de  $V$  a respeito de  $W$ , ou simplesmente de  $V/W$ .

As razões da terminologia agora introduzida parecem-me bastante manifestas, para que não seja necessário indicá-las.

Podemos ainda estabelecer os seguintes resultados:



III) Se  $V$  é normal a respeito de  $W$ , e  $\rho^*$  é uma relação irreduzível que admite uma solução em  $V$ , todas as soluções de  $\rho^*$  pertencerão a  $V$ .

IV) O conjunto logicamente gerado pelo conjunto vazio é normal a respeito do conjunto vazio.

V) Dada uma família  $F$ , qualquer, de conjuntos normais a respeito de  $W$ , a intersecção dos conjuntos de tal família será ainda um conjunto normal, a respeito de  $W$ .

A demonstração destes teoremas não oferece qualquer dificuldade.

Chamaremos simplesmente *conjunto normal* a todo o conjunto normal a respeito do conjunto vazio. Notemos que em todo o sistema  $[U;P]$  existe um conjunto normal *máximo*: o conjunto fundamental  $U$ ; e um conjunto normal *mínimo*: o conjunto logicamente gerado pelo conjunto vazio. Em particular, nas considerações anteriores, podemos supor  $V=U$  e  $W=0$ . Vê-se então que, se for  $\{a_i\}$  uma base lógica de  $U$ , e  $\rho$  uma relação irreduzível (em  $\theta$ ) que admita  $\bar{a}_i$  como solução, os automorfismos de  $[U;P]$  serão dados pelas substituições de  $\bar{a}_i$  pelas diversas soluções  $\bar{a}_i, \bar{b}_i$ , de  $\rho$ .

54.— UNIVOCIDADE NO SENTIDO RESTRITO.— Suponhamos agora que todas as relações primitivas do sistema  $[U;P]$  são dadas sob a forma de operadores unívocos de tipo 1, de grau finito ou infinito. Dado então um subconjunto  $V$  de  $U$ , diremos que um elemento  $x$  de  $U$  se *exprime operatoriamente* em  $V$ , quando se pos

sa obter a partir dos elementos de  $V$ , mediante um número finito de aplicações sucessivas dos operadores primitivos. Diremos que um operador  $\bar{e}$  *operatoriamente exprimível* em  $V$ , quando se possa obter, a partir dos operadores  $P$  e dos elementos de  $V$ , mediante um número sucessivo de aplicações sucessivas, das operações seguintes; 1) sobreposição de operadores; 2) substituição de um ou mais argumentos dos operadores por elementos de  $V$ . Finalmente, diremos que uma relação  $\bar{e}$  *operatoriamente exprimível* em  $V$  quando se possa obter, ligando pelo sinal = duas funções operatoriamente exprimíveis em  $V$ . (1)

Posto isto, o subconjunto  $V$  de  $U$  dir-se-á *operatoriamente fechado* se todos os elementos de  $V$  que se podem exprimir operatoriamente em  $V$  pertencem ainda a este conjunto. Analogamente, se introduzirã a noção de *base operatoria* de  $V$  a respeito de um seu conjunto  $W$ . Em particular, o conjunto vazio será sempre operatoriamente fechado.

As locuções "*exprimir operatoriamente no conjunto vazio*" e "*exprimir operatoriamente nos conceitos primitivos*" serão consideradas equivalentes.

*Exemplo:* Se o sistema  $[U]$  fôr um corpo e as operações

---

(1) Convém salientar que o conceito de "*exprimir operatoriamente*" corresponde ã mais rigorosa acepção de "*exprimir construtivamente*", pois que nem sequer a recorrência aqui intervêm.

consideradas primitivas, forem a subtracção e a divisão (1), é fácil vêr que: a) as funções operatorialmente exprimíveis num dado conjunto  $V$  serão as funções racionais de coeficientes em  $V$ ; b) as relações operatorialmente exprimíveis em  $V$ , serão as equações algébricas de coeficientes em  $V$ ; c) os conjuntos operatorialmente fechados serão os subcorpos de  $[U]$ ; d) o conjunto operatorialmente gerado pela unidade é o sub-corpo fundamental de  $U$ , o qual como se sabe, ou é isomorfo ao corpo racional (e então  $[U]$  terá característica 0) ou é isomorfo ao corpo das classes-resto em relação a um modulo primo  $p$  (e então o corpo será de característica  $p$ ).

Uma relação  $\alpha(\bar{x}_i)$  dir-se-á *irreductível no sentido restrito* a respeito do subconjunto  $V$  de  $U$ , quando: 1)  $\alpha$  é operatorialmente exprimível em  $V$ ; 2) dada uma outra relação  $\beta(x_i)$  do mesmo grau, operatorialmente exprimível em  $V$  e compatível com  $\alpha$ , ter-se-á, necessariamente  $\alpha < \beta$ , isto é, todas as soluções de  $\alpha$  serão ainda soluções de  $\beta$ .

Porém, dado um subconjunto  $V$  de  $U$ , e uma base operatorial  $\{a_i\}$  de  $V$ , a respeito de um seu subconjunto  $W$ , já não poderemos afirmar que existe necessariamente uma relação  $\rho(\bar{x}_i)$ , irreductível em  $W$  no sentido restrito e que admite  $\bar{a}_i$  como solução.

---

(1) Um facto interessante é este de se poder exprimir operatorialmente a soma e o produto na diferença e no cociente, e de não se poder efectuar, operatorialmente, a definição inversa, a qual exige, manifestamente, o emprego do quantificador de existência. É este facto que permite apresentar sucintamente, em termos de diferença, e de cociente, a condição necessária e suficiente para que um subconjunto de um corpo seja, por relativização, ainda um corpo.

Para que tal suceda será necessário (e suficiente) que a conjunção de todas as relações, operatorialmente exprimíveis em  $W$ , que admitem  $\bar{a}_i$  como solução, seja ainda uma relação operatorialmente exprimível em  $W$ . É isto o que se verifica, sistematicamente, a respeito dos corpos, quando a base é constituída por um só elemento  $e$ , como se sabe, é sempre possível escolher uma tal base, quando  $V$  é uma extensão algébrica separável de  $W$  (1).

Posto isto, é fácil vêr agora que, substituindo o conceito de "*exprimir univocamente*" pelo conceito de "*exprimir operatorialmente*", o teorema I (§ 52) conservará toda a sua validade, enquanto o teorema II deverá ser completado com a restrição de que a relação  $\rho$  admita apenas um número finito de soluções (2). Todas as considerações ulteriores serão pois aplicáveis a este caso, tendo em conta as limitações introduzidas. E, deste modo, se reencontram, no caso dos corpos, as proposições da teoria de Galois, que se trata agora de generalizar a sistemas quaisquer, segundo os dois pontos de vista; restrito (construtivo) e lato (descritivo).

Um problema interessante a resolver é o seguinte:

É evidente que o grupo dos automorfismos *fortes* de um conjunto normal  $V$ , a respeito de um seu subconjunto  $W$ , está contido no grupo dos automorfismos *fracos* de  $V$ , a respeito de  $W$ .

*Poderá afirmar-se, em geral, que os dois grupos coincidem?*

Pois bem: a resposta, no caso da univocidade restrita

---

(1) Veja-se, por exemplo, VAN DER WAERDEN (I).

(2) Abstenho-me de fazer aqui as respectivas demonstrações, que não apresentam dificuldades.

*é afirmativa, se atendermos a que  $V$  é um conjunto restritamente fechado e ao que foi dito nos §§ 34 , 35, a respeito das funções lógicas conservadas por relativização.*

A importância deste resultado é manifesta.

55.— DETERMINAÇÃO DAS BASES LÓGICAS.— POSSIBILIDADES DE EXPRESSAR UMA RELAÇÃO NOS CONCEITOS PRIMITIVOS.— Coloquemo-nos de novo no ponto de vista inicial. Sejam, pois,  $W$  e  $V$  dois subconjuntos, ambos univocamente fechados, de um sistema  $[U]$ , tais que  $W \subset V$ . Ter-se-ã então:

VII) *Condição necessária e suficiente para que um elemento  $k$  de  $V$  pertença a  $W$  é que todos os isomorfismos fortes de  $V$  que deixam fixos os elementos de  $W$ , deixem também fixo o elemento  $k$ .*

VIII) *Condição necessária e suficiente para que um subconjunto  $\{a_i\}$  de  $V$  constitua uma base lógica de  $V/W$ , é que o conjunto  $\{a_i\}$  seja deformado (1) por todos os isomorfismos fortes de  $V$ , distintos da identidade, que deixam fixos os elementos de  $W$ .*

DEM. DO TEOREMA VII.— Que a condição é necessária, é evidente. Demonstremos então que ela é suficiente.

Sejam  $\{a_i\}$  uma base lógica de  $V/W$ ,  $\rho(\bar{x}_i)$  a relação irreduzível que admite  $\bar{a}_i$  como solução, e  $k$  um elemento de  $V$ . Ter-se-ã:  $k = \phi(\bar{a}_i)$ , sendo  $\phi$  um operador unívoco e univocamente

---

(1) Dizemos, naturalmente, que um conjunto  $A$  é deformado pela transformação  $\theta$  quando um, pelo menos, dos seus elementos é mudado por  $\theta$ .

expressível em  $W$ . Segundo o teorema I, os elementos em que  $\bar{e}$  transformado  $k$  pelos isomorfismos fortes de  $V$  que deixam fixos os elementos de  $W$ , serão todos os elementos,  $\phi(\bar{a}_i)$ ,  $\phi(\bar{b}_i)$ ,  $\phi(\bar{c}_i)$ , ..., em que  $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i, \dots$  designam as diversas soluções de  $\rho$ . Mas, por outro lado, tais elementos serão as soluções da relação  $\alpha$  tal que

$$\alpha(y) \equiv \bigcup_{\bar{x}_i} \{ [y = \phi(\bar{x}_i)] \cap \rho(\bar{x}_i) \} ,$$

relação univocamente expressível em  $W$ . Então, se  $k$  permanece fixo para todos os referidos isomorfismos, isto é, se todos os elementos  $\phi(\bar{a}_i)$ ,  $\phi(\bar{b}_i)$ , ... coincidem entre si, tal significa que a relação  $\alpha$  admite  $k$  como única solução, isto é, ter-se-á  $k = {}_1y \alpha(y)$ , donde se conclui que  $k$  é univocamente expressível em  $W$  e que, portanto, visto ser  $W$  univocamente fechado por hipótese,  $k$  pertence a  $W$ , q.e.d.

DEM. DO TEOREMA VIII. Ainda neste caso, bastará demonstrar que a condição é suficiente. Fã-lo-emos por redução ao absurdo (1).

Seja então  $\{a_i\}$  uma família de elementos de  $V$  tal que o único isomorfismo forte de  $V$ , que deixa fixos todos os elementos de  $W$  e todos os elementos  $a_i$  seja a identidade. Seja por outro lado  $V$  o conjunto logicamente gerado pelos conjuntos  $\{a_i\} \in W$ ; a família  $\{a_i\}$  será deste modo uma base lógica do conjunto uni

---

(1) A demonstração poderia igualmente ser feita por outro método. É apenas por comodidade que adopto o método de redução ao absurdo.

vocamente fechado  $V^*$ , a respeito de  $W$ . Tem-se por outro lado que  $V^*$  está contido em  $W$ , visto que  $V$  é univocamente fechado e que  $\{a_i\} \subset V$ . Resta portanto demonstrar que  $V \subset V^*$ .

Suponhamos então que esta última condição se não verifica e sejam:  $\{k_i\}$  uma base lógica de  $V/V^*$ ;  $\rho^*(\bar{x}_i)$  a relação irreduzível em  $V^*$  que admite  $\bar{k}_i$  como solução. É claro que  $\rho^*$  admitirá mais de uma solução, de contrário ter-se-á  $\{k_i\} \subset V^*$  e portanto  $V = V^*$ . Mas o facto de  $\rho^*$  admitir mais de uma solução, significa justamente que existem isomorfismos fortes de  $V$ , distintos da identidade, que deixam fixos todos os elementos de  $V^*$  e portanto todos os elementos de  $\{a_i\}$ , o que é contra a hipótese.

O absurdo resulta de supôr que a condição  $V \subset V^*$  se não verifica. Ter-se-á portanto  $V = V^*$ , q.e.d.

Do teorema VII deduz-se a seguinte importante consequência:

IX) Seja  $P$  um conjunto qualquer de relações sobre o conjunto fundamental  $U$ . Condição necessária e suficiente para que uma relação sobre  $U$  seja univocamente exprimível nas relações  $P$ , é que tal relação seja conservada por todos os automorfismos do sistema  $[U; P]$ .

A demonstração deste resultado far-se-á sem qualquer dificuldade, imaginando convenientes mudanças do conjunto fundamental e atendendo ao teorema VII.

Convém salientar que a proposição IX costuma ser admi

tida *intuitivamente* em tratados de Topologia, Álgebra, etc. Assim por exemplo, diz-se que "a Topologia consiste no estudo das propriedades de um espaço que se conservam por homeomorfismo (isomorfismo topológico)" e acrescenta-se vagamente que "tais propriedades são todas aquelas que se podem exprimir logicamente no conceito primitivo de fecho (ou derivado, ou interior, etc.)"

Vê-se agora que a locução "exprimir logicamente" deve aqui ser tomada naquela acepção quâsi-combinatória que no § 51 foi dada à locução "exprimir univocamente".

Em particular, obtêm-se uma resposta ao problema posto no § 27:

*Um sistema será indeformável, se, e só se, todos os seus elementos forem univocamente exprimíveis nas relações primitivas.*

É preciso não perder de vista, porém, que se trata aqui de um critério puramente existencial, uma vez que, tacitamente, se admite a existência da intersecção de qualquer infinidade de conjuntos, abstraindo dos meios de determinar, efectivamente, tal intersecção.

56.— OS GRUPOS DE GALOIS E AS SUCESSÕES MONÓTONAS DE CONJUNTOS NORMAIS.— Entre a estrutura de um sistema e a estrutura do seu grupo de automorfismos, existe uma interdependência, ao mesmo tempo simples e profunda, que é posta em relevo pelo seguinte complexo de teoremas:

*Dado um sistema  $[U; \mathcal{P}]$  sejam:  $U^*$  um subconjunto normal*



de  $U$  ;  $V$  um subconjunto univocamente fechado de  $U^*$ , e  $W$  um subconjunto qualquer de  $V$ . Sejam, por outro lado:  $\{a_i^*\}$  uma base l6gica de  $U^*/W$ ,  $\{a_i\}$  uma base l6gica de  $V/W$ . Ent6o:

X) Se  $\rho^*$  e  $\rho$  forem as rela76es irredut6veis em  $W$  que admitem como solu76es, respectivamente,  $\bar{a}_i^*$  e  $\bar{a}_i$  e se for  $\bar{\phi}$  um dos operadores un6vocos e univocamente exprim6veis em  $W$ , tais que  $\bar{a}_i = \bar{\phi}(a_i^*)$  ter-se-6

$$\rho(\bar{y}_i) = \bigcup_{\bar{x}_i} \{ [\bar{y}_i = \bar{\phi}(\bar{x}_i)] \cap \rho^*(\bar{x}_i) \}$$

XI) A rela76o  $\mu$  tal que  $\mu(\bar{x}_i) \equiv [\bar{x}_i = \bar{\phi}(\bar{x}_i)]$  6 uma resolvente de Galois de  $U^*$  a respeito de  $V$ .

