

ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA
PARA
O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS

**PROPRIEDADES DE PERMANÊNCIA
DOS ESPAÇOS (LN^*) E DOS SEUS DUAIS**

J. SEBASTIÃO E SILVA

(Comunicação apresentada à 1.^a Secção do XXIII Congresso Luso-Espanhol
— Coimbra, 1956)



C O I M B R A
1 9 5 7

PROPRIEDADES DE PERMANÊNCIA
DOS ESPAÇOS $(L N^*)$ E DOS SEUS DUAIS

SEPARATA DO TOMO II DAS PUBLICAÇÕES
DO XXIII CONGRESSO LUSO-ESPAÑHOL
(COIMBRA, 1-5 DE JUNHO DE 1956)

ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA
P A R A
O P R O G R E S S O D A S C I Ê N C I A S

**PROPRIEDADES DE PERMANÊNCIA
DOS ESPAÇOS (LN^*) E DOS SEUS DUAIS**

J. SEBASTIÃO E SILVA

(Comunicação apresentada à 1.^a Secção do XXIII Congresso Luso-Espanhol
— Coimbra, 1956)



C O I M B R A
1 9 5 7

Composição e impressão das oficinas
da "Coimbra Editora, Limitada"

PROPRIEDADES DE PERMANENCIA DOS ESPAÇOS (LN^*) E DOS SEUS DUAIS

J. SEBASTIÃO E SILVA

Na comunicação que apresentámos no Congresso Internacional de Matemáticos de 1954, introduzimos duas categorias de espaços localmente convexos, relacionados entre si por dualidade — os espaços (LN^*) e os espaços (M^*) — que se têm revelado particularmente úteis nas teorias das distribuições e dos funcionais analíticos, bem como nas aplicações destas teorias às transformações de FOURIER e de LAPLACE. Os resultados resumidos nessa comunicação foram publicados, *in extenso*, nos *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni* de Roma, série V, vol. 14 (1955), p. 388-410, sob o título «Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni».

Ora, verificámos, depois disso, que tais espaços apresentam uma notável estabilidade, a respeito de operações usuais da análise vectorial topológica, o que vem aumentar o seu interesse nas aplicações. Assim:

I — Todo o sub-espaço vectorial fechado dum espaço (LN^*) [*resp.* (M^*)] é ainda um espaço (LN^*) [*resp.* (M^*)].

II — Se E é um espaço (LN^*) e V um sub-espaço vectorial fechado de E , também o espaço quociente E/V é um espaço (LN^*) . Mais precisamente, se E for o limite indutivo duma sucessão regular de espaços normados E_n , também a sucessão de espaços $E_n/(V \cap E_n)$ é regular e tem por limite indutivo E/V .

III — Todo o espaço quociente dum espaço (M^*) por um seu sub-espaço vectorial fechado é ainda um (M^*) . Mais precisamente, se E é o limite projectivo duma sucessão de espaços

normados E_n em relação a um sistema de aplicações lineares compactas $g_{m,n}$ ($m \leq n$) e se V é um sub-espço linear fechado de E , também as aplicações definidas pelas primeiras entre os espaços $E_n/g_n(V)$ são compactas e o limite projectivo destes espaços a respeito de tais aplicações é isomorfo a E/V .

IV — O produto tensorial projectivo de dois ou mais espaços (LN^*) [*resp.* (M^*)], em número finito, ainda é um espaço (LN^*) [*resp.* (M^*)], havendo permutabilidade entre a operação de produto tensorial projectivo e a de passagem ao limite indutivo ou projectivo.

V — A soma directa duma família numerável $\{E_k\}$ de espaços (LN^*) ainda é um espaço (LN^*) . Mais precisamente, se cada espaço E_k ($k = 1, 2, \dots$), for limite indutivo duma sucessão regular de espaços normados $E_{k,1}, E_{k,2}, \dots$, também a sucessão de espaços normados.

$$E_{1,1}, E_{1,2} \times E_{2,2}, \dots, E_{1,n} \times E_{2,n} \times \dots \times E_{n,n}, \dots$$

cada um dos quais se pode considerar contido no seguinte, é regular e tem como limite indutivo a soma directa dos E_k .

VI — O produto vectorial topológico duma família numerável de espaços (M^*) ainda é um espaço (M^*) .

Uma das aplicações destes resultados será a topologização das teorias algébricas de KÖNIG sobre a multiplicação de distribuições. Com efeito, cada «teoria multiplicativa» de KÖNIG apresenta-se como um espaço quociente da álgebra tensorial do espaço D' das distribuições. Ora, esta álgebra é, como se sabe, a soma directa das potências tensoriais $\bigotimes^p D', p = 1, 2, \dots$. É assim de prever que cada «teoria multiplicativa» se apresente naturalmente como limite projectivo de espaços (LN^*) , tal como o próprio espaço das distribuições.

Também pudemos estabelecer recentemente que a classe dos espaços (M^*) coincide com a classe dos espaços de SCHWARTZ metrizáveis completos, segundo a terminologia de GROTHENDIECK.