

MEMÓRIAS
DA ACADEMIA
DAS CIÊNCIAS
DE LISBOA

CLASSE DE CIÊNCIAS

TOMO X



ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA
MCMLXVI

Sobre a equação da difusão de neutrões

1. A presente comunicação tem por fim expor alguns resultados relativos à equação da difusão de neutrões, obtidos pelo grupo de matemática aplicada, que trabalha sob a minha orientação, no Laboratório de Física e Engenharia Nucleares. Estas investigações foram sugeridas pelo artigo dos engenheiros nucleares P. LAFORE e J. P. MILLOT, referido mais adiante na Bibliografia. As fórmulas propostas nesse artigo não são correctas, mas o processo heurístico usado para as deduzir — no estilo dos trabalhos da escola de DIRAC — pode em parte ser aproveitado e corrigido. É então possível chegar a resultados certos, utilizando o método do cálculo simbólico que tenho desenvolvido, baseado na teoria das distribuições e outras funções generalizadas, associada à teoria dos operadores em espaços de Hilbert.

Continuam em curso, no referido Laboratório, investigações sobre este assunto, no sentido de generalizar o método utilizado a casos sucessivamente mais complexos.

Trata-se de um tema de grande actualidade, sobre o qual estão a ser publicados numerosos trabalhos e que vem pôr em evidência um facto infelizmente muitas vezes esquecido: a física continua a ser a principal fonte de inspiração da matemática e a matemática continua a ser cada vez mais necessária à física. É indispensável que, no mundo contemporâneo, haja número suficiente de matemáticos razoavelmente informados sobre os progressos da física, e número suficiente de físicos familiarizados com os modernos métodos da matemática, para que uns e outros possam entender-se mutuamente, num diálogo fecundo.

2. Os resultados que vou apresentar referem-se concretamente à equação de Boltzmann unidimensional

(1)

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \sum_T \Phi(x, \mu) - \frac{\sum_s}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') \Phi(x, \mu') d\mu' = S(x, \mu)$$

em que a incógnita, $\Phi(x, \mu)$, é o fluxo por unidade de ângulo sólido, no caso em que só depende da variável espacial x e do co-seno μ do ângulo com o eixo Ox , sendo $S(x, \mu)$ a fonte de neutrões, \sum_T a secção eficaz total, \sum_s a secção eficaz de «scattering» (ou difusão) e $p(\mu, \mu')$ uma função dada, representativa da densidade de probabilidade de que um neutrão, chocando segundo a direcção μ' , tome depois a direcção μ . É desprezada a perda de energia em choques elásticos e todos os outros choques são considerados como absorção.

A solução que vou apresentar refere-se ao caso em que $p(\mu, \mu') = 1$ — caso em que os choques podem ser considerados isótropos no sistema do laboratório. Mas o método utilizado pode ser estendido a outros casos, o que nos propomos fazer ulteriormente, como já anunciei.

Pondo $\sum_s = a$ e $\sum_T = b$, a mudança de variável

$$\mu = \frac{b}{y}$$

permite dar à equação (1) a forma

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) + y \varphi(x, y) - \frac{ay}{2} \int_I \frac{\varphi(x, \eta)}{\eta^2} d\eta = f(x, y)$$

em que

$$\varphi(x, y) = \Phi(x, \frac{b}{y}) \quad \text{e} \quad f(x, y) = \frac{y}{b} S(x, \frac{b}{y})$$

sendo I a reunião dos intervalos $] -\infty, -b]$, $[b, +\infty [$.

Por sua vez a equação integro-diferencial (2) pode escrever-se sob a forma

$$(3) \quad (D + A) \varphi = f,$$

em que D é o operador de derivação em ordem a x e A o operador definido pela fórmula

$$(4) \quad A_y \varphi(x, y) = y \varphi(x, y) - \frac{a y}{2} \int_I \frac{\varphi(x, \eta)}{\eta^2} d\eta.$$

Ora vamos ver que, para toda a função $f(x, y)$ que verifique determinadas condições, bastante gerais, a equação operacional (3) admite uma e uma só solução

$$\varphi = \frac{1}{D + A} f,$$

em que o operador $1/(D + A)$, inverso de $D + A$, pode ser determinado pelo método do cálculo simbólico a que já fiz referência e de que vou recordar os elementos fundamentais, que interessam directamente ao problema em estudo.