XII) Se forem  $G, H, K$ , respectivamente, os grupos de automorfismos de  $U^*/W, U^*/V, V/W$ , uma condi76o necess6ria e suficiente para que  $V$  seja normal a respeito de  $W$  6 que o grupo  $H$  seja invariante em  $G$ ; e se esta condi76o 6 verificada, ter-se-6 ainda  $K=G/H$ .

DEM. DO TEOR. X. Ponhamos

$$\rho'(\bar{y}_i) \equiv \bigcup_{\bar{x}_i} \{ [\bar{y}_i = \bar{\phi}(\bar{x}_i)] \cap \rho^*(\bar{x}_i) \}$$

Trata-se de provar que  $\rho=\rho'$ . Para isto notemos, em primeiro lugar, que  $\rho'$  6 univocamente exprim6vel em  $W$ , e admite a solu76o  $\bar{a}_i$  de  $\rho$ , donde resulta que  $\rho'$  admitir6 todas as solu76es de  $\rho$ . Reciprocamente, toda a solu76o de  $\rho$  ser6 tamb6m uma solu76o de  $\rho'$  pois que, de contr6rio, a rela76o  $\rho''$  tal que

$$\rho''(\bar{x}_i) \equiv \bigcup_{\bar{y}_i} \{ \rho(\bar{y}_i) \cap [y_i = \bar{\phi}(\bar{x}_i)] \}$$

sendo univocamente exprimível em  $W$ , e admitindo a solução  $\bar{a}_i^*$ , não admitiria contudo todas as soluções de  $\rho^*$ , o que é contra a hipótese de ser esta relação irreduzível em  $W$ . Tem-se, pois, como se pretendia provar,  $\rho = \rho'$ .

DEM. DO TEOR. XI. — Bastará notar que  $\mu$  é univocamente exprimível em  $V$  e que todos os automorfismos de  $U$  a respeito de  $V$ , se obtêm substituindo  $\bar{a}_i^*$  sucessivamente por cada uma das soluções  $\bar{a}_i^*$ ,  $\bar{b}_i^*$ , ... de  $\sigma$ .

DEM. DO TEOR. XII. — Demonstremos que a condição enunciada é suficiente. Seja então  $\bar{b}_i$  uma qualquer solução de  $\rho$ : trata-se de provar que  $\{b_i\} \subset V$ . Ora  $H$  é, por hipótese, um subgrupo invariante de  $G$ ; donde resulta que todos os elementos  $b_i$  permanecem fixos para as transformações de  $H$  (1); além disso  $H$  é o grupo de Galois de  $U/V$ ; logo, segundo o teorema VII (§ 55), todos os elementos  $b_i$  pertencerão a  $V$ , q.e.d.

Suponhamos agora que o conjunto  $V$  é normal a respeito de  $W$ , e seja  $\theta$  um automorfismo de  $U^*/W$  que transforma  $\bar{a}_i^*$  em  $\bar{b}_i^*$ . Então, se fôr  $\bar{b}_i$  o agrupamento em que se transforma  $\bar{a}_i$ , e  $\bar{\phi}$  um dos operadores unívocos e univocamente exprimíveis em  $W$ , tais que  $\bar{a}_i = \phi(\bar{a}_i^*)$  ter-se-á ainda (1º teorema fundamental)  $\bar{b}_i = \bar{\phi}(\bar{b}_i^*)$ . Por outro lado, visto que  $V$  é, por hipótese, normal a respeito

---

(1) As transformações que deixam fixos os elementos  $b_i$  são, manifestamente todas as transformações de forma  $\theta\sigma\theta^{-1}$  com  $\sigma \in H$ .

de  $W$ , existirá um outro operador  $\bar{\chi}$  unívoco e univocamente exprimível em  $W$  tal que  $\bar{b}_i = \bar{\chi}(\bar{a}_i)$  donde, atendendo às igualdades anteriores

$$\bar{\phi}(\bar{\psi}(\bar{a}_i^*)) = \bar{\chi}(\bar{\phi}(\bar{a}_i^*)) ,$$

representando por  $\bar{\psi}$  um dos operadores unívocos e univocamente exprimíveis em  $W$  que transformam  $\bar{a}_i^*$  em  $\bar{b}_i^*$ . Mas a relação  $\alpha$  tal que

$$\alpha(\bar{x}_i) \equiv [\bar{\phi}(\bar{\psi}(\bar{x}_i)) = \bar{\chi}(\bar{\phi}(\bar{x}_i))]$$

é univocamente exprimível em  $W$  e admite a solução  $\bar{a}_i^*$  de  $\bar{\rho}^*$ : logo admitirá todas as soluções de  $\rho^*$  o que significa, em particular, que todas as soluções  $\bar{x}_i$  de  $\rho^*$ , tais que  $\bar{\phi}(\bar{x}_i) = \bar{a}_i$  são transformadas biunivocamente por  $\theta$  nas soluções  $\bar{y}_i$  de  $\rho^*$ , tais que  $\bar{\phi}(\bar{y}_i) = \bar{b}_i$ . Segue-se imediatamente que  $\theta H \theta^{-1} = H$  e, como  $\theta$  é uma transformação arbitrária de  $G$ , tem-se, finalmente, que o grupo  $H$  é invariante em  $G$ , q.e.d.

Vê-se agora facilmente que, segundo a última parte do teorema, se terá  $K=G/H$ , desde que  $V$  seja normal a respeito de  $W$ .

Consideremos então uma qualquer sucessão (1) monótona

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_i \subset \dots \subset V_k = U$$

de subconjuntos de  $U$ , cada um dos quais a partir do segundo seja normal a respeito do precedente, sendo o primeiro o conjunto normal gerado pelo conjunto vazio, e o último o conjunto fundamental  $U$ . Em virtude do estabelecido, corresponder-lhe-á uma

---

(1) O termo "sucessão" é aqui usado na mais larga acepção; isto é, o conjunto de posições poderá ser constituído por qualquer classe de números ordinais.

sucessão  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i$ , de relações, cada uma das quais  $\rho_i$  será a resolvente de Galois de  $V_i/V_{i-1}$ ; e uma sucessão monótona

$$G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_i \supset \dots \supset G_k = I$$

de grupos cada um dos quais  $G_i$  é, para  $i > 0$ , invariante no precedente, e constitui o grupo de Galois de  $U/V_i$ , sendo o último constituído unicamente pela identidade, e sendo  $G_i/G_{i+1}$  o grupo de Galois de  $V_{i+1}/V_i$  ligado à relação irredutível  $\rho_{i+1}$ , segundo o critério fornecido pelo teorema fundamental. As sucessões anteriores correspondem, portanto, ao conhecido processo das reduções do grupo de Galois por adjunções sucessivas.

Ocorre agora perguntar: Será também verdadeira a recíproca? Isto é, dado um conjunto normal  $V$ , a respeito de um seu subconjunto  $W$ , e um subgrupo  $H$  de grupo de Galois de  $V/W$ , existirão um subconjunto  $V^*$  de  $V$  tal que o grupo de Galois de  $V/V^*$  seja precisamente  $H$ ? Veremos adiante num exemplo que, no caso geral, pode um tal conjunto não existir, ao contrário do que sucede a respeito dos corpos. Será esta, pois, a única proposição fundamental da teoria, que não consegue generalizar-se. Um problema importante a resolver será então o seguinte: determinar a condição necessária e suficiente para que tal proposição se verifique.

Ainda uma consequência dos teoremas demonstrados é aquele facto já anunciado no § 36:

*Dado um sistema  $[U]$ , todo o isomorfismo forte de um subconjunto  $V$  de  $U$ , num subconjunto  $V'$ , ainda de  $U$ , será prolongável num automorfismo do sistema  $[U]$ .*

57. — CONJUNTO E GRUPO DE GALOIS DE UMA RELAÇÃO. DECOMPOSIÇÃO DE UMA RELAÇÃO EM FACTORES IRREDUTÍVEIS.— Dado um sistema  $[U]$ , sejam:  $W$ , um subconjunto qualquer de  $U$  e  $\alpha$  uma relação univocamente exprimível em  $W$ . Chamaremos então *conjunto de Galois* da relação  $\alpha$  a respeito de  $W$  ao conjunto  $V$  logicamente gerado por  $W$  e por todas as soluções de  $\alpha$ ; e *grupo de Galois* da relação  $\alpha$  a respeito do conjunto  $W$  ao grupo dos automorfismos do seu conjunto de Galois, que deixam fixos os elementos de  $W$ . Posto isto, será fácil demonstrar o seguinte teorema:

XIII) *Qualquer que seja a relação  $\alpha$  univocamente exprimível no conjunto  $W$ , o seu conjunto de Galois será normal a respeito de  $W$ .*

Para a demonstração basta notar que as soluções de  $\alpha$  são permutadas entre si pelos automorfismos do conjunto de Galois que deixam fixos os elementos de  $W$ .

Notemos agora que o grupo de Galois de uma relação  $\alpha$  a respeito de um conjunto  $W$  se traduz (tal como sucede a respeito das equações algébricas) num grupo de substituições sobre as soluções de  $\alpha$ . Em particular, ter-se-á:

XIV) *Toda a relação  $\alpha$ , univocamente exprimível num conjunto  $W$ , pode ser representada, e de um só modo, como produto lógico de relações irredutíveis em  $W$ , cada uma das quais terá como soluções os elementos de uma das células de transitividade do grupo de Galois de  $\alpha$  a respeito de  $W$ , considerado como grupo de substituições sobre as soluções de  $\alpha$ .*

DEM. Sejam  $\frac{k}{a_i}$  uma das soluções de  $\alpha$ . e  $G$  o grupo de

Galois de  $\alpha$  a respeito de  $W$ . Seja por outro lado  $\gamma^k$  a relação que admite como soluções todas aquelas soluções de  $\alpha$  em que  $\bar{a}_i$  é transformada a solução  $\bar{a}_i^k$  pelas substituições de  $G$  (como se sabe, tais soluções de  $\alpha$  constituem a célula de transitividade a que pertence  $\bar{a}_i^k$ ). Da própria definição resulta que a relação  $\gamma^k$  é respeitada por todas as substituições de  $G$  e portanto exprimível univocamente em  $W$  (1). Analogamente se reconhece que a relação  $\gamma^k$  é irreduzível em  $W$ .

Podemos escrever então:

$$\alpha(x_i) \equiv \bigcap_k \gamma^k(\bar{x}_i),$$

em que  $\bigcap_k \gamma^k(\bar{x}_i)$  representa o produto lógico de todas as relações assim obtidas. Por outro lado, vê-se imediatamente que tal representação é única, para cada relação  $\alpha$ .

Uma outra consequência importante dos resultados anteriores é a seguinte:

XV) Se  $\phi(\bar{x}_i^1, \bar{x}_i^2, \dots)$  for uma função das soluções da relação  $\alpha$ , tal que  $\phi[\theta(\bar{x}_i^1), \theta(\bar{x}_i^2), \dots] = \phi(\bar{x}_i^1, \bar{x}_i^2, \dots)$ , qualquer que seja a substituição  $\theta$  do grupo de Galois de  $\alpha$  a respeito dum

(1) Se forem  $V$  o conjunto de Galois de  $\alpha$ , a respeito de  $W$ ,  $\{\bar{a}_i\}$  uma base lógica de  $V/W$  e  $\rho$  a relação irreduzível que admite  $\bar{a}_i$  como solução, a relação  $\gamma^k$  pode ser dada directamente pela fórmula

$$\gamma^k(\bar{y}_i) \equiv \bigcup_{\bar{x}_i} \{[\bar{y}_i = \bar{\phi}(\bar{x}_i)] \cap \rho(\bar{x}_i)\}$$

em que  $\bar{\phi}$  designa um dos operadores unívocos e univocamente exprimíveis em  $W$  que transformam  $\bar{a}_i$  em  $\bar{a}_i^k$ .

conjunto  $W$ , no qual o operador unívoco  $\phi$  seja unívocamente exprimível, então ter-se-á  $\phi(\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \dots) \equiv c$  em que  $c$  representa um elemento determinado de  $W$ .

Esta proposição resulta imediatamente do teorema VII. Uma forma fraca da mesma proposição será, manifestamente, a generalização do teorema das funções simétricas. (1).

Será também fácil estabelecer uma generalização do conhecido teorema de Lagrange:

Se uma dada função  $\phi(\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \dots)$  das soluções da relação  $\alpha$  é invariante para todas as substituições do grupo de Galois de  $\alpha$  (a respeito de  $W$ ), que deixam invariante uma outra função  $\psi(\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \dots)$  das soluções de  $\alpha$ , então ter-se-á  $\phi(\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \dots) \equiv \chi[\psi(\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2, \dots)]$  em que  $\chi$  designa um operador unívoco e unívocamente exprimível em  $W$  (supõe-se que também  $\phi$  e  $\psi$  são operadores unívocos e unívocamente exprimíveis em  $W$ ) (2).

58.— ISOMORFISMOS DE UM SISTEMA EM SI MESMO. SISTEMAS VECTORIAIS. GRUPO DE UMA AXIOMÁTICA.— No § 25 observámos que o sistema  $[U; P]$  em que, por convenção,  $P$  designa o conjunto das relações primitivas, pode não ser idêntico ao sis

---

(1) Uma das primeiras, se não a primeira obra em que a teoria de Galois aparece exposta sistematicamente sem a intervenção explícita do teorema das funções simétricas (o qual é apresentado depois como consequência) é o livro de G. BIRKHOFF e MACLANE (I).

(2) No Congresso Luso-Espanhol do Porto efectuado em 1942, propuz um método do elementar de exposição rápida e intuitiva da teoria de Galois com base numa generalização do teorema de Lagrange, método que só por falta de tempo não descrevo aqui.

tema  $[U, P]$ , em que, por convenção,  $P$  designa a relação primitiva *única* sobre  $U$ . Ora é fácil ver que tais sistemas serão distintos se, e só se, existir pelo menos um isomorfismo do sistema  $[U; P]$  em si mesmo, a respeito de uma transformação  $\sigma$  do conjunto  $P$  em si mesmo, que seja distinta da identidade. É claro que tais isomorfismos do sistema  $[U; P]$  não são mais do que automorfismos do sistema  $[U, P]$ ; e assim, o grupo dos automorfismos do primeiro será um subgrupo próprio do grupo dos automorfismos do segundo, se, e só se,  $[U; P] \neq [U, P]$ .

Um primeiro exemplo é-nos dado pelas geometrias projectivas, a que já nos referimos no § 27. Um outro exemplo sugestivo é-nos fornecido pelos *sistemas vectoriais*.

