

UNIVERSIDADE DE LISBOA

REVISTA
DA
FACULDADE DE CIÊNCIAS

2.^A SÉRIE

A — CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

VOL. I



1950

BIBLIOTECA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS

Rua da Escola Politécnica

LISBOA

SOBRE A TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS FUNCIONAIS ANALÍTICOS

P O R

J. SEBASTIÃO E SILVA

§ 1.º — Considerações gerais sobre espaços topológicos e espaços vectoriais

Neste trabalho, salvo indicação em contrário, adoptarei a terminologia e as notações que já usei na minha dissertação de doutoramento, a qual, em tudo o que segue, será aqui designada por «1.ª dissertação». Contudo, para evitar ao leitor maior fadiga, e mesmo para comodidade de exposição, várias noções importantes irão sendo aqui recordadas no decurso do trabalho. Este primeiro parágrafo é dedicado sobretudo a noções já conhecidas (em geral não recordadas na 1.ª dissertação), mas também serão já aqui introduzidos novos pontos de vista.

1. Espaços topológicos. — O conceito geral de espaço topológico (segundo Fréchet) é o dum sistema (U, Φ) , constituído por um conjunto U qualquer e por um operador Φ , que, a cada subconjunto A de U , faça corresponder um subconjunto A de U , chamado *fecho* de A , de acordo com as condições:

I. $A \subset \Phi(A)$, qualquer que seja $A \subset U$.

II. $\Phi(O) = O$ (designando por O o conjunto vazio).

Diz-se que um ponto (elemento de U) é *aderente* a A quando pertence a $\Phi(A)$; o fecho de A será pois o conjunto dos pontos aderentes a A . Correntemente, quando não há a considerar mais de um operador de fecho, é usada a notação \bar{A} em vez da notação $\Phi(A)$. Todas as demais noções topológicas (de ponto de acumulação, de interior, de fronteira, etc.) podem ser introduzidas a partir da noção de fecho, segundo as definições usuais ⁽¹⁾.

Todavia, tal conceito de espaço topológico é demasiado geral para que dele se possam obter resultados interessantes, aplicáveis a casos concretos. Um conceito mais rico em consequências é já o de «espaço (V) » ou o «espaço de vizinhanças», que convém aqui recordar. Suponhamos que, a cada elemento p de U , está associada uma família qualquer de subconjuntos de U , chamados *vizinhanças* de p e sujeitos unicamente à condição de conterem p ; convencionemos agora dizer que um ponto $p \in U$ é *aderente* a um dado conjunto $A \subset U$, quando, em toda a vizinhança de p , existir pelo menos um elemento de A ; nestas condições, chamando fecho de A ao conjunto de todos os pontos aderentes a A (segundo tal convenção), fica definida em U uma estrutura topológica, com a qual U se chamará um espaço (V) . Como é notório, os espaços (V) podem ser caracterizados unicamente em termos de «fecho»: para que um espaço topológico (U, Φ) seja um espaço (V) (isto é, tal que a definição de operador Φ possa ser dada, como anteriormente, a partir de um conceito adequado de vizinhança), é necessário e suficiente que seja verificada a condição:

III. $A \subset B$ implica $\Phi(A) \subset \Phi(B)$.

(1) Veja-se RIBEIRO [I].

Os espaços (V) podem portanto ser definidos directamente como *sistemas* (U, Φ) que satisfazem às condições \bar{I} , \bar{II} , \bar{III} .

Em grande parte dos espaços topológicos que se apresentam na prática, é ainda verificada a seguinte condição, equivalente à condição 2.^a de F. Riesz:

$$\bar{IV}. \quad \Phi(A \cup B) \subset \Phi(A) \cup \Phi(B),$$

a qual se funde com \bar{III} , na fórmula:

$$\bar{III}, \bar{IV}. \quad \Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B),$$

que traduz a distributividade (finita) do operador Φ a respeito da reunião.