3. Seja E_o um espaço de Banach qualquer e consideremos um polinómio

$$P(z) = A_o z^n + \dots + A_{n-1} z + A_n$$

em que z é a variável complexa e, para cada $k = 0, \dots, n$, A_k é uma aplicação linear de um subespaço vectorial U_k de E_o sobre o espaço E_o . Seja

$$U = \bigcap_{k=0}^n U_k$$

Suponhamos que, para todo o número z imaginário puro e para todo o $f_o \in E_o$, a equação

$$P(z) u_o = f_o$$

admite uma solução *única*

$$u_o = [P(z)]^{-1} f_o \in U.$$

Fica pois assim definida sobre o eixo imaginário uma função $[P(z)]^{-1}$ cujos valores são aplicações lineares de E_o em U . Vamos supor que estas aplicações lineares são limitadas (relativamente à topologia de E_o) e que a função $[P(z)]^{-1}$ é indefinidamente diferenciável sobre o eixo imaginário, relativamente à topologia usual do espaço $L(E_o)$ das aplicações lineares limitadas de E_o em E_o .

Posto isto, designemos por E o espaço das distribuições f temperadas sobre \mathbb{R} , com valores em E_o , isto é, da forma

$$f(x) = F^{(n)}(x) = D^n F(x)$$

em que $F^{(n)}$ (ou $D^n F$) designa a derivada de ordem n , generalizada, de uma função F com valores em E_o , contínua e de crescimento lento sobre \mathbb{R} . É claro que, para todo o k , o operador A_k pode ser prolongado (univocamente) como aplicação linear de um subespaço U_k^* de E sobre E , segundo a fórmula

$$A_k f = D^n (A_k F),$$

sendo $(A_k F)(x) = A_k(F(x))$, para todo $x \in \mathbb{R}$ ⁽¹⁾.

Então, U_k^* é constituído por todas as distribuições do espaço E que tomam os valores em U_k . Seja ainda U^* a intersecção dos U_k^* .

Posto isto, consideremos a equação

$$(5) \quad P(D)u = f$$

em que f é uma distribuição dada arbitrariamente em E e D é o operador de derivação, sendo, evidentemente,

$$P(D) = A_o D^n + \dots + A_{n-1} D + A_n$$

(1) Uma vez que os operadores A_k são univocamente prolongáveis, não há inconveniente em representar os respectivos prolongamentos pelos mesmos símbolos.

Ora, segundo o referido cálculo simbólico, existe uma e uma só solução da equação (5) no espaço E (e mais precisamente em U^*), que é dada pela fórmula

$$u = [P(D)]^{-1} f = Q * f$$

em que Q é a transformada inversa de Laplace (bilateral) da função $[P(z)]^{-1}$. Então Q é a distribuição sobre \mathbb{R} , de decrescimento rápido, com valores em $L(E_o)$, dada pelo integral

$$(6) \quad Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{e^{x\lambda}}{P(\lambda)} d\lambda$$

e $Q * f$ é a convolução de Q por f

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x - \xi) f(\xi) d\xi,$$

que existe certamente, visto Q ser de decrescimento rápido.

4. Nem sempre é cómodo calcular o integral da fórmula (6) ou fazer raciocínios sobre este integral. Quando a função $[P(z)]^{-1}$ é holomorfa num conjunto aberto Ω que contém o eixo imaginário, é-se tentado a utilizar o *método dos resíduos*. Desde já devo notar que a teoria das ultradistribuições, de que me tenho ocupado desde 1957, permite efectuar uma generalização útil do método dos resíduos. Segundo esta generalização, é possível, conforme os casos, transformar o integral (6) numa série, num integral ou numa série de integrais que, muitas vezes, são mais cómodos para o cálculo, ou para o estudo qualitativo da solução, ou para ambos os fins.