Chama-se *sistema vectorial* a todo o conjunto organizado  $[U, +; E]$  em que a operação binária unívoca  $+$  (adição) e os operadores unitários unívocos  $E$  (chamados *escalares*), verificam as seguintes condições:

- 1) O sistema  $[U, +]$  é um grupo abeliano (comutativo).
- 2) Dados dois operadores  $\alpha, \beta \in E$ , o operador  $\gamma$  tal que  $\gamma(x) \equiv \alpha(x) - \beta(x)$  pertence ainda a  $E$  (escreveremos então  $\gamma = \alpha - \beta$ ).
- 3) Dados dois operadores  $\alpha, \beta \in E$ , tais que não se verifique a relação  $\beta(x) \equiv 0$ , também o operador  $\alpha\beta^{-1}$  pertencerá a  $E$ .
- 4)  $\alpha.\beta = \beta.\alpha$  quaisquer que sejam  $\alpha, \beta \in E$ .

É fácil ver que, nestas condições, o conjunto  $E$  constituirá um *corpo*, a respeito da multiplicação usual de opera-



dores e da adição definida tal como segue:  $(\alpha + \beta)(x) \equiv \alpha(x) + \beta(x)$ .

Em particular, este corpo pode ser isomorfo ao corpo dos números reais ou ao corpo dos números complexos, e assim recairemos nos espaços vectoriais ( $n$  - dimensionais), no espaço de Hilbert, etc. É curioso notar que, no caso do espaço de Hilbert, enquanto uma *base lógica* do espaço pode ser constituído por uma sucessão numerável de elementos, uma *base operatória* (§ 54) não poderá igualmente ser constituída por uma sucessão numerável de elementos, se, além dos operadores algébricos, não fôr considerado como primitivo o operador topológico *lim*.

Dum modo geral, uma base operatória *mínima* dum sistema vectorial será constituída por elementos (vectoriais) *linearmente independentes*, isto é, tais que, dados quaisquer desses elementos,  $a_1, a_2, \dots, a_k$  a relação

$$\alpha_1(a_1) + \alpha_2(a_2) + \dots + \alpha_k(a_k) = 0 \quad \text{com} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in E$$

não pode ser verificada senão para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ . Demonstra-se que, se existir uma base operatória *mínima* formada de  $n$  elementos, qualquer outra base operatória *mínima* será formada do mesmo número de elementos, e diz-se então que  $n$  é o número de *dimensões* do sistema. Demonstra-se igualmente que todo o vector  $b$  poderá ser representado, e de um só modo, sob a forma

$$(\pi) \quad b = \alpha_1(a_1) + \alpha_2(a_2) + \dots + \alpha_k(a_k) \quad \text{com} \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in E$$

relativamente a uma base operatória *mínima*, sendo  $a_1, a_2, \dots, a_k$  elementos desta base.

A relação irreduzível a que satisfaz a base operatória mínima de um sistema vectorial é precisamente a de *ser uma base operatória mínima de tal sistema*. Atendendo a este facto e ao modo de representação ( $\mathcal{R}$ ), recordando por outro lado o teorema I, será fácil vêr como se obtêm todos os automorfismos de um dado sistema linear.

Notemos agora que o grupo dos automorfismos (também chamados transformações lineares biunívocas) de um sistema linear  $[U, +; E]$  pode não coincidir com o grupo dos automorfismos do sistema  $[U, +, E]$  e que tal sucede, precisamente, quando o corpo  $E$  dos escalares fôr deformável (se fôr, por exemplo, isomorfo ao corpo complexo).

Podemos, porêr, demonstrar o seguinte teorema

XVI) *Sejam  $G$  e  $H$  respectivamente, os grupos dos automorfismos dos sistemas  $[U; P]$  e  $[U, P]$ . Então  $H$  será um subgrupo invariante de  $G$  e ter-se-á  $K = G/H$ , sendo  $K$  o grupo dos automorfismos fortes de  $P$ .*

Para a demonstração basta imaginar uma mudança de conjunto fundamental, e atender ao teorema XII.

No caso de um sistema vectorial  $[U, +; E]$  a referida mudança poderá consistir simplesmente em tomar para novo conjunto fundamental  $U^*$  a reunião  $U \cup E$  do conjunto  $U$  dos vectores e do conjunto  $E$  dos escalares. Mas então deverá introduzir-se uma nova noção primitiva, proveniente duma relação lógica: escrever-se-á  $\alpha.x$  em vez de  $\alpha(x)$ , e dir-se-á que  $\alpha.x$  é o produto de  $\alpha$  por  $x$ .

Por outro lado, é fácil ver que os automorfismos de  $[U, +; E]$  se traduzem nos automorfismos do novo sistema que deixam fixos os elementos de  $E$ .

Chamaremos *grupo de uma axiomática*  $Ax[U; P]$  ao grupo  $G$  daquelas transformações biunívocas do conjunto  $P$  dos sinais primitivos em si mesmo que, efectuadas sobre as expressões dos axiomas, conduzem a uma axiomática equivalente à primeira. Então do teorema anterior poder-se-á deduzir-se a seguinte notável consequência:

Se forem  $G$  o grupo da axiomática  $Ax[U; P]$ ,  $[U_1; P_1]$  uma concretização da mesma (a respeito de uma transformação  $\sigma$  de  $P$  em  $P_1$ ),  $H$  e  $K$  os grupos de automorfismos, respectivamente, de  $[U_1, P_1]$  e  $[U; P]$ , e finalmente  $G' = H/K$ , ter-se-á  $G' \subseteq G$ , e no caso de a axiomática ser categórica,  $G' = G$ .

Por exemplo, no caso das geometrias projectivas,  $H$  e  $K$  serão respectivamente, o grupo das projectividades e o grupo das homografias do espaço, e  $G' = H/K$  será um grupo de ordem 2, correspondente à lei da dualidade.

Um outro exemplo é-nos dado pela família de todos os subconjuntos de um conjunto dado, a qual, organizada por meio das operações  $\cap, \cup$  constitue uma concretização da axiomática não categórica das álgebras de Boole.

59.— OS RESULTADOS ANTERIORES NO CASO RESTRITO.— Uma análise das demonstrações anteriores permitirá reconhecer que os teoremas demonstrados subsistem no *caso restrito* (§ 54), des

de que sejam verificadas as duas seguintes condições:

1) Se duas relações  $\alpha(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$  e  $\beta(\bar{x}_i)$  são operatoriamente exprimíveis num dado conjunto  $W$ , também a relação  $\bigcup_{\bar{x}_i} [\alpha(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \cap \beta(\bar{x}_i)]$  é operatoriamente exprimível no mesmo conjunto.

2) Se a relação  $\alpha(\bar{x}_i)$  operatoriamente exprimível no conjunto  $W$ , admite uma única solução  $\bar{a}_i$ , e se o conjunto  $W$  é operatoriamente fechado, então ter-se-á  $\{a_i\} \subset W$ .

Ora, quando se trata de extensões algébricas separáveis de um corpo qualquer, podemos limitar-nos a relações da forma  $\alpha(x, y)$  e  $\beta(x)$  (visto que a base operatória de cada extensão deste género pode ser constituída por um único elemento); e então é fácil ver que as condições anteriores são verificadas. Quanto à operação que faz passar das relações  $\alpha(x, y)$ ,  $\beta(x)$ , à relação  $\bigcup_x [\alpha(x, y) \cap \beta(x)]$ , trata-se manifestamente da eliminação de  $x$  entre as equações  $\alpha(x, y)$  e  $\beta(x)$ ; nos casos considerados em cada uma das referidas demonstrações, trata-se, mais precisamente, das conhecidas transformações de Tschirnhaus.

Quanto à segunda condição, bastará notar que uma relação  $\alpha(x)$  que admita uma única solução corresponderá, no caso das referidas extensões: ou a uma equação do primeiro grau, e a condição 2) será manifestamente verificada; ou a uma equação cujas raízes sejam todas iguais, e ainda neste caso a condição é verificada, admitindo que se trata de uma raiz separável.

Para não tornar mais longa a exposição, deixarei ao cuidado do leitor uma análise minuciosa destes factos.

60.— EXEMPLOS VÁRIOS.— A ilustrar os resultados anteriores, poderão ainda servir os seguintes exemplos, que apresentarei muito resumidamente:

a) Seja  $U$  o espaço geométrico afim, concebido como o conjunto dos agrupamentos de três números reais, organizado por meio das relações "*estar em linha recta*" e "*situado entre*". Neste caso, não são o conjunto vazio mas ainda cada elemento, serão univocamente fechados. Porém, o conjunto logicamente gerado por cada par de pontos distintos será a recta que por eles passa; o conjunto logicamente gerado por três pontos não em linha recta será o plano por eles definido, etc. Por outro, os únicos conjuntos normais serão o conjunto vazio e o conjunto fundamental.

Seja então  $V$  um conjunto constituído por dois pontos  $p, q$ . Uma base lógica mínima de  $U/V$  será sempre constituída por dois pontos  $a_1, a_2$ , tais que:

$$\sim \bigcup_x [Rt(x, a_1, p) \cap Rt(x, a_2, q)] \cap \sim \bigcup_x [Rt(x, a_1, q) \cap Rt(x, a_2, p)] \quad (1)$$

Representando esta condição abreviadamente por  $\rho$ , vê-se imediatamente que  $\rho$  é univocamente exprimível em  $V$ . Mais ainda:  $\rho$  será irreduzível em  $V$ . Os automorfismos do espaço (afinidades biunívocas) que deixam fixos os pontos  $p, q$ , obter-se-ão, portanto, substituindo  $a_1, a_2$ , respectivamente por dois pontos  $b_1, b_2$  tais que  $\rho(b_1, b_2)$ . Cada ponto  $\phi(a_1, a_2)$  (sendo  $\phi$  um operador unívoco e univocamente exprimível em  $V$ ) será assim transformado no

---

(1) Esta condição exprime simplesmente que os pontos  $a_1, a_2, p, q$  não são coplanares.

ponto  $\phi(b_1, b_2)$  pelos automorfismos que substituem  $(a_1, a_2)$  por  $(b_1, b_2)$ . Notemos ainda que o operador  $\phi$  se pode exprimir operativamente (§ 54) nos pontos  $p, q$  e nos dois operadores seguintes: 1) o operador  $S_m$ , que a cada terno  $(x, y, z)$  de pontos, faz corresponder o ponto  $u = S_m(x, y, z)$ , intersecção das rectas que passam por  $x$  e por  $y$ , e são, respectivamente, paralelas às rectas  $\overline{yz}$  e  $\overline{xz}$ ; 2) o operador  $\lim$  que, a cada sucessão convergente de pontos  $x_1, x_2, \dots$ , de uma recta  $R$ , faz corresponder aquele ponto  $u = \lim x_n$  da recta  $R$  tal que dados arbitrariamente dois pontos  $v, w$  de  $R$  entre os quais esteja situado  $u$ , todos os termos da sucessão  $\overline{x_n}$ , a partir de uma certa ordem, estarão situados entre  $v$  e  $w$  (1). É fácil ver que tais operadores são logicamente exprimíveis nas relações primitivas (univocamente exprimíveis no conjunto vazio).

Deixo ao cuidado do leitor um estudo mais aprofundado deste exemplo.

b) Se passarmos agora à geometria euclídeana, pela adição do conceito de *congruência* (ou de *igualdade de distância*) às noções primitivas do exemplo anterior, vê-se imediatamente que a relação  $\rho$  já não é irreduzível em  $V$ . Dada uma solução  $(a_1, a_2)$  da relação  $\rho$ , é claro que o conjunto  $V$  constituído por tais pontos será ainda uma base lógica mínima de  $U/V$ ; todavia a relação irreduzível em  $V$  que admita  $(a_1, a_2)$  como solução será agora a relação  $\rho^*$  tal que

---

(1) As sucessões convergentes são, naturalmente, por definição, aquelas sucessões para as quais o operador  $\lim$  é definido.

$$\rho^*(x_1, x_2) \equiv [\delta(x_1, p) = \delta(c_1, p)] \cap [\delta(x_1, q) = \delta(d_1, q)] \cap [\delta(x_2, p) = \delta(c_2, p)] \cap$$

$$\cap [\delta(x_2, q) = \delta(d_2, q)] \cap [\delta(x_1, x_2) = \delta(p, e)],$$

representando por  $c_1, c_2, d_1, d_2, e$ , pontos da recta  $\overline{pq}$  tais que:

$$\delta(c_1, p) = \delta(a_1, p); \delta(d_1, q) = \delta(a_1, q); \delta(c_2, p) = \delta(a_2, p); \delta(d_2, q) = \delta(a_2, q);$$

$$\delta(p, e) = \delta(a_1, a_2),$$

O grupo de Galois de  $U/V$  é portanto determinado por todas as transformações do par  $(a_1, a_2)$  nas diversas soluções de  $\rho^*$  e é fácil ver que tal grupo é constituído: 1) pelas rotações do espaço em torno da recta  $\overline{pq}$ ; 2) pelas simetrias do espaço a respeito dos planos que passam por  $\overline{pq}$ . (1)

Seja  $H$  um grupo de rotações de  $60^\circ$  em torno de  $\overline{pq}$ . Temos aqui o exemplo de um subgrupo  $H$  (não invariante) do grupo dos automorfismos de  $[U]$ , tal que o conjunto dos elementos respeitados por  $H$  é  $V$ , sem que, porém,  $H$  coincida com o grupo de Galois de  $U/V$ . Este facto liga-se com o que dissemos no § 56.

c) Seja agora  $[U]$  o plano projectivo ordinário. Neste caso, não são os pontos e o conjunto vazio, mas também os pares de pontos são univocamente fechados. Todavia, o conjunto logicamente gerado por três pontos colineares será a recta que por eles passa.

---

(1) É interessante notar que o par  $(a_2, a_1)$  não é necessariamente uma solução de  $\rho^*$ . Condição necessária e suficiente para que tal suceda é que os pontos  $a_1, a_2$  sejam simétricos a respeito dum plano que passe por  $\overline{pq}$ .

Seja então  $V$  um conjunto formado por três pontos  $p_1, p_2, p_3$ , tais que  $Rt(p_1, p_2, p_3)$ . Uma base lógica mínima de  $U/V$  será sempre constituída por dois pontos  $a_1, a_2$ , distintos e exteriores à recta  $\overline{p_1 p_2}$ . Se for  $c$  o ponto de encontro das rectas  $\overline{a_1 a_2}$  e  $\overline{p_1 p_2}$ , a relação irreductível em  $V$  verificada por  $(a_1, a_2)$  será neste caso a relação  $\rho$  tal que

$$\rho(x_1, x_2) \equiv Rt(x_1, x_2, c) \cap \sim Rt(x_1, p_1, p_2) \cap \sim Rt(x_2, p_1, p_2) \cap (x_1 \neq x_2).$$

É fácil ver então qual será o grupo  $H$  das homografias do plano que respeitam os pontos  $p_1, p_2, p_3$ . Se obrigarmos tais homografias a deixarem fixos um quarto ponto  $p$ , não colinear com os primeiros, obteremos o subgrupo  $K$  de  $H$ , constituído pelas perspectivas do plano que admitem a recta  $\overline{p_1 p_2}$  como eixo e o ponto  $p_1$  como ponto de fuga.

d) A família de todos os subconjuntos de um conjunto dado, organizada por meio da relação  $\subset$ , os corpos de funções racionais, o corpo dos números algébricos, etc. fornecem exemplos igualmente sugestivos.