Por outro lado, muitos dos espaços topológicos usuais verificam esta outra condição:

$$\bar{V}. \quad \Phi(\Phi(A)) = \Phi(A).$$

Chamando, como é costume, *conjuntos fechados* aos conjuntos que coincidem com o respectivo fecho, esta condição pode exprimir-se dizendo que o fecho dum conjunto é sempre um conjunto fechado.

Exemplo clássico dum espaço (V) que não verifica a condição \bar{V} é o das funções reais duma variável real, definidas num mesmo intervalo, com a definição de convergência pontual. Trata-se, como se viu na 1.^a dissertação, dum *espaço* (L) ou *espaço de convergência*.

Recordemos a definição de espaço (L): Um conjunto U torna-se um espaço (L), quando, a cada uma de certas sucessões $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ de elementos de U (chamadas sucessões *convergentes*), se faz corresponder um e *um só* elemento de U, chamado *limite* da sucessão (p_n) e representável por $\lim p_n$, de modo que resultem verificadas as condições:

L1. Se $p = \lim p_n$ e se (p_n^*) é uma subsucessão de (p_n) , também $p = \lim p_n^*$.

L2. Se $p_n = p$, qualquer que seja n , então $\lim p_n = p$.

(Por *subsucessão* de (p_n) entende-se aqui toda a sucessão (p_{k_n}) , tal que $k_1 < k_2 < \dots$).

Nos espaços (L), a estrutura topológica é introduzida a partir do conceito de «limite duma sucessão», mediante a definição:

[1.1] Diz-se que um ponto p é «aderente» a um dado conjunto A , quando existe pelo menos uma sucessão de pontos de A convergente para p .

Resulta desta definição que todo o espaço de convergência verifica a condição \overline{IV} (embora nem sempre verifique a condição \overline{V} , como sucede no exemplo anterior).

Aos espaços (V) que verificam a condição \overline{V} chamaremos espaços (F), segundo A. Monteiro [I]. Apresentam de notável estes espaços o facto de a sua topologia poder ser introduzida a partir da família \mathfrak{F} de todos os conjuntos fechados do espaço: o *fecho* dum conjunto A é o menor (isto é, a *intersecção*) de todos os conjuntos fechados que contêm A . Para obter um espaço (F), a família \mathfrak{F} dos conjuntos fechados pode ser dada arbitrariamente, obedecendo apenas à esta condição: «A intersecção de conjuntos quaisquer pertencentes a \mathfrak{F} (em número finito ou infinito) é ainda um conjunto de \mathfrak{F} ». Pode também obter-se um espaço (F), dando, em vez da família dos conjuntos fechados, a família \mathfrak{D} dos conjuntos abertos (complementares dos primeiros) a qual deve obedecer à condição: «A reunião de conjuntos de \mathfrak{D} é sempre um conjunto de \mathfrak{D} »; neste caso, o *interior* dum conjunto A será o maior dos conjuntos abertos contidos em A e o *fecho* de A o conjunto dos pontos não interiores ao complementar de A .

2. Comparação e composição de topologias. — Todo o operador de fecho introduzido num conjunto fundamental U define sobre este conjunto uma determinada *estrutura topológica* ou *topologia* τ , isto é, um determinado sistema de noções topológicas (de «interior», de «fronteira», de «conexão», etc.). Dados dois operadores de fecho Φ_1, Φ_2 , sobre um mesmo conjunto U , diremos que a topologia τ_1 definida por Φ_1 *precede* a topologia τ_2 definida por Φ_2 e escreveremos

$$\tau_1 \subset \tau_2,$$

quando se tiver

$$\Phi_1(A) \subset \Phi_2(A), \text{ qualquer que seja } A \subset U.$$

Se as duas relações

$$\tau_1 \subset \tau_2, \quad \tau_2 \supset \tau_1$$

forem simultâneamente verificadas, as topologias τ_1, τ_2 serão idênticas:

$$\tau_1 = \tau_2,$$

o mesmo acontecendo para os operadores de fecho: $\Phi_1 = \Phi_2$.

Se $\tau_1 \subset \tau_2$ e $\tau_1 \neq \tau_2$, diremos que τ_1 é *mais fraca* que τ_2 .