O caso que nos interessa agora em particular, é aquele em que as singularidades da função $[P(z)]^{-1}$ formam um conjunto fechado S de números reais a que não pertence a origem, sendo aquela função holomorfa no conjunto $\mathbb{C} \setminus S$ e de crescimento lento para o eixo real e para o infinito. Então essa função é a transformada de Stieltjes de

uma distribuição temperada χ sobre \mathbf{R} , com valores em $L(E_o)$, dada pela fórmula

$$\chi(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{P(x + iy)} - \frac{1}{P(x - iy)} \right],$$

sendo a convergência tomada no sentido das distribuições temperadas com valores em $L(E_o)$.

Ora, neste caso, a referida generalização do método dos resíduos permite substituir a fórmula (6) pela seguinte, que lhe é equivalente:

$$(7) \quad Q(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 e^{xt} \chi(t) dt, & \text{para } x \geq 0 \\ -\int_0^{+\infty} e^{xt} \chi(t) dt, & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

Estas fórmulas desde logo apresentam uma vantagem. Fácilmente se reconhece, aplicando-as na hipótese considerada (sendo χ uma distribuição vectorial temperada sobre \mathbf{R}), que a distribuição $Q(x)$, *no complementar da origem*, é na realidade uma função que admite derivadas contínuas de todas as ordens e, mais do que isso, uma *função analítica*. Daqui se deduz facilmente o seguinte:

TEOREMA. *A distribuição $u = Q * f$ será uma função analítica, solução usual da equação (5), em todo o intervalo aberto de \mathbf{R} onde f for nula.*

Note-se que, na prática, o 2.º membro de (5) representa uma fonte, que geralmente é nula fora de um conjunto limitado. Mas do teorema anterior pode ainda deduzir-se o seguinte:

COROLÁRIO. *A distribuição $u = Q * f$ será uma função indefinidamente diferenciável, solução usual da equação (5), em todo o intervalo aberto de \mathbf{R} onde f for indefinidamente diferenciável.*

5. Tornemos agora à equação de Boltzmann na forma integro-diferencial (2) ou na forma operacional equivalente

$$(D + A) \varphi = f,$$

em que A é o operador dado por (4). O espaço E_o atrás considerado irá ser agora constituído por *todas as funções numéricas f_o tais que a função $f_o(y)/y^2$ de y pertence a $L^2(I)$* . Em E_o adoptaremos a estrutura hilbertiana dada pela forma hermitica

$$\langle f_o, g_o \rangle = \int_I \frac{f_o(y) g_o(y)}{y^4} dy$$

Então E_o será um espaço de Hilbert [isomorfo a $L^2(I)$] e portanto, em particular, um espaço de Banach.

Por sua vez, $P(z)$ será agora o polinómio $z+A$ e, segundo as considerações anteriores, devemos estudar a equação operacional

$$(z + A) \varphi_o = f_o,$$

dependente do parâmetro complexo z . Mas ser-nos-á cómodo pôr $z = -\lambda$, o que nos obrigará depois a substituir λ por $-D$. Somos assim levados a considerar a equação operacional $(A - \lambda) \varphi_o = f_o$, abreviatura da equação integral

$$(8) \quad (y - \lambda) \varphi_o(y) - \frac{\alpha y}{2} \int_I \frac{\varphi_o(\eta)}{\eta^2} d\eta = f_o(y)$$

com $f_o \in E_o$. A resolução desta equação integral não oferece dificuldade, visto que o integral do 1.º membro não depende de y , mas apenas de λ . Designando por $k(\lambda)$ essa função de λ , a equação anterior será equivalente à seguinte:

$$(y - \lambda) \varphi_o(y) - \frac{\alpha y}{2} k(\lambda) = f_o(y)$$

ou seja

$$(9) \quad \varphi_o(y) = \frac{f_o(y)}{y-\lambda} + \frac{\alpha y k(\lambda)}{2(y-\lambda)}$$

Bastará pois determinar $k(\lambda)$ de modo que, por substituição em (8), se obtenha uma identidade. Virá então, feitos os cálculos:

$$k(\lambda) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2\lambda} \log \frac{b+\lambda}{b-\lambda}} \int_I \frac{f_o(\eta)}{\eta^2(\eta-\lambda)} d\eta$$

o que, substituído em (9), dá a solução da equação integral (8), dependente de λ .