Um exemplo constituído artificialmente, que contribuirá notavelmente para esclarecer o que foi dito nos parágrafos anteriores, é o seguinte:

Seja  $U$  um conjunto no qual é definido um operador unitário  $Suc$  (ler *sucessor de*) que se difira do operador  $suc$  definido no conjunto dos números naturais pelo seguinte facto; o operador  $Suc$  faz corresponder a cada elemento de  $U$ , dois e só dois, elementos de  $U$  (não será portanto um operador unívoco).



Deste modo, existirá em  $U$  um primeiro elemento, que designaremos por  $a_0$ . Aplicando a  $a_0$  o operador  $Suc$ , obteremos dois elementos distintos que designaremos por  $Suc_1(a_0)$ ,  $Suc_2(a_0)$ ; estes elementos darão por sua vez origem a quatro elementos:

$Suc_1(Suc_1(a_0))$ ,  $Suc_1(Suc_2(a_0))$ ,  $Suc_2(Suc_1(a_0))$ ,  $Suc_2(Suc_2(a_0))$ , distintos entre si; e assim sucessivamente. O conjunto  $U$  coincidirá com o conjunto dos elementos assim gerados (princípio de indução).

É claro que o sistema  $[U, Suc]$  não admitirá uma base lógica finita (tal como o corpo dos números algébricos).

Um caso importante que tenciono estudar após a redacção desta tese é o da integração lógica das equações diferenciais.

61.— A ORGANIZAÇÃO DE UM SISTEMA DEDUZIDA DO GRUPO DOS AUTOMORFISMOS.— PROBLEMA DE WIENER.— Uma vez introduzida uma organização  $P$  num conjunto  $U$ , o grupo  $G$  dos automorfismos do sistema  $[U; P]$  assim constituido ficará automaticamente determinado. Consideramos porém o problema inverso:

*Dados um conjunto  $U$  e um grupo  $G$  de transformações biunívocas do conjunto  $U$  em si mesmo, determinar uma organização  $P$  a introduzir em  $U$ , de modo que o grupo dos automorfismos do sistema  $[U; P]$  seja precisamente  $G$ .*

Este problema pode comparar-se a um problema mecânico que consiste em procurar as ligações a introduzir num dado sistema material para que o grupo dos movimentos possíveis do sistema coincida com um grupo previamente dado.

Se o grupo  $G$  se reduz à identidade, o problema é sempre possível e determinado; basta considerar o sistema  $[U, U]$  ou (admitindo o axioma de Zermelo) o sistema  $[U, <]$ , sendo  $<$  uma das relações que transformam  $U$  num conjunto bem ordenado. Obter-se-á então um sistema indeformável.

Analogamente, o problema é possível e determinado quando  $G$  coincide com o grupo simétrico. Este caso é caracterizado pela ausência de organização *efectiva*; diremos então que se trata da organização *nula*.

Mas estes dois casos extremos são os de menor interesse. Como resolver a questão no caso geral? O problema será sempre possível e determinado?

Não pude, por falta de tempo, aprofundar este assunto (1). Em todo o caso, se a solução existe, um método quasi-combinatório para encontrá-la será o seguinte:

Em cada um dos conjuntos  $U, U^{(2)}, \dots, U^{(n)}, \dots$  o grupo  $G$  determinará uma repartição em células de transitividade, e cada uma das células de transitividade assim determinadas no conjunto  $U^{(n)}$  (sendo  $n$  qualquer) corresponderá (§ 10) a uma relação  $n$ -ária, irreduzível, da organização procurada. Pode acontecer que todos os conjuntos da sucessão  $U, U^{(2)}, \dots$ , até uma certa ordem  $p$ , inclusive, constituam eles mesmos uma célula de transiti

---

(1) Este problema deve relacionar-se com o que foi dito no § 56 a respeito daquela proposição da teoria de Galois que não subsiste no caso geral. Um caminho a tentar é ainda o seguinte: Considerar o problema para os grupos cíclicos de  $G$  (atendendo à transitividade e à primitividade), e considerar em seguida a *intersecção* das organizações correspondentes a todos esses grupos cíclicos.

vidade; dir-se-á então que  $p$  é o grau de transitividade do grupo (simplesmente transitivo, se  $p=1$ ; duplamente transitivo, se  $p=2$ , etc.). É claro que as relações correspondentes às células de transitividade coincidentes com os conjuntos  $U, U^{(2)}, \dots$ , não serão efectivas (§ 9) e portanto nada adiantam na resolução do problema. Pode mesmo acontecer que o grau de transitividade do grupo seja infinito, isto é, que todos os conjuntos  $U, U^{(2)}, \dots$  constituam células de transitividade; é o que sucede a respeito dos espaços topológicos mais frequentes (exceptuada a recta).

Se esta última hipótese se verifica, ou as relações efectivas encontradas não bastam para resolver o problema, deverá passar-se às relações de tipo 2, seguindo um caminho análogo ao anterior; e destas para as relações de tipo 3, se a solução não tiver sido ainda encontrada, e assim sucessivamente. A solução, se existe, será atingida necessariamente por este processo. Restará apenas simplificar a solução, procurando um conjunto mínimo de relações primitivas.

No caso de  $U$  e  $G$  serem finitos, o problema resolver-se-á com um número finito de *démarches*, e sem passar do tipo 1. Se estes conjuntos forem infinitos, será manifestamente necessário tornar construtivo o método indicado, o que depende do caso concreto em questão.

Notemos ainda que, se a solução existe, ela será única, isto é, o problema será determinado. Com efeito, sejam  $P$  e  $P^*$  dois conjuntos de relações primitivas sobre  $U$ , tais que os grupos de automorfismos dos sistemas  $[U; P]$ ,  $[U; P^*]$  coincidam ambos com  $G$ . Então, em virtude do teorema IX, cada uma das relações

$P^*$  será univocamente exprimível nas relações  $P$ , e, reciprocamente, cada uma das relações  $P$  será univocamente exprimível nas relações  $P^*$ , o que significa simplesmente que  $[U;P] = [U;P^*]$ .

O referido problema poderá ainda ser apresentado de um modo mais restrito, tal como segue:

*Dados um conjunto  $U$  e um grupo  $G$  de transformações bí univocas de  $U$  em si mesmo, determinar uma organização  $P^*$  a introduzir em  $U^*$  de modo que: 1) o grupo dos automorfismos do sistema  $[U^*;P^*]$  coincida com  $G$ ; 2) o sistema  $[U^*;P^*]$  verifique, para uma conveniente interpretação dos sinais primitivos, uma axiomática  $Ax[U;P]$  previamente dada. Determinar as condições a que deve satisfazer  $G$  para que o problema seja possível e determinado.*

É deste gênero o problema de Wiener, no qual se pede que o sistema que admite aquele grupo de automorfismos seja um espaço topológico de classe determinada (um espaço  $(V)$ , um espaço acessível, um espaço de Hausdorff, etc.) (1)

62.— O CASO DOS ENDOMORFISMOS.— Um estudo análogo ao que atrás foi feito para os automorfismos de um sistema qualquer poderá repetir-se para os endomorfismos de um sistema ainda qualquer. É claro que neste caso deverá começar-se por substituir o conceito de "exprimir univocamente" por um outro mais limitado, conceito que resultará do primeiro, pela exclusão da da aquelas operações lógicas elementares, que, segundo a análise do

---

(1) Veja-se WIENER (I) ou ainda FRECHET (I).

§ 39, não são respeitadas pelos homomorfismos: para tal conceito usaremos a locução "expressar, no sentido homomórfico"; e dele derivar, naturalmente, os conceitos correspondentes, no sentido homomórfico, aos da base lógica, geração lógica, etc. Notemos ainda que uma definição operatória será sempre uma definição, no sentido homomórfico, mas a recíproca não é verdadeira.

Quanto ao conceito de relação irredutível num dado conjunto ele deverá ser substituído por um outro mais complexo:

Dados: um sistema  $[U]$ , um subconjunto  $V$  de  $U$  e um outro subconjunto  $\{a_i\}$  de  $U$ , diremos que uma relação  $\rho(x_i)$  definida em  $U$  é mínima a respeito de  $\{a_i\}$  e de  $V$ , quando: 1)  $\bar{a}_i$  é uma solução de  $\rho$ ; 2) a relação  $\rho$  é exprimível, no sentido homomórfico, em  $V$ ; 3) se  $\rho^*$  é uma relação que verifica as duas condições anteriores, então  $\rho < \rho^*$ .

É fácil ver que este conceito não coincide com o de relação irredutível num conjunto. O estudo dos endomorfismos far-se-á a partir de tal conceito. Assim, por exemplo; se for  $\{a_i\}$  uma base no sentido homomórfico do sistema  $[U]$  a respeito do conjunto  $V$  e se for  $\rho$  a relação mínima a respeito de  $\{a_i\}$  e de  $V$ , então os endomorfismos de  $[U]$  que deixam fixos os elementos de  $V$ , serão todos obtidos, substituindo o agrupamento  $\bar{a}_i$  por cada uma das soluções  $\bar{b}_i$  de  $\rho$ .

Por outro lado, deve observar-se que uma tal relação mínima existirá sempre como a conjunção de todas aquelas relações, exprimíveis no sentido homomórfico em  $V$ , que admitem  $\bar{a}_i$  como solução.

Um exemplo simples é-nos fornecido pelos sistemas vectoriais. Seja  $[U, +; E]$  um sistema vectorial e  $\{a_i\}$  uma sua base operatória (portanto uma base no sentido homomórfico) constituída por elementos distintos dois a dois. Não será difícil reconhecer que uma relação mínima a respeito de  $\{a_i\}$  e do conjunto vazio, será a relação  $\rho(\bar{x}_i)$  que é verificada por *todas as determinações* de  $\bar{x}_i$ , o que significa que os endomorfismos de  $[U, +; E]$  se obtêm, substituindo  $\bar{a}_i$  por cada um dos possíveis agrupamentos  $\bar{b}_i, \bar{c}_i, \dots$  relativos ao mesmo conjunto de posições.

Os endomorfismos de um sistema vectorial são comumente chamados *transformações lineares* (representáveis por matrizes finitas, no caso de o sistema ter um número finito de dimensões).

Por outro lado, o grupo dos endomorfismos dum sistema vectorial poderá ser convertido num *anel* não comutativo, com uma unidade, se, além da multiplicação já existente, for nele introduzida uma adição, tal como segue:  $(\theta_1 + \theta_2)(x) \equiv \theta_1(x) + \theta_2(x)$  quaisquer que sejam os endomorfismos  $\theta_1, \theta_2$ .

63.— CONJUNTOS FECHADOS A RESPEITO DE UMA FAMÍLIA DE OPERADORES; TOPOLOGIAS.— Consideremos um conjunto fundamental  $U$  e uma família  $\Phi$  *qualquer* de operadores  $\phi_1, \phi_2, \dots$  que transformem agrupamentos de elementos de  $U$  em elementos ainda de  $U$ , de um modo *inteiramente arbitrário*; isto é: tais operadores podem não ser definidos em todo o conjunto  $U$ , podem não ser unívocos, podem ser de grau infinito, etc., etc. Diremos que um subconjunto  $A$  de  $U$  é *fechado* a respeito dos operadores  $\Phi$ , quando a aplicação de tais operadores a elementos de  $A$  não faz

sair deste conjunto.

É fácil demonstrar que, dada uma família  $F$  qualquer de conjuntos fechados a respeito dos operadores  $\phi$ , a intersecção de *todos* esses conjuntos pertencerá também a  $F$ . Daqui resultam imediatamente conhecidos teoremas das teorias dos grupos, da teoria dos corpos, etc.

Seja agora  $A$  um subconjunto qualquer de  $U$ . A intersecção  $F$  de todos os supraconjuntos de  $A$ , que são fechados a respeito dos operadores  $\phi$ , será, manifestamente, o *menor* de tais conjuntos: chamar-lhe-emos conjunto *gerado* por  $A$ , *mediante* os operadores  $\phi$  e exprimiremos esse facto, escrevendo:  $F=A[\phi]$ . Diremos ainda que  $A$  é uma base de  $F$  a respeito dos operadores  $\phi$ .

Exemplos; No corpo dos números racionais o conjunto dos números inteiros coincide com o conjunto gerado por 1, mediante a *subtracção*; no corpo dos números complexos, o conjunto dos números algébricos é, por definição, o conjunto gerado pelos números racionais, mediante os operadores algébricos de todos os graus (§ 11) etc. (1).

Observemos no entanto que a definição anterior assenta sobre a hipótese da existência da intersecção de uma infinidade qualquer de conjuntos, hipótese a que já nos referimos no § 51. Poderá aquela definição ser substituída por uma outra construtiva?

Suponhamos em primeiro lugar que os operadores  $\phi$  são todos de grau finito. Seja então  $A$  o conjunto dado e represente

mos: por  $A_1$ , o conjunto  $A$  ampliado com todos os elementos que se obtêm, aplicando aos elementos de  $A$  os operadores  $\Phi$ , de todos os modos possíveis, sem sobreposição; por  $A_2$  o conjunto que se deduz de  $A_1$  tal como este se deduz de  $A$ , e assim sucessivamente. Obter-se-á deste modo uma sucessão numerável de conjuntos  $A, A_1, \dots, A_n, \dots$  cada um dos quais está contido nos seguintes, e é bem fácil ver que a reunião de todos os conjuntos assim obtidos é precisamente o conjunto gerado por  $A$  mediante os operadores  $\Phi$ . O processo indicado baseia-se manifestamente no princípio de indução finita, e pode considerar-se construtivo.

Pode mesmo acontecer que a partir de uma certa ordem todos os termos da sucessão coincidam: é o que sucede, por exemplo, se  $A$  for o conjunto dos números racionais e  $\Phi$  a família dos operadores algébricos (então a coincidência dá-se a partir do segundo termo).

Suponhamos agora que alguns dos operadores  $\Phi$ , ou mesmo todos, são de grau infinito, mas não superior a  $\aleph_0$ . Neste caso, em vez de uma sucessão numerável (tipo de ordem  $\omega$ ) deverá, em geral, considerar-se uma sucessão de tipo de ordem  $\Omega$ :

$$A, A_1, \dots, A_\omega, \dots, A_{2\omega}, \dots, A_{\omega^2}, \dots, A_{\omega^\omega}, \dots, A_\epsilon, \dots$$

com a seguinte lei de formação: Cada termo  $A_i$  com um antecedente  $A_{i-1}$  será deduzido de  $A_{i-1}$  pela aplicação dos operadores  $\Phi$  aos elementos de  $A_{i-1}$  de todos os modos possíveis, *sem sobreposição*; cada termo sem antecedente (distinto de  $A$ ) será obtido pela reunião de *todos* os que o precedem. Será fácil demonstrar que o conjunto gerado por  $A$ , mediante  $\Phi$ , coincide com a reunião



de todos os conjuntos assim obtidos.