Suponhamos que $(U, \Phi_1), (U, \Phi_2)$ são espaços (V) e sejam $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_x$ duas famílias de vizinhanças associadas a um ponto genérico x de U , as quais determinem, respectivamente, as topologias τ_1, τ_2 . Então:

[2.1] *Condição necessária e suficiente para que se tenha $\tau_1 \subset \tau_2$ é que, para cada vizinhança W_x da família \mathfrak{B}_x exista pelo menos uma vizinhança V_x da família \mathfrak{B}_x tal que $V_x \subset W_x$.*

É claro que esta mesma proposição nos fornece um critério para saber se as duas famílias de vizinhanças são *topologicamente equivalentes*, isto é, se definem ou não a

mesma topologia ⁽¹⁾. O facto de poderem existir dois sistemas diferentes de vizinhanças definidoras da mesma topologia, significa que a noção de vizinhança não é uma noção topológica, a não ser em casos particulares: por ex., no caso de a família das vizinhanças associadas a cada ponto x ser a mais ampla possível (sendo então constituída por todos os conjuntos a que x é interior). Recordemos ainda este facto: *Para que um espaço (V) seja um espaço (F), é necessário e suficiente que a topologia desse espaço possa ser definida a partir dum sistema de vizinhanças constituídas por conjuntos abertos.*

Suponhamos agora que os sistemas (U, Φ_1) , (U, Φ_2) são espaços (F). Condição necessária e suficiente para que resulte $\tau_1 \subset \tau_2$ é que se tenha $\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$, sendo \mathfrak{F}_1 e \mathfrak{F}_2 , respectivamente, as famílias de conjuntos fechados definidoras de τ_1 e de τ_2 ⁽²⁾.

Consideremos a família T de todas as possíveis topologias sobre o conjunto U . A respeito da relação \subset atrás definida, a família T constitue um *reticulado* ⁽³⁾, em que existe o extremo superior e o extremo inferior de qualquer sub-família. Mais precisamente, dada uma família $\{\tau_i\}$ de topologias sobre U e representada em geral por Φ_i a operação de fecho que define τ_i , o *extremo superior* da família $\{\tau_i\}$ é a topologia τ definida pelo operador Φ tal que

$$\Phi(A) = \bigcup_i \Phi_i(A), \text{ qualquer que seja } A \subset U;$$

e o extremo inferior de $\{\tau_i\}$ é a topologia τ_* definida pelo operador Φ_* tal que

$$\Phi_*(A) = \bigcap_i \Phi_i(A), \text{ qualquer que seja } A \subset U \text{ } ^{(4)}.$$

(1) Veja-se, p. ex., APPERT [I], pág. 8.

(2) BOUBARKI [I], MONTEIRO [I].

(3) Traduzo aqui «lattice» por «reticulado». Veja-se BIRKHOFF [I].

(4) Em geral, dada uma família $\{X_i\}$ de conjuntos, represento por $\bigcup_i X_i$ a sua reunião e por $\bigcap_i X_i$ a sua intersecção.

Suponhamos porém que todos os sistemas (U, Φ_i) considerados são espaços (F) : então o sistema (U, Φ_*) será também, necessariamente, um espaço (F) , mas pode o mesmo *não* acontecer com o sistema (U, Φ) . Por isso, *quando não se admitam outros espaços topológicos além dos espaços (F)* , o extremo superior das topologias τ_i tem de ser definido de maneira diversa da anterior⁽¹⁾: Seja em geral \mathfrak{F}_i a família dos conjuntos fechados que define em U a topologia τ_i ; então o extremo superior da família $\{\tau_i\}$ será neste caso definida como a topologia para a qual os conjuntos fechados são os conjuntos comuns a todas as famílias \mathfrak{F}_i , isto é, os conjuntos da família $\bigcap_i \mathfrak{F}_i$.