Ponhamos

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{\frac{2\lambda}{\alpha} - \log \frac{b+\lambda}{b-\lambda}}$$

A solução $\varphi_o = (A - \lambda)^{-1} f_o$, quando existe, será pois dada por

$$\varphi_o(y) = \frac{f_o(y)}{y-\lambda} + \frac{y g(\lambda)}{y-\lambda} \int_I \frac{f_o(\eta)}{\eta^2(\eta-\lambda)} d\eta$$

Como y varia no conjunto I , desde já se reconhece que não existe solução quando $\lambda \in I$. Por outro lado demonstra-se que $g(\lambda)$ é uma função meromorfa em $\mathbb{C} \setminus I$ com dois únicos polos de ordem 1, que são dois números reais simétricos α e $-\alpha$, tais que $0 < \alpha < b$, desde que seja

$$\alpha < b.$$

Ora esta condição é verificada na prática, visto ser α a secção eficaz de difusão e b a secção eficaz total.

Suponhamos agora $\|f_o\| < 1$ e seja ε um número que tal $0 < \varepsilon < \alpha$. Então, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, facilmente se reconhece que

$$(10) \quad \left| \int_I \frac{f_o(\eta)}{\eta^2(\eta - \lambda)} d\eta \right| \leq \left(\int_I \frac{1}{|\eta - \lambda|^2} d\eta \right)^{1/2} < \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2 + \varepsilon^2} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}$$

para todo o λ tal que $\text{dist}(\lambda, I) < \varepsilon$.

Posto isto, ponhamos $J = I \cup \{ \alpha, -\alpha \}$ e designamos por J_ε a vizinhança (ε) de J , isto é, o conjunto dos pontos de \mathbb{C} , cuja distância a J é menor que ε . Então do que precede resulta facilmente o seguinte:

Para todo o $\lambda \in \mathbb{C} \setminus J$, $(A - \lambda)^{-1}$ é uma aplicação linear limitada do espaço E_o em si mesmo e, para todo o $\varepsilon > 0$, a função $(A - \lambda)^{-1}$ de λ com valores em $L(E_o)$, é limitada sobre $\mathbb{C} \setminus J_\varepsilon$.

Daqui e de (10) resulta que:

A função $(A - \lambda)^{-1}$, com valores em $L(E_o)$, é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus J$ (portanto numa vizinhança do eixo imaginário) e é a transformada de Stieltjes de uma distribuição, com valores em $L(E_o)$, nula fora do conjunto J .

É natural designar esta distribuição vectorial por $\delta(A - t)$. Ter-se-á pois, no sentido das distribuições:

$$\delta(A - t) = \lim_{v \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{A - t - vi} - \frac{1}{A - t + vi} \right)$$

Veremos mais adiante como se pode achar uma expressão analítica de $\delta(A - t)$.

6. Podemos agora aplicar as considerações anteriores relativas ao operador D . O espaço U será neste caso a imagem do espaço E_o

pelo operador A^{-1} . Por sua vez, E será o espaço das distribuições temperadas com valores em E_0 . Então, cada elemento de E exprime-se como uma derivada generalizada em ordem a x de uma função

$$f(x, y)$$

tal que a correspondência $x \rightarrow f(x, y)$ é uma aplicação de \mathbf{R} em E_0 contínua e de crescimento lento sobre \mathbf{R} . Fácilmente se reconhece que este quadro é bastante amplo para permitir esquematizar todos os casos que se possam apresentar na prática.

A equação proposta

$$(D + A) \varphi = f,$$

terá portanto, para todo o $f \in E$, uma solução única dada pela fórmula

$$\varphi(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(x - \xi) f(\xi, y) d\xi,$$

em que \mathcal{R} é a distribuição com valores em $L(E_0)$ dada por

$$\mathcal{R}(x) = \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{e^{-x\lambda}}{A - \lambda} d\lambda$$

ou, o que é equivalente, por

$$(11) \quad \mathcal{R}(x) = \begin{cases} -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \delta(A - t) dt, & \text{para } x \geq 0 \\ \int_{-\infty}^0 e^{-xt} \delta(A - t) dt, & \text{para } x \leq 0 \end{cases}$$

Segundo o que precede, desde logo se reconhece que:

Nos intervalos abertos Ω de \mathbf{R} tais que $f(x, y) = 0$ para $x \in \Omega$, a solução obtida, $\varphi(x, y)$, é solução da equação (2) no sentido usual e a correspondência $x \rightarrow \varphi(x, y)$ é uma função analítica de x em Ω cujos valores são funções de y pertencentes a E_0 .