Pode ainda este processo considerar-se construtivo ?

Recordemos a propósito tudo o que foi dito acerca da definição dos ordinais de classe II. Notemos, entretanto, que é o mesmo processo que se definem as classes de Baire — De la Vallée Poussin (1).

Pode suceder, ainda neste caso, que todos os termos coincidam a partir de uma certa ordem: assim, por exemplo, se  $A$  for um subconjunto de um espaço métrico, e a família  $\phi$  se reduzir ao operador  $\lim$ , tal como costuma ser definido em tais espaços, então todos os termos coincidem a partir do segundo (2).

Consideremos agora os homomorfismos do sistema  $[U; \phi]$  num outro sistema  $[V; \psi]$ , sendo  $\phi$  e  $\psi$  famílias de operadores de tipo 1, postas em correspondência biunívoca por meio de uma transformação  $\sigma$ . Podemos nós afirmar que a imagem de um conjunto fechado  $\bar{e}$ , em tais homomorfismos, ainda um conjunto fechado? Em geral, não podemos afirmá-lo. Todavia, pode afirmar-se:

1) *A imagem completa inversa de um conjunto fechado  $\bar{e}$ , em tais homomorfismos, ainda um conjunto fechado.*

---

(1) Vejam-se BAIRE (I), De la VALLÉE-POUSSIN (I), LUSIN (I).

(2) Notemos que a todo o par  $(A, F)$  de conjuntos, em que  $F$  designa o conjunto gerado por  $A$  mediante os operadores  $\phi$ , corresponde uma lei de indução: Se uma função  $\bar{e}$  é definida para todos os elementos de  $A$ , e se o facto de ser definida para os elementos  $a_i$  de  $F$  implica que será também definida para o elemento  $\phi(a_i)$  qualquer que seja  $\phi \in \Phi$  então a referida função  $\bar{e}$  é definida para todo o elemento de  $F$ .  
É deste género o princípio de indução no corpo de Borel.

2) Se os operadores das famílias  $\Phi$  e  $\Psi$  forem todos unívocos e os homomorfismos forem operatórios (§ 40), a imagem dum conjunto fechado será sempre um conjunto fechado.

Estas duas proposições desdobram-se em inúmeros teoremas da teoria dos grupos, dos anéis, dos espaços topológicos, etc.

Notemos finalmente que todo o sistema  $[U; \Phi]$ , em que  $\Phi$  designa ainda uma família de operadores de tipo 1, dá origem a um espaço topológico  $[U, -]$  se o não é já, quando a família  $\Phi$  é substituída pelo operador único que a cada subconjunto  $X$  de  $U$ , faz corresponder o conjunto  $\bar{X}$  gerado por  $X$ , mediante os operadores  $\Phi$ . Então é fácil ver que, quaisquer que sejam  $X, Y \subset U$ , se tem:

$$\mathfrak{A}_1) \quad \overline{X + Y} \subset \overline{X + Y} \quad ,$$

$$\mathfrak{A}_2) \quad \overline{\overline{X}} = \overline{X} \quad ,$$

$$\mathfrak{A}_3) \quad \overline{0} = 0 \quad .$$

Aos espaços topológicos que verificam tais condições chama A. Monteiro espaços (F). Uma grande parte das propriedades dos espaços de Kuratowski (que são os espaços (F) em que a reunião de dois conjuntos fechados é sempre um conjunto fechado) são generalizáveis a esta categoria de espaços.

É preciso porém não perder de vista que, como já observamos atrás, os homomorfismos e as operações de relativização e de condensação se referem sempre, nos espaços topológicos, à relação  $x \in \bar{X}$ , e não à relação  $Y = \bar{X}$ . As razões deste facto não se

rão difíceis de encontrar.

64.— CONJUNTOS ABSORVENTES.— Um conceito semelhante ao de conjunto fechado é o de conjunto absorvente. Considere-mos um caso simples; seja  $\phi$  um operador binário definido num subconjunto dum conjunto fundamental  $U$ . Diremos que um dado subconjunto  $R$  de  $U$  é *absorvente à esquerda*, a respeito de  $\phi$ , quando verifica a condição

$$(x \in A) \subset [\phi(x, y) \in A]$$

Analogamente se define *conjunto absorvente à direita* a respeito de  $\phi$ .

*Exemplo* : Seja  $U$  um grupo, e  $\phi$  o operador tal que  $\phi(x, y) \equiv y.x.y^{-1}$ . Vê-se imediatamente que os conjuntos absorventes à esquerda a respeito de  $\phi$  não são mais do que os subconjuntos invariantes de  $U$ .

Vários resultados, relativos à intersecção de conjuntos absorventes, à geração de conjuntos absorventes, ao efeito dos homomorfismos sobre tais conjuntos, etc. poderão agora ser estabelecidos tal como fizemos para os conjuntos fechados. As proposições assim obtidas desdobram-se em conhecidos teoremas das teorias dos grupos, dos anéis, etc.

## APENDICE AO § 37.

**37.A. CONCRETIZAÇÕES IRREDUTÍVEIS E CONCRETIZAÇÕES INEXTENSÍVEIS DE UMA AXIOMÁTICA.**— Os conceitos de *soluções máximas* e *soluções mínimas* duma *axiomática* são semelhantes, mas não idênticos, aos conceitos de que vamos aqui tratar.

Uma concretização duma *axiomática* diz-se *inextensível*, quando não admite nenhuma extensão própria que verifique a *mesma* *axiomática*; *dir-se-á irredutível* quando não admite nenhum subsistema próprio, que verifique a referida *axiomática*.

Uma rectificação deve ser feita ao que foi dito no §37.

A categoricidade é atingida, em vários dos casos comuns, *directamente*, por meio de um axioma que equivale a afirmar a inextensibilidade ou a irredutibilidade de qualquer concretização da *axiomática*: o primeiro caso verifica-se a respeito do axioma da indução finita, para os números naturais; o segundo caso, a respeito do axioma da saturação de Hilbert, para os números reais e para a geometria euclideana ordinária.

Todavia, como mostrou E. Noether, podem apresentar-se *axiomáticas* que admitam apenas concretizações *inextensíveis* (ou apenas concretizações *irredutíveis*), sem que tais *axiomáticas* sejam *categóricas*.

## BIBLIOGRAFIA POR ORDEM ALFABÉTICA DE AUTORES

- [1] ACKERMANN, W. (I) *Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen.*  
Math. Ann. t.99 (1928) p.118-135.  
(II). *Begründung der "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit.*  
Math. Ann. t.93 (1924) p.1-36.
- [2] ALEXANDROFF, P. und HOPF H. (I) *Topologie, Berlin, Springer*  
1935.
- [3] ASCOLI, Guido (I) — 1 parte da memória publicada em *Annali di Math.*, 1931-32.
- [4] BAIRE, R. (I) *Leçons sur les fonctions discontinues, Paris, Gauthier-Villars, 1905.*
- [5] BARZIN, M. (I) *Sur la crise contemporaine des mathématiques,*  
*Enseignement Math.*, t.34 (1935), p.5-11.
- [6] BERNAYS, P. (I) *Sur le platonisme dans les mathématiques.*  
*Enseignement math.*, t.34 (1935) p. 52-69.  
(II) *Quelques points essentiels de la mathématique.* Ibid. p.70-95.  
(III) *Die Philosophie der matematik und die Hilbertsche Beweistheorie.* *Blätter f. deutsche Philosophie*, t. 4 (1930), p.326-327.
- [7] BIRKHOFF, G. (I) *Rings of sets, Duke Math. Journ.* vol. 3,  
(1937), p.443.  
(II) *General Lattice Theory*
- [8] BIRKHOFF, G. and Mac-LANE (I) *A survey of modern Algebra.*
- [9] BOCHER, M. (I) - *Introduction to higher Algebra* New York  
1908.

- [10] BOREL, E. (I) *Leçons sur la théorie des fonctions*. - 3 ed. com 7 apēndices, Paris, Gauthier-Villars, 1928.  
 (II) *Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions* - Paris, Gauthiers-Villars, 1922.  
 (III) *Leçons sur la théorie de la croissance*, Paris, Gauthiers-Villars 1910.
- [11] BOREL, BAIRE, LEBESGUE, HADAMARD - (I) *Cinq lettres sur la théorie des ensembles*. Bull. Soc. Math. France Dezembre de 19804.
- [12] CARNAP, R. (I) *Abriās der Logistik*.— Wien Springer 1929  
 (II) *Logische Syntax der Sprache*, Wien Springer, 1934.  
 (III) *Die antonomien und die Unvollatandigkeit der Mathematik*, Monatshafte f. Math. u. Phys.,1934.
- [13] CAVAILLES, J. (I) *Méthode axiomatique et formalisme*; I Le problème du fondement des mathématiques; II Axiomatique et systēme formal; III La non contradiction de l'Arithmétique. Act. Sc. et Ind. Paris Hermann, 1938.
- [14] CHURCH, A. (I) *The constructive second number class*. Bull. Amer. Math. Soc. vol. 44, 1938, p.224.
- [15] CHURCH, A. and KLEENE, S.C. (I) *Formal definitions in the theory of ordinal numbers*. Fundamenta Mathematicae, vol. 28 (1937) p. 11-21.
- [16] DICKSON, L.E. (I) *Modern Algebraic Theories*, Chicago 1926
- [17] ERRERA, A. (I) *Sur la crise contemporaine des mathématiques*, Enseignements Math. t.34 (1935),p.12-17.
- [18] FRAENKEL, A. (I) *Ueber den Begriff "definit" und die Unabhaengigkeit des Auswahlaxioms*. S.B. preuss. Ak. Wiss. 1922, p.253-257.

- (II) *Sur la notion d'existence dans les mathématiques.* *Einsegnement a Math.* t. 34 (1935) p.18-32.  
 (III) *Sur l'axiome du choix.* -Ibid. p. 32-51.
- [19] FRÉCHET, H. (I) - *Les espaces abstraits.* Paris Gauthiers-Villars.  
 (II) *Analyse fonctionnelle.* - *Encyclopédie Française*, 1.84-
- [20] GENTZEN, G. (I) *Die widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie* *Math. Ann.* t.112 (1939), p.493-565.
- [21] GOEDEL, K. (I) *Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme.* *Monatsh. I. Math. u. Phys.* t. 37 (1930) p.349-360.
- [22] HASSE, H. (I) *Höhere Algebra, I, II und Aufgabensammlung zur Höheren Algebra.* Sammlung Goeschen 1926/27.
- [23] HAUSDORFF, F. (I) *Mengenlehre.* Berlin u. Leipzig, Walter de Gruyter, 1927.
- [24] HERBRAND, J. (I) *Les bases de la logique hilbertienne.* - *Rev. de Mét.* t. 37 (1930). p.243-295.  
 (II) *Recherches sur la théorie de la démonstration.* - *Thèses de la Fac. des Sc. de Paris*, 1930.  
 (III) *Sur la non contradiction de l'arithmétique.* *Journ. f. Math.* t. 166 (1931) p.1-8.
- [25] HEYTING, A. (I) *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* - *S.B. preuss. Akad. wiss.* 1930, p.42-56.
- [26] HILBERT, D. (I) *Ueber das Unendliche* *Math. Ann.* t.95 (1925), p.161-190.  
 (II) *Ueber den Zahlbegriff.* *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.* t.8 (1900) reproduziert in (III), p.241-246.  
 (III) *Grundlagen der Geometrie.* - 7 ed. mit appendices, Berlin u. Leipzig Teubner, 1930.

- [27] HILBERT, D. und BERNAYS, P. (I) *Grundlagen der Mathematik*, t.I, Berlin Springer, 1934.
- [28] KLEENE, S.C. (I) *General recursive functions of natural numbers*, Math. Ann. vol. (1935-1936), p. 27-742.  
 (II) *Definability and recursiveness*, Duke Math. vol. 2 (1937), p. 153-163.  
 (III) *On notation for ordinal numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 43 (1937), p.41.
- [29] KURATOWSKI (I) *Topologie I. Monografia matematyczna* Warszawa, Lwow, 1933.
- [30] LEBESGUE, H. (I) *Sur les fonctions représentables analytiquement*; - Journal de mathématiques, 1905, p. 139-219.
- [31] LEWIS and LANGFORD. (I) *Symbolic Logic*, 1932.
- [32] LUKASIEWICZ e TARSKI (I) *Untersuchungen ueber den Ausagenkalkul* C, R. Soc. Sc. et Lettres de Carsovie, cl. III 1930, p.30-50.
- [33] LUSIN, N. (I) *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris Gauthier-Villars, 1930.
- [34] MIRIMANOFF, D. (I) *Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles*. Enseignement math. t. 19 (1917) p. 37-52.
- [35] Von NEUMANN, J. (I) *Ueber die Definition durch transfinite induktion* math. Ann. t.99 (1928) p. 373-391.
- [40] PEANO, G. (I) *Arithmetices principia novo methodo exposito*, Augustae Taurinorum, 1889.
- [41] PERRON, O (I) *Algebra I, II*, 1927.



- [42] PETER, R. (I) *Ueber den Zusammenhang der Begriffe der rekursiven Funktionen.* — Math. Ann. t. 110 (1934), p. 612.  
(II) *Konstruktion nicht-rekursiver Funktionen.* Math. Ann. t. III (1935), p. 43.
- [43] POINCARÉ, H. (I) *La Science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1902.  
(II) *Science et Méthode*, Paris, Flammarion 1908.  
(III) *La valeur de la science*, Paris, Flammarion, 1905.  
(IV) *Dernières pensées.*
- [44] PONTRYAGIN, L.S. — *Topological groups*, Princeton Univ. Press, 1939.
- [45] SIERPINSKI (I) *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, Gauthier-villars, 1928.  
(II) *L'hypothèse du continu.* Monografia matematyczna Warsaw, 1934.
- [46] SKOLEM, Th. (I) *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrerende Denkweise.* Videnskapets Selskabet's Skrifter (Kristiania) I. Mat. Naturv. Kl. (1923) n.6  
(II) *Ueber die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels einer endlichen Axiomensystems*, Norsk. Math. Tounings Skrifter, Ser. II, 1933.
- [47] SPEISER, A. (I) *Die Theorie der Gruppen von endlichen Ordnungen*, 2 ed. Berlin Springer 1927.
- [48] STEINITZ, E. (I) *Algebraische Theorie der Körper*, mit Erläuterungen und einen Anhang von R. BÄR und N. HASSE, Berlin 1930.
- [49] TARSKI, A. (I) *Sur les ensembles finis*, Fund. Math. 6 (1925).