3. Conceitos de «espaço reunião» e de «espaço intersecção». — Nas considerações precedentes, supunha-se que todas as topologias τ_i eram definidas num mesmo conjunto fundamental U . Todavia, para o estudo que terá de ser feito ulteriormente, há que introduzir aqui conceitos mais gerais.

[3.1] DEFINIÇÕES. Consideremos uma família de espaços topológicos $S_i = (U_i, \Phi_i)$, constituídos por conjuntos fundamentais U_i , possivelmente distintos, e por correspondentes operadores de fecho, Φ_i . Chamaremos «*espaço reunião*» da família $\{S_i\}$ ao espaço (U, Φ) assim definido:

$$U = \bigcup_i U_i; \quad \Phi(A) = \bigcup_i \Phi_i(A \cap U_i), \quad \text{para cada } A \subset U;$$

e «*espaço intersecção*» da mesma família ao espaço (U_*, Φ_*) assim definido:

$$U_* = \bigcap_i U_i; \quad \Phi_*(A) = \bigcap_i \Phi_i(A), \quad \text{para cada } A \subset U_*.$$

Por outros termos:

(1) BOURBAKI [I], MONTEIRO [I].

[3.2] Dizer que $x \in \Phi(A)$ equivale a dizer que x é aderente a algum subconjunto de A num *pelo menos* dos espaços S_i . Dizer que $x \in \Phi_*(A)$ equivale a dizer que x é aderente a A em *todos* os espaços S_i .

Supondo agora que, em cada um dos espaços S_i , a operação de fecho Φ_i é introduzida mediante um sistema de vizinhanças $\mathfrak{B}_i(x)$, podemos assentar no seguinte resultado:

[3.3] TEOREMA. *Um sistema admissível de vizinhanças para o espaço reunião (U, Φ) é aquele constituído por todos os conjuntos da forma $V(x) = \bigcup_i V_i(x)$, em que $V_i(x)$ representa um elemento qualquer da família $\mathfrak{B}_i(x)$, sendo a operação \bigcup_i estendida a todas as determinações de i tais que $x \in U_i$.*

Demonstração. Seja Θ a operação de fecho introduzida em U pelo sistema $\mathfrak{B}(x) = \{V(x)\}$. Trata-se de provar que $\Theta = \Phi$. Consideremos então dados arbitrariamente um elemento p e um subconjunto A de U . Suponhamos que $p \in \Phi(A)$; quer isto dizer que existe pelo menos um espaço S_i tal que $p \in \Phi_i(A \cap U_i)$; mas, como cada vizinhança da família $\mathfrak{B}(p)$ contém uma vizinhança $V_i(p)$ da família $\mathfrak{B}_i(p)$, segue-se que também $p \in \Theta(A)$. Suponhamos agora que $p \notin \Theta(A)$; quer isto dizer que, em cada vizinhança da família $\mathfrak{B}(p)$, existe pelo menos um ponto de A ; então, se fosse $p \notin \Phi(A)$, haveria, em todo o espaço S_i que contivesse p , pelo menos uma vizinhança $V_i^*(p)$ da família $\mathfrak{B}_i(p)$ disjunta de A e portanto também o seria a vizinhança $\bigcup_i V_i^*(p)$ da família $\mathfrak{B}(p)$, o que é contrário à hipótese⁽¹⁾; logo, ter-se-á também $p \in \Phi(A)$. Em conclu-

(1) Nesta parte da demonstração intervém o axioma de Zermelo, mas, no caso concreto a que o teorema será mais adiante aplicado, o referido axioma pode ser dispensado.

são: $\Theta(A) = \Phi(A)$, para todo o $A \subset U$, ou seja $\Theta = \Phi$
q. e. d.

Anàlogamente se demonstra que:

[3.4] *Um sistema admissível de vizinhanças para o espaço intersecção (U_*, Φ_*) é aquele constituído por todos os conjuntos da forma $V(x) = U_* \cap V_i(x)$, para todas as determinações de i .*

Convém ainda tomar nota do seguinte resultado:

[3.5] **TEOREMA.** *Se A é um conjunto fechado [aberto] no espaço reunião (U, Φ) , também o conjunto $