7. Vejamos agora como se pode achar uma expressão analítica para $\delta(A - t)$. Recordemos que toda a aplicação $K \in L(E_o)$ pode ser representada sob a forma de

$$K f_o(y) = \int_I k(y, \eta) f_o(\eta) d\eta$$

em que $k(y, \eta)$ é o núcleo-distribuição, definido em I^2 , do operador K . Assim, para todo o $\lambda \in \mathbf{C} \setminus J$, o núcleo do operador $(A - \lambda)^{-1}$ é

$$(12) \quad \frac{1}{y - \lambda} \delta(y - \lambda) + \frac{y g(\lambda)}{(y - \lambda) \eta^2 (\eta - \lambda)}$$

Pondo $\lambda = t + iv$, com $t, v \in \mathbf{R}$, e fazendo tender v para o^+ e para o^- , obtêm-se duas distribuições em y, η, t , cuja diferença, $\Delta(y, \eta, t)$, representa analiticamente $\delta(A - t)$ segundo a fórmula

$$(13) \quad \delta(A - t) f_o(y) = \int_I \Delta(y, \eta, t) f_o(\eta) d\eta$$

A expressão que se obtém deste modo para $\Delta(y, \eta, t)$ equivale à decomposição espectral que é feita heurísticamente, no estilo de Dirac, pelos já citados autores. É nos cálculos que correspondem à passagem da equação $(A - \lambda) \varphi_o = f_o$ à equação $(A + D) \varphi = f$ que o método heurístico usado nesse trabalho deixa de conduzir a resultados satisfatórios.

Note-se que, ao introduzir a expressão dada por (13) na fórmula (11), é lícito permutar as duas integrações. Ponhamos

$$E(x, t) = \begin{cases} -e^{-xt} & \text{quando } x \geq 0, t \geq 0 \\ e^{-xt} & \text{quando } x \leq 0, t \leq 0 \\ 0 & \text{quando } xt \leq 0 \end{cases}$$

Então, segundo (11):

$$(14) \quad \mathcal{R}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, t) \delta(A - t) dt.$$

Pode-se pois começar por calcular

$$\mathcal{D}(y, \eta; x) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, t) \Delta(y, \eta, t) dt,$$

e obtém-se em seguida, atendendo a (13) e (14):

$$\mathcal{R}(x)f_o(y) = \int_I \mathcal{D}(y, \eta, x)f_o(\eta)d\eta, \quad \text{para } f_o \in E_o,$$

donde, finalmente:

$$\varphi(x, y) = \int_{\mathbf{R}} \int_I \mathcal{D}(y, \eta, x - \xi)f(x, \eta)d\eta d\xi, \quad \text{para } f \in E,$$

Assim, tudo se reduz a duas integrações sucessivas sobre o eixo real. *A distribuição*

$$\mathcal{D}(y, \eta, x - \xi)$$

é o núcleo do operador $(D + A)^{-1}$.

Num trabalho a publicar pelo referido grupo de matemática aplicada do Laboratório de Física e Engenharia Nucleares será apresentada a expressão analítica deste núcleo, assim como as demonstrações e pormenores de cálculo que são omitidos nesta comunicação.

J. SEBASTIÃO E SILVA

(Comunicação apresentada à Classe de Ciências em sessão de 5 de Maio de 1966).

BIBLIOGRAFIA

- P. LAFORE et J.-P. MILLOT — *Étude de l'équation de Boltzmann à une dimension, la perte d'énergie par choc élastique étant négligée*. Industries Atomiques, n.° 9/10 (1958).
- J. SEBASTIAO E SILVA — *Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables à spectre vide ou non borné*. Annali di Matematica Pura ed Applicata (4), vol. 58 (1962), p. 219-275.