- [50]    TURING, A.M. (I) *On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem*. Proc. London Meth. Soc. (2) vol. 42 (1936-37), p. 230-265.  
           (II) *Computability and definability*, J. Symb. Log. vol. 2 (1937), p. 153-163.
  
- [51]    De la VALLEE POUSSIN, Ch. (I) *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de BAIER*, Paris Gauthier-Villars 1916.
  
- [52]    VEBLEN, O. (I) *A system of axioms for geometry*. Trans. of the Amer. Math. Soc. t. 5 (1904), p.343-384.
  
- [53]    Van der WAERDEN, B.L. (I) *Modern Algebra*, 2 vol. 2 ed. 1937, Berlin Springer.
  
- [54]    WEIL, H. (I) *Das Kontinuum*. Leipzig, 1918, nov. ed. 1932.  
           (II) *Der circulus vitiosus der heutigen Begründung der Mathematik*. Jahresber. d. deutsch. Math. Vereinig. t. 28 (1912), p. 85-92.
  
- [55]    WHITEHEAD and RUSSELL (I) *Principia Mathematica*. Cambridge vol. 1 ed. 1910, 2 ed. 1925-27.
  
- [56]    WIENER, N. (I) *Limit in terms of continuous transformations*. Bull. Soc. Math. France, t. 150, 1922, p. 51-62.

Página em branco

NOTAS RELATIVAS À TESE

PARA UMA TEORIA GERAL DOS HOMOMORFISMOS

ROMA, 1944

Página em branco

I.— A TEORIA DOS TIPOS E A REALIDADE. — Vimos atrás que toda a proposição supõe a existência de um conjunto fundamental  $U$ , a respeito do qual é fixado o tipo de tal proposição. Mais ainda: não só é possível substituir, como sistema de referência, o conjunto  $U$ , por um outro de tipo superior a 1 (a respeito de  $U$ ), mas também este poderá (e assim sucede em todos os exemplos que a Matemática nos oferece) ser de tipo superior a 1, a respeito de um outro conjunto, a partir do qual foram construídos os elementos de  $U$ ; tal é o caso dos números naturais que servem de base a todo o edifício da Análise clássica. Ocorre, então, perguntar: Não será possível assinalar um conjunto fundamental *absoluto*, isto é, um conjunto ao qual se refiram *todos* os conhecimentos humanos, organizados num sistema *logicamente compatível*? Eis aí um daqueles problemas que parecem destinados a não ser resolvidos: o *efectivamente concreto* deve consistir em qualquer coisa de inacessível, se não é apenas uma ilusão. Todavia, para exercer eficazmente a inteligência e poder então agir com probabilidade de êxito, o homem é *constrangido* a fixar esquemas lógicos (necessariamente parciais, necessariamente provisórios) que lhe permitam interpretar aquilo a que chama a Natureza, a Realidade, etc. (1)

---

(1) Dum modo geral, o homem, em presença de vários esquemas que se referem a aspectos diversos da Natureza e que, em parte, se contradizem, procura modificá-los, incorporando-os num esquema único mais vizinho da Realidade. Porém, este mesmo começa a revelar-se incompleto e outros vêm a formar-se, ao lado dele, fazendo sentir a necessidade de uma nova síntese. E é assim, por *aproximações sucessivas*, que a ciência dos homens parece caminhar, soldando o desconhecido.

Num primeiro esquemà da Natureza, o homem considera como seres, isto é, como elementos do conjunto fundamental, os *indivíduos naturais* (animais, plantas e minerais) e como *atributos* (1), isto é, como relações definidas em tal conjunto, os diversos modos pelos quais os indivíduos se nos dão a conhecer, ou directamente (introspecção) ou através dos órgãos dos sentidos. Neste caso, as constantes são, em linguagem comum, representadas por substantivos próprios ou por substantivos comuns associados a complementos determinativos. Os atributos, *enquanto atributos*, são representados *típicamente* por adjectivos, que, no grau positivo, correspondem a relações unitárias ("branco", "sólido", "luminoso", etc.) e no grau comparativo correspondem a relações binárias ("mais denso que", "menos denso que", "tão extenso como", etc.) Mas a forma adjectivo, embora típica, não é a única apta a exprimir atributos: os substantivos comuns (concretos) podem substituir em tal função os adjectivos. E até se pode verificar o fenómeno, chamado *substantivação*, que consiste no emprego do adjectivo como substantivo comum, tal como nos exemplos: "um *felino*", "um *carnívoro*", "um *animal*" etc., em que a palavra "*indivíduo*" foi suprimida, conferindo aos adjectivos a

---

(1) A linguagem distingue entre *atributo* e *predicado*. O segundo equivale ao primeiro, acrescido do elemento de ligação entre o sujeito e o atributo, elemento expresso pelo verbo "*ser*"; trata-se aqui, somente, de uma diferença de forma análoga à que assinalamos entre "*conjunto*" e "*relação*". Notemos que, na linguagem russa, o verbo "*ser*" é omitido no presente, de modo que o atributo se confunde praticamente com o praticado.

categoria de substantivos.

Por outro lado, já vimos no §7, que, na linguagem comum, as variáveis são representadas por substantivos comuns precedidos de certos complementos.

Notemos, porém, que, enquanto *aplicados* a indivíduos naturais, os atributos não são reconhecidos como *seres*, como *coisas*, isto é, não se lhes atribui uma existência *própria*, *concreta*, *material*. Porém, no esforço de *conhecer* e *compreender*, é-se naturalmente levado a concentrar a atenção sobre os atributos, analisando-os, classificando-os, etc., e é claro que, enquanto procede assim, o homem confere-lhes, *de facto*, uma existência autónoma, isolando-as em objectos do pensamento, em *seres de um novo tipo*. A linguagem reflecte, nitidamente, esta mudança de ponto de vista, passando dos adjectivos aos substantivos abstractos, transforma "extenso" em "extensão", "duro" em "dureza", "denso" em "densidade", etc. Sucede até algumas vezes que a transformação se reduz a antepôr o artigo definido, tal como nos exemplos: "o verde", "o plano", etc. Porém a passagem do adjectivo ao substantivo abstracto (como também a passagem do substantivo comum ao adjectivo) revela apenas uma mudança de atitude psicológica, a que a Lógica se mantém estranha. Por exemplo, as palavras "esfera", "esférico", "esfericidade", embora gramaticalmente distintas, correspondem a um mesmo conceito abstracto, a um mesmo atributo de tipo 1, a respeito do conjunto dos sólidos, de modo que as proposições: "x é uma esfera", "x é esférico", "a esfericidade é um atributo de x" são perfeitamente equivalentes.



tes. Convém todavia não perder de vista as ampliações, as esfumaturas, etc., que o uso tende a imprimir ao significado das palavras, como sucede, por exemplo, na expressão "electricidade vítrea", em que o adjectivo adquire um significado diverso do original.

A concretização dos atributos em seres de um novo tipo determina um fenómeno curioso: a tendência a alargar o conjunto fundamental, com a adjunção de elementos de tipo 2. Já vimos como, na sistematização lógica das geometrias projectivas, e obedecendo exclusivamente a um critério de comodidade, se é levado a conceber, não sō os pontos mas também as rectas e os planos, como elementos fundamentais. Pode porém esta tendência polarizar-se numa nítida posição filosōfica, como sucede com o *platonismo*, que efectua uma completa inversão de tipos, admitindo como elementos *primitivos* de Realidade, *únicos, universais e eternos*, certos atributos, de que os *indivíduos* naturais seriam apenas combinações *transitórias, acidentais, contingentes*; de modo que cada indivíduo natural seria, não uma *intersecção*, mas sim um *conjunto* de atributos, os quais existiram já, *antes* de ocorrerem em tal combinação, como existem as cores antes de o artista as dispor sobre a tela. É claro que, do ponto de vista lógico, é indiferente a escolha deste ou daquele conjunto como fundamental, desde que todo o elemento de um qualquer deles se possa exprimir como elemento de tipo determinado a respeito do outro, do mesmo modo que é logicamente indiferente a escolha deste ou daquele corpo sólido como sistema de referência no estudo

dos movimentos, visto que todos os pontos do espaço se podem definir em relação a qualquer deles. A questão, porém, muda de aspecto, quando passa a ser considerada do ponto de vista da comodidade ou do ponto de vista da formação efectiva, histórica dos conceitos.

Notemos, agora, que os atributos dos indivíduos na turais correspondem apenas a um primeiro grau de abstracção pois que, uma vez considerados como seres de tipo 2, poderão ser separados, classificados, etc., consoante os respectivos "*atributos*" (isto é, atributos de tipo 2), os quais, por sua vez, poderão considerar-se como seres de tipo 3), e assim su cessivamente. Por exemplo, nas expressões "*propriedade física*" e "*propriedade química*" os adjectivos "*física*" e "*química*" exprimem atributos de tipo 2.

Os substantivos comuns colectivos fornecem-nos um exemplo de elementos de tipo 3, a respeito dos indivíduos naturais. Assim, por exemplo, cada um dos substantivos "*ordem*" "*gênero*", "*espécie*", etc. empregados na acepção biológica, corresponde a uma família de sub-conjuntos do conjunto dos seres vivos.

Como exemplo de operadores de tipo 2, a respeito dos indivíduos naturais, citaremos, entre outros, os que correspondem às expressões "*a côr de*", "*a substância química de*", "*a massa de*", etc.. Os dois primeiros não são definidos para todos os indivíduos naturais, mas é claro que não poderão ser usados, em qualquer caso, os operadores: "*as co*

*res de*", *"as substâncias de"*, etc.

Um exemplo notável de entidades de tipo 3 a respeito do mesmo conjunto fundamental é-nos fornecido pelos números naturais, se estes forem considerados como famílias de conjuntos de indivíduos naturais. Em tal caso, a constante *Num* (*"o número de elementos de"*) comporta-se manifestamente como operador de tipo 3. Porém, a mesma constante poderá aplicar-se a conjuntos de números, a famílias de conjuntos de números, etc., e apresentar-se-ão deste modo expressões tais como *"número de números"*, *"número de número de números"*, etc., em que o conceito de número aparece com um grau de abstracção cada vez mais elevado.

Finalmente, é preciso não perder de vista que os indivíduos naturais se encontram em contínua transformação no tempo, de modo que a) cada *indivíduo* não será mais do que o *conjunto* dos estados por que vai passando; b) entre os estados dos diversos indivíduos considera-se definida uma relação binária *"x precede y"*, correspondente à ideia de tempo. Por outro lado, é transformando-se que um indivíduo se nos dá a conhecer, donde: *"o estado de um indivíduo num determinado instante t"*, e, em particular, *"o estado do Universo num dado instante t"*, constituem ainda conceitos abstractos, que não se podem aplicar senão de um modo *aproximado*.

Tudo se passa, portanto, como se aquele *"efectivamente concreto"* que o homem se esforça por atingir, fosse apenas uma miragem, que um momento se promete vizinha, logo

em seguida, aparece mais distante. A Ciência levou a conceber os corpos como *conjuntos* de partículas que o homem chamou átomos, convencido de que fossem *efectivamente indivisíveis*; mas, por sua vez, a interpretação de certos pontos nos exigiu que se atribuísse ao átomo uma estrutura complexa, e, deste modo, surgiram os *indecomponíveis* do nosso tempo: os *electroões*, os *protões*, etc. Mas tais corpúsculos, além de constituírem simples hipóteses, não bastam para explicar tudo aquilo que se observa. Sem falar das dificuldades da própria Física atômica, devemos lembrar-nos de que os fenômenos vitais e, muito especialmente, os fenômenos psíquicos, estão muito longe de poderem enquadrar-se num modelo mecânico. Como diz Louis de Broglie: "*As idealizações mais ou menos esquemáticas do nosso espírito podem representar certos aspectos das coisas, mas essas idealizações são limitadas e não podem conter nos seus rígidos esquemas toda a riqueza da Realidade*".

## II. — A EVOLUÇÃO DOS CONCEITOS E O PLURALISMO LÓGICO.

— Seja  $U$  o conjunto dos seres vivos (que admitiremos como bem definido), e  $\pi(x)$  a proposição condicional " $x$  é uma planta". Podemos nós garantir que a relação  $\pi$  é definida em  $U$ ? Por outras palavras: existe ou não um critério, mediante o qual seja sempre possível, em presença de um ser vivo  $x$ , reconhecer se  $x$  é ou não é uma planta? No caso afirmativo, tal critério será independente do espaço e do tempo (universal e eterno) e a constante  $\pi$  fixará, simultaneamente, a relação unitária  $\pi$  e o conjunto  $P$  das plantas, visto que entre

estas duas constantes existe unicamente uma diferença de expressão: *dar* uma equivale a *dar* a outra, isto é  $\pi(x) \equiv (x \in P)$ .

Notemos, entretanto, que a linguagem comum atribui à palavra "*conjunto*" um significado, em virtude do qual um conjunto se considera sempre suscetível de ser construído, a partir dos seus elementos, mencionados um por um, e, em tais condições, todo o conjunto seria, por natureza, finito. Assim quando se ouve falar do *conjunto das plantas*, é-se levado geralmente a pensar nas plantas que existem actualmente à superfície da Terra, e não nas plantas que existem, existiram ou possam vir a existir, em qualquer época e em qualquer lugar; nesta última acepção serão usadas, em vez de "*conjunto*", as palavras "*classe*", "*família*", "*gênero*", etc., a que, por sua vez, as ciências biológicas atribuíram significados particulares, com prejuízo do conceito geral. Além disso, os conjuntos corresponderiam a um critério accidental ou mesmo arbitrário, isto é, dependente da vontade do homem, e aplicável apenas ao presente e ao passado; enquanto as classes (que não se reduzem a conjuntos) corresponderiam a um critério natural, que os fixa até ao presente e os projecta no futuro, independentemente da vontade humana. Mas é claro que não compete à Lógica formal fazer a distinção de tais critérios; e é por isso que em Matemática se usa a palavra "*conjunto*" ("*ensemble*", "*insieme*", "*set*", "*benge*", etc.) em ambas as acepções; sendo usadas com o mesmo significado as palavras "*classe*", "*família*", etc. (1)

---

(1) Comumente, a ideia de "*conjunto*" anda também ligada à ideia de simultaneidade, ou à ideia da possibilidade de encerrar todos os seus elementos num mesmo campo visual, auditivo, etc.

Notemos, porém, voltando ao exemplo anterior, que a existência de um critério *rígido, imutável*, que fixa no tempo e no espaço o conceito de planta, não passa de pura ilusão ( e o mesmo se pode dizer quanto aos conceitos de "*fanerogâmica*", de "*mamífero*", etc. e até quanto aos conceitos de "*ser vivo*" e de "*indivíduo natural*"). Com efeito, os biólogos têm-se visto algumas vezes em dificuldades, a respeito de certos seres vivos, sem saberem se os devem incluir no conjunto P das plantas ou no seu complementar, o conjunto A dos animais; e nenhum biólogo está em condições de saber se outras dificuldades do mesmo gênero não virão a surgir no futuro.

Como proceder então? Inicialmente, *admite-se* como definida em U a proposição  $\pi(x)$ , e portanto a sua contradição  $\sim \pi(x)$  a qual inclui x no conjunto A dos animais. Num grande número de casos, o reconhecimento de um ser vivo como animal ou como planta é acompanhado de um *sentimento* de perfeita segurança (*certeza prática*). Mas podem também apresentar-se casos em que, em vez de tal segurança, se sinta uma maior ou menor *hesitação*, que incite à *renúncia*: então, para não cometer um erro, derivado de suposta ignorância, *renúncia-se* a atribuir a  $\pi(x)$  qualquer dos valores 0 ou 1. Porém, daqui a atribuir-lhe um terceiro valor, dizendo-a duvidosa ou problemática, vai uma certa distância; será preciso, em primeiro lugar, que o sujeito reconheça, *sem hesitação*, o próprio estado psicológico de hesitação; e será necessário, em segundo lugar, que tal juízo se torne *objec-*

tivo, por comparação com o das *outras pessoas*. E, então, se fôr reconhecida a *concordância de opiniões*, haverá dois caminhos, diversos, mas equivalentes, a seguir: ou bem se conserva o conceito de "*planta*", subordinando-o a uma lógica em que cada proposição seja suscetível de tomar um, e um sô, dos valores: "verdadeira", "*falsa*", "*duvidosa*", (lógica trivalente) ou bem se procura corrigir o conceito de "*planta*" (e portanto o de "*animal*"), admitindo uma terceira categoria de seres vivos, a que podemos dar o nome de "*seres intermediários*". Então, dizer que, para um dado  $x$ , a proposição  $\pi(x)$  é duvidosa equivalerá a afirmar que  $x$  é um ser intermediário; e deste modo, tratar-se-á apenas de uma diferença de linguagem. (1)

Em qualquer dos casos, é efectuada a substituição de um esquema por um outro, que se afigura mais próximo da Realidade; mas nada impede que novas dificuldades, do gênero das anteriores, venham a apresentar-se para o segundo esquema, induzindo a substituí-lo por um terceiro, e assim sucessivamente. Pode, então, por esta via ser-se conduzido a um esquema de continuidade; e assim sucede nos casos em que, partindo de uma proposição  $\alpha(x)$ , que *inicialmente* se considera definida num certo conjunto  $U$  de indivíduos naturais, se chega a avaliar objecti-

---

(1) Poderíamos ainda convencionar dizer que o conjunto  $I$  dos seres intermediários constitui a *fronteira* dos conjuntos  $A$  e  $P$ . É interessante notar que as noções topológicas ordinárias são elaboradas por um processo análogo ao que estamos descrevendo; porém, neste caso, admite-se que a *fronteira da fronteira* coincide com a *fronteira*, isto é, fixa-se intuitivamente um termo, ao processo de evolução.

vamente, para cada determinação de  $x$ , o *grau de hesitação* que se experimenta ao afirmar  $\alpha(x)$ ; e haverá então de novo dois caminhos, diversos, mas equivalentes, a seguir: ou bem se subordina  $\alpha(x)$  a uma lógica em que cada proposição seja susceptível de uma infinidade de valores distintos (a que podemos chamar *probabilidades* de que a proposição seja verdadeira); ou bem se substitui a relação unitária  $\alpha(x)$  por uma relação binária  $x \alpha y$  que seja equivalente a esta outra: "A *probabilidade de que seja verdadeira*  $\alpha(x)$  *é maior que a probabilidade de que seja verdadeira*  $\alpha(y)$ " (1).

Notemos que já por exemplo os conceitos de "*volume*" , "*peso*", "*distância*", etc. foram elaborados por um processo semelhante ao anterior. E' certo que, em matemática, os adjectivos "*grande*" e "*pequeno*" não têm significado senão aplicados no grau comparativo; mas, na vida quotidiana, e até nas Ciências Físico-químicas, é-lhes atribuído um significado (embora menos preciso, menos objectivo), mesmo quando usados no grau positivo e superlativo.

---

(1) E' claro que, por esta via, se poderia ir mais longe, considerando probabilidades de segunda ordem, de terceira ordem, etc.



Um exemplo muito sugestivo da passagem da forma unitária à forma binária é-nos oferecido pelo conceito de *côr* (1). Numa fase inicial, este conceito é elaborado *directamente, intuitivamente*, a partir das sensações visuais, específicas, de cor. Consideremos, por exemplo, o *verde*: todo o indivíduo normal, não daltônico, será capaz de reconhecer, num grande número de casos, se uma dada cor é ou não é o verde, e então tudo se passa como se tal conceito correspondesse a uma relação unitária. Mas são frequentíssimos também os casos em que não é difícil reconhecer se o verde de um dado corpo é *mais acentuado* ou simplesmente *díverso* do verde de um outro corpo; por outro lado, a transição entre o verde e as cores vizinhas far-se-á de um modo imperceptível, dando origem a expressões tais como: "*verde amarelo*", "*azul esverdeado*", "*verde esmeralda*", etc., ou ainda "*cor indefinível*", "*côr indecisa*" (teremos aí o que podemos denominar as *fronteiras* do verde). Finalmente, efectuando a aná-

- 
- (1) No campo biológico, encontramos, entre outros, o exemplo dos conceitos de "*masculinidade*" e de "*feminilidade*", os quais se apresentam inicialmente sob a forma unitária, mas correspondem, numa fase ulterior, a relações binárias; com efeito, desde a descoberta das hormonas o homem de ciência encontra-se em condições de atribuir, objectivamente, a cada indivíduo um *grau* de masculinidade (ou de feminilidade); por outro lado, os casos de hermafroditismo fazem desaparecer a separação nítida entre os dois sexos. Entretanto, investigações recentes no domínio da genética tendem a fixar, com maior precisão, o conceito de sexo.

No campo da Química, encontramos o exemplo do Ph, forma evoluída dos conceitos de *ácido* e de *base*; é interessante notar como na determinação do Ph são usados, entre outros, os métodos colorimétricos.

lise das cores, o físico conseguiu classificá-las em *simples* e *compostas*, e chegou à perfeição de escalonar as cores simples (ou ainda os raios monocromáticos) segundo os respectivos comprimentos de onda, medidos em unidades *angstrom*. Em tais medições, é ainda o sentido da vista que desempenha o principal papel. Consegue-se, então um maior grau de objectividade e de precisão; mas é claro que não existem na Natureza cores simples como não existem gases perfeitos, rectas ou esferas. Trata-se apenas de idealizações mais ou menos adaptáveis ao real; de conceitos mais ou menos objectivos. E até o conceito de "*objectividade de um conceito*" (não perder de vista a teoria dos tipos!) pode servir de *exemplo* a quanto atrás ficou dito. (1)

III. — A FORMAÇÃO INDUTIVA DOS CONCEITOS. — Examinemos de perto a formação natural, espontânea, dos conceitos. Seja o conceito de "*ave*", correspondente a uma relação unitária, que se considera definida no conjunto dos animais. Depois de ter conhecido um número bastante elevado destes animais, o homem (e não só o homem, mas vários homens, em várias épocas e em vários lugares), foi *intuitivamente* levado a estabelecer uma *lei*, mediante a qual se crê habilitado a decidir de um animal, qualquer que seja, se ele *é* ou *não é* uma ave. Assim, à primeira vis

---

(1) Do mesmo modo que, na recepção das ondas hertzianas, se consegue uma melhor ou pior sintonização, sem nunca atingir a sintonização perfeita (o que nem sequer tem sentido); na aplicação dos conceitos é possível obter uma maior ou menor aproximação sem chegar à exactidão absoluta.

ta, trata-se de um critério *dicotômico* (isto é, que conduz necessariamente a uma afirmação ou a uma negação, e jamais a um paradoxo) e, como tal, *rígido, imutável*, isto é *independente* dos indivíduos a que, *no futuro*, venha a ser aplicado. Seja, porém, C o conjunto das aves conhecidas pelo homem, até uma determinada época, posterior à formação do conceito de "ave", e seja E o conjunto das aves, não incluídas em C, sem determinação de tempo ou lugar. É claro que dar o conceito de "ave" equivale a *fixar* o conjunto  $A = C \cup E$  das aves; mas é também manifesto que, para dar aquele *conceito* e portanto o conjunto A, bastaria dar o conjunto inicial C e daqui a tendência a considerar o *conjunto das aves* e a entidade abstracta *ave*, como coisas distintas, como se tal conceito não dependesse dos indivíduos que, sucessivamente, vêm *reunir-se* ao conjunto C, isto é, como se o critério formado a partir dos elementos de C, fosse realmente *definitivo, imutável*. Ora a verdade é que tal critério assenta sobre os caracteres que foram reconhecidos *comuns* aos elementos de C, os quais por sua vez correspondem a conceitos elaborados por um processo em tudo semelhante ao que estamos descrevendo. Mas trata-se aqui, verdadeiramente, de uma lei, como as *leis físicas*, estabelecida por *indução*; uma lei que permite *extrapolar*, isto é, que pode ser aplicada a indivíduos não pertencentes a C. Com efeito, entre os caracteres reconhecidos comuns aos elementos do conjunto inicial, poderão assinalar-se um *mínimo* de caracteres  $c_1, c_2, \dots, c_n$  (por exemplo, certos caracteres externos, como o bico, as penas, etc.) os quais *parecem* bastar para definir o conceito de "ave"; todos os res -

tantes caracteres  $e_1, e_2, \dots$  (como, p.ex., a conformação do tubo digestivo, do aparelho respiratório, etc.) se apresentam como *consequências* ou *efeitos* dos primeiros, os quais, por sua vez, assumem o aspecto de causas dos segundos. Poderã, então formular-se a seguinte *lei*: Todas as vezes que, *num dado indivíduo* (animal), se verificam, conjuntamente, os caracteres  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , sucede que, no *mesmo* indivíduo, se verificam também os caracteres  $e_1, e_2, e_3, \dots$ ; e dir-se-ã então que tal indivíduo é uma *ave* (1). Substituindo, no enunciado anterior, as palavras "*caracteres*" e "*indivíduo*", respectivamente, pelas expressões "*fenômenos*" e "*sistema material*" (ou "*região do espaço-tempo*"), e suprimindo a parte final "*dir-se-ã então que ...*" ter-se-ã o modelo das leis físicas, tais como são concebidas desde Galileu.

Mas tal como sucede com as leis físicas, aquela de que nos estamos ocupando não será necessariamente *infalível*: foi apenas o *grande número* de casos que a confirmaram que levou o homem a atribuir-lhe, *por indução*, um *grau de probabilidade* de ser, mais uma vez, verificada. Mas é evidente que o grande nū

---

(1) Até a Medicina nos fornece, neste campo, um exemplo sugestivo. Com efeito, a identificação (*diagnose*) de uma *entidade nosológica*, assenta sobre um certo conjunto de sintomas, que se consideram definidores daquela entidade. A consideração dos antecedentes e das condições actuais do doente, as análises químicas, etc. tendem simplesmente a furdar e a aperfeiçoar o diagnóstico, de modo que, a partir de tais premissas, se possa estabelecer, com maior ou menor precisão: a *prognose*, e adoptar as medidas necessárias a modificar, artificialmente, o curso da doença.

mero de confirmações não habilita a afirmar a impossibilidade *absoluta* das excepções e, se estas se apresentarem com pequeníssima frequência, como que acidentalmente, dir-se-ão *anormalidades, aberrações, monstruosidades*, caprichos de uma Natureza cansada de repetir-se; mas se, pelo contrário, começam a ser notadas, com grande frequência, certas excepções que, longe de apresentarem carácter acidental, pareçam obedecer a uma nova lei, então sō haverá um caminho a tomar: corrigir o primitivo esquema adaptando-o melhor à Realidade.

Tal mudança de esquema traduzir-se-ã numa transformação do sistema de caracteres  $(c_1, c_2, \dots, c_n; e_1, e_2, \dots)$ , transformação que por sua vez consistirã numa, pelo menos, das operações seguintes: eliminação de alguns desses caracteres; introdução de outros, que passavam despercebidos; passagem à categoria de *primitivos* de alguns dos que anteriormente figuravam como *derivados*, e viceversa. O caso dos ornitorincos (que acabaram por ser incluídos no conjunto dos mamíferos) constitui um exemplo de tal fenómeno.

Procurando agora historiar a formação indutiva dos conceitos correspondentes aos caracteres  $c_1, c_2, \dots, c_n; e_1, e_2, \dots$ , seríamos levados a considerar outros conceitos, possivelmente mais *simples* do que aqueles, e, prosseguindo deste modo, chegaríamos, em última análise, a conceitos que podemos denominar *imediatos*, atendendo a que se traduzem, ou parecem traduzir-se *imediatamente* em sensações. (1) Ora é fácil ver que tais con-

---

(1) O conceito de *carácter* é um dos que a moderna Biologia mais se esforça por analisar e precisar.

ceitos imediatos (como por exemplo, as cores, as temperaturas, os sons, os odores, etc.) são dados por critérios *directos, intuitivos*, os quais, sendo ainda *sugeridos* ou *despertados* por *indução*, já se não apresentam, todavia, com a força complexa de leis como a anterior. É só numa fase ulterior que a Ciência os faz depender de leis experimentais, cujo método é o de um aumento de objectividade e nitidez, mediante o controle recíproco e comparativo das sensações (1).

IV. — AS ATITUDES CONCEITUALISTA E EMPIRISTA. — O INFINITO MATEMÁTICO. — A análise feita nos números precedentes conduz a várias conclusões.

Em primeiro lugar, vê-se que, no seu aspecto útil, o conhecimento se apresenta como equivalente a *capacidade de previsão*, da qual resulta uma maior probabilidade de êxito na acção (2).

Em tal modo, todo o juízo não tautológico se pode considerar o ponto de partida para uma previsão. Mas é preciso notar que a palavra "previsão" é atribuído aqui um significado mais amplo do que o usual, um significado que a subordina à história do conhecimento humano, mais do que à história da Natureza,

---

(1) Notemos a analogia entre este facto e aquele que se verifica, em Matemática, na subordinação dos conceitos primitivos a axiomas.

(2) A propósito da concepção de Le Roy, segundo a qual a Ciência consistiria numa regra de acção, Poincaré observa: "*La science est une règle d'action qui réussit, au moins généralement, et, j'ajoute, tandis que la règle contraire n'aurait pas réussi* (Poincaré, I).

na medida em que as duas se possam distinguir. Quando se reconhece que "*Pedro é humano*" está-se habilitado a prever que "*Pedro morrerá*" e neste caso a previsão refere-se ao futuro na tural. Mas quando Leverrier *deduziu* a existência de um *novo* pla neta, a partir da lei de Newton (lei *deduzida* das leis de Kepler, as quais, por sua vez, foram induzidas da observação dos factos) o matemático francês *previu* verdadeiramente, a existência de Neptuno, previsão que se refere ao futuro dos nossos conhecimentos, mas não propriamente ao futuro do Universo físico. Analogamente se pode dizer que, com a sua teoria electromagnética, Maxwell previu a existência das ondas hertzianas. Em qualquer dos três casos, a previsão é estabelecida por meio de uma *dedução*. E, des te modo, as teorias dedutivas se nos apresentam como admiráveis instrumentos de previsão, guias precisos da actividade humana, construídos sobre os resultados da indução.

Por outro lado, observa-se que a evolução dos conceitos conduz a um alternar das atitudes *idealista* e *empirista*, como resultado da passagem do ponto de vista da extensão ao da compreensão e viceversa. É claro que, como tantas vezes se tem observado, o homem não poderia exercer eficazmente a sua inteligência, e obter portanto, uma maior probabilidade de êxito na acção, se não se resignar a fixar-se, provisoriamente, em certos esquemas, mesmo sabendo que se trata de simples *esquemas* e não de *reproduções exactas*; e, enquanto proceda assim, apoiando-se num sistema formal e abstraindo da realidade, o homem co

loca-se numa posição *conceptualista* (1). Sucede porêm que com o tempo, com o aumento de experiência, o homem se vê constrangido a substituir velhos esquemas que já não satisfazem por novos esquemas que dêm lugar a menor número de contradições e de erros; e enquanto procede assim, procurando adaptar-se cada vez mais ao complexo evoluir das coisas, ele coloca-se numa posição *empirista* (2).

Tais pontos de vista correspondem manifestamente, aos dois aspectos antagônicos, mas complementares da Natureza: de *complexidade* e de *harmonia*. É oscilando entre estes dois polos, que a Ciência parece progredir. Modernamente, a teoria dos quanta conduziu a uma crise do determinismo, o qual não pode já, certamente, subsistir sob a forma clássica, laplaciana, mas tal não justifica que se chegue ao extremo de negar, *em absolu*to, a lei física, o que será cair no cepticismo, deformação do empirismo (3).

- 
- (1) Com efeito, é no fixar-se em um esquema, esquecendo ou ignorando as suas deficiências, que consiste o fenómeno da abstracção ou da *idea*lização.
- (2) Os significados dos termos "*conceitualista*" e "*empirista*" tal como são aqui empregados, aproximam-se, respectivamente, dos significados dos termos "*realista*" e "*nominalista*", tais como eram usados na Idade Média, com uma diferença porêm: que os dois primeiros se referem mais a métodos de investigação, do que a opiniões filosóficas.
- (3) Eis como, na sua obra de divulgação "*Matière et Lumière*" Louis de Broglie se exprime a respeito de determinismo: "*Mas a doutrina determinista não tem só uma utilidade prática (como a atitude heurística); ela contém certamente uma parte de verdade, pois se fosse completamente falsa, não se veria nos fenómenos nem ordem, nem regularidade, e toda a ciência dos fenómenos seria impossível. Ora é um facto que a Física existe e que tem demonstrado o seu valor com progressos e com numerosas aplicações*".



Ainda um reflexo de tal antagonismo é o que se verifica entre o *contínuo* e o *descontínuo*, entre o *finito* e o *infinito*. A ideia de *infinito matemático* provém, manifestamente, da consideração daquelas classes naturais que, e segundo a descrição feita anteriormente, são definidas por meio de um critério ao qual se chega por indução, classes cujo número de elementos ninguém pode avaliar, por isso que estão a receber continuamente, a adição de novos e imprevistos elementos. Por outro lado, nós estamos habituados a observar que as classes naturais se *transformam* no tempo e no espaço; e que essa transformação se efectua, geralmente, por graduações imperceptíveis, de modo que é impossível indicar com precisão os *limites* ou *fronteiras* da classe, tal como é impossível indicar, precisamente, quando é que uma cor deixa de ser o verde, para ser o não-verde. (1).

Mas o facto de uma classe se transformar resulta na possibilidade de a incluir numa outra classe e esta numa terceira, e assim sucessivamente. Além disso, tais inclusões sucessivas efectuam-se de um modo que podemos exprimir segundo a fórmula clássica "*aumentando a extensão, diminui a compreensão*", se por "*compreensão*" entendemos, não propriamente o *conjunto dos atributos*

- 
- (1) Durante o período áureo do mecanicismo dominou a fórmula de Leibniz: *Natura non facit saltus*. Contudo a Ciência dos nossos dias foi levada a considerar, ao lado da variação contínua, a variação brusca, *descontínua*, a qual, numa segunda aproximação, se pode revelar como variação contínua, mas muito rápida. Por sua vez, a variação contínua pode, numa segunda aproximação, apresentar-se como sucessão de muitas variações bruscas. Trata-se, portanto de dois aspectos complementares da Natureza, o contínuo e o descontínuo.

*comuns a todos os elementos da classe, mas sim a nitidez do conceito correspondente; com efeito, o que se obtém é que à medida que a extensão aumenta, as fronteiras das classes se tornam cada vez menos nítidas, até se diluïrem completamente no irracional e no desconhecido.*

Deste modo, a Matemática substitui o *indefinido* pelo *infinito*, a *indução natural* pela *indução completa*. Todavia, não se conhece nenhum processo indutivo de tal modo potente, que sobre ele se possa basear, com verosimilhança, a hipótese de que uma dada classe natural é infinita, isto é, um processo que possa servir de base a uma verificação *empírica* do axioma do infinito de Russell, axioma que afirma a existência de conjuntos infinitos.

Uma das classes que mais fortemente sugerem a ideia da sucessão infinita dos números naturais é a classe dos dias solares; com efeito, a probabilidade  $p$  de que o sol apareça ainda uma vez após uma rotação da Terra, é *enormemente* vizinha da unidade, se atendermos ao número *enorme* de vezes que tal facto se tem verificado, mas a probabilidade de que o mesmo facto suceda  $n$  vezes sucessivas será  $p^n$ , e, como  $p < 1$ , ter-se-á  $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0$ .

O facto de não ser conhecida nenhuma classe natural que realize o infinito matemático, faz nascer dúvidas sobre a legitimidade da expressão "*totalidade dos números naturais*". O empirista dirá: a sucessão dos números naturais é infinita apenas *em potência* (infinito potencial); isto é, para além dos

números *efectivamente* considerados até um determinado instante, poderão vir a considerar-se *novos* números, mas não se pode afirmar que já existissem antes daquele instante. O conceitua lista responderá: o facto de que o homem não conheça todos os numeros naturais não impede que estes existam fora do seu conhecimento (1); e assim nada parece opor-se à hipótese da totalidade dos números naturais (infinito actual) desde que tal hipótese: 1) não conduza a contradição; 2) seja cômoda e fecunda.

O homem de ciência deve naturalmente procurar um equilíbrio entre as duas tendências. Certamente, como diz algures Hadamard, "*uma certa idealização é necessária em todas as fases da Ciência*" (e não sô da Ciência, mas de todas as formas de actividade intelectual humana, até a mais rudimentar). Esquematizar significa amputar, mas é esse o único meio de que dispomos para não caminhar às cegas pelo Mundo.

O extremo do empirismo será o cepticismo. Mas é preciso também evitar o excesso oposto, ou seja o platonismo, o qual investe as idealizações humanas de uma existência pura, eterna, em cuja contemplação estética passiva estaria o supremo objectivo do conhecimento. A verdade é que os esquemas lôgicos são instrumentos sugeridos e condicionados pela realidade, destinados a interpretar a realidade. Poderão parecer mais lôgicos, isto é, mais coerentes com a estrutura no nosso espíri-

---

(1) *Il y a bien de choses que nous ne pouvons jamais connetre et qui, cependant, existent "en soi", indépendamment de la capacité humaine de les décrire, indépendamment de l'activité de notre esprit et indépendamment de l'existence même de l'homme sur la terre" (HADAMARD (I)).*

to; mas não se deve pretender que sejam mais reais do que o proprio Real.

V.— OS DOIS PONTOS DE VISTA DA MATEMÁTICA.— De quanto atrás foi dito resulta que a Matemática deve ser considerada de dois pontos de vista complementares: o ponto de vista *genético* ou *intuitivo*; que se refere ao processo de evolução natural desta ciência e portanto à actividade de investigação em tal domínio; e o ponto de vista *lógico* ou *formal*, que se refere à matemática já constituída e portanto à actividade de sistematização lógica exercida sobre os resultados da investigação.

Porém, tais pontos de vista não podem separar-se completamente, e daí a ilusão dos *formalistas* e dos *intuicionistas* "*a outrance*", ilusão dos primeiros quando pretendem reduzir a Matemática a um jogo tautológico de símbolos, segundo regras arbitrárias; ilusão dos segundos quando negam utilidade construtiva aos métodos axiomáticos, e à Lógica Matemática em geral. Os factos têm mostrado que, se não for ajudada e disciplinada pela crítica, a intuição acaba por tornar-se inoperante e até enganadora. Mas, por outro lado, é preciso não perder de vista que a Matemática provém da Realidade e à Realidade deve tornar. É bem conhecida através dos séculos, a caricatura do Matemático deformado, o homem de mente cristalizada, habituado a uma rigidez de fórmulas e de conceitos que o inabilitam para as questões concretas, vitais.

Estes factos não podem deixar de ter notáveis repercussões na Pedagogia. Galois previne os investigadores contra

o erro que cometem ocultando sistematicamente, na exposição dos próprios resultados, o caminho que seguiram na investigação. Por outro lado, F. Klein, no seu livro sobre as matemáticas elementares, consideradas de um ponto de vista superior, insiste sobre a necessidade de introduzir os métodos genético e fusionista no ensino desta ciência. Todavia, sem dar ouvidos a Galois, a F. Klein e a tantos outros, o ensino da Matemática continua a ser ministrado, em grande parte, como se esta fosse uma ciência morta e, mais que morta, fossilizada. Ora é tempo de reconhecer que não basta o encadeamento lógico dos conceitos e das proposições; que é preciso também atender ao fim que faz surgir tais conceitos e tais proposições *naturalmente*, como meios para alcançar esse fim, e não como produtos indiferentes de operações lógicas, executadas mecanicamente.

Com o ensino organizado segundo tais princípios, diminuirá certamente o número dos que teimam em conceber a Matemática como uma imensa tautologia. Trata-se aí, manifestamente, de um excesso platônico de formalismo, análogo ao que se verifica em Física com a crença no determinismo *absoluto*. Assumindo uma atitude conceptualista, podemos *admitir* que os entes matemáticos existiam já, antes de serem *descobertos* pelo investigador, do mesmo modo que existia o radio, antes de os Curie o terem posto em evidência. É necessário porém, passando à atitude empirista, reconhecer que, antes de serem *isolados* pelo matemático tais objectos existiam apenas *em potência*, platonicamente, na mesma medida em que existe a sinfonia, antes de o compositor a construir, agrupando sons elementares; na mesma medida em que

existe a estátua no bloco de mármore, antes de o escultor a tornar visível aos olhos da Humanidade.

## ÍNDICE DAS MATÉRIAS

### INTRODUÇÃO

### Capítulo I.— PRELIMINARES

1.	Conjuntos .....	
2.	Agrupamentos .....	
3.	Proposições .....	
4.	Funções proposicionais .....	
5.	Quantificadores .....	
6.	Mudanças de variáveis. Regra de substituição das variáveis aparentes .....	
7.	As variáveis na linguagem comum .....	
8.	Relações n-árias .....	
9.	Relações conjugadas. Relações Simétricas. Relações efectivas.....	
10.	As relações n-árias e os subconjuntos de $U^{(n)}$ .....	
11.	Explicitação. Funções e operadores .....	
12.	Os operadores na linguagem comum .....	
13.	Transformações unívocas .....	
14.	Operadores múltiplos .....	
15.	Relações mistas .....	
16.	Tipos finitos .....	
17.	Tipos transfinitos .....	
18.	Mudança de conjunto fundamental .....	
19.	As constantes lógicas e a teoria dos tipos .....	
20.	A teoria dos tipos e o simbolismo .....	

## Capítulo II.— SISTEMAS ABSTRACTOS E HOMOMORFISMOS

21. O lógico e o intuitivo na história da definição matemática .....
22. Definições lógicas sobre um dado conjunto fundamental .....
23. Os conjuntos e os operadores nas definições lógicas .....
24. Altura de um conceito .....
25. Conjuntos organizados .....
26. Isomorfismos .....
27. Automorfismos. Sistemas indeformáveis .....
28. Sistemas abstractos. Método axiomático .....
29. Compatibilidade e categoricidade .....
30. Demonstrabilidade. Axiomáticas equivalentes .....
31. Independência e saturação .....
32. Repartições. Relações de congruência .....
33. Conjuntos quase-ordenados e conjuntos parcialmente ordenados .....
34. Relativização. Funções lógicas respeitadas por esta operação .....
35. Efeito da relativização sobre as proposições categóricas .....
36. Isomorfismos entre subconjuntos de um sistema .....
37. Soluções máxima e mínima de uma axiomática .....
38. Homomorfismos e endomorfismos .....
39. Funções lógicas respeitadas pelos homomorfismos ...
40. Homomorfismos operatórios .....
41. Conjuntos ordenados e conjuntos bem ordenados .....



- 42. Números ordinais finitos .....
- 43. Definições recorrentes .....
- 44. Importância do estudo da recorrência. Equações às diferenças finitas .....
- 45. Números ordinais transfinitos. Potências superiores à do numerável .....
- 46. Relações de grau infinito. O platonismo em Matemática .....
- 47. A definição para além do numerável e as ideias de Leibniz sobre uma língua universal científica .....
- 48. O princípio de Zermelo .....
- 49. Condensação .....

### Capítulo III. — ESTUDO DOS AUTOMORFISMOS E DOS ENDOMORFISMOS DE UM SISTEMA QUALQUER

- 50. Conjuntos univocamente fechados num sistema .....
- 51. Relações irredutíveis num conjunto .....
- 52. Teoremas fundamentais
- 53. Conjuntos normais. Grupo de Galois de um conjunto normal .....
- 54. Univocidade no sentido restrito .....
- 55. Determinação das bases lógicas. Possibilidade de exprimir uma relação nos conceitos primitivos .....
- 56. Os grupos de Galois e as sucessões monótonas de conjuntos normais .....
- 57. Conjunto e grupo de Galois de uma relação. Decomposição de uma relação em factores irredutíveis .....
- 58. Isomorfismos de um sistema em si mesmo. Sistemas vectoriais. Grupo duma axiomática .....

59.	Os resultados anteriores no caso restrito .....
60.	Exemplos vários .....
61.	A organização dum sistema deduzido do grupo dos automorfismos .....
62.	O caso dos endomorfismos .....
63.	Conjuntos fechados a respeito duma família de ope- radores .....
64.	Conjuntos absorventes .....

APÊNDICE AO § 37:	Concretizações irreduzíveis e concre- tizações inextensíveis duma axiomática .....
-------------------	---

BIBLIOGRAFIA .....
--------------------

NOTAS RELATIVAS À TESE .....
------------------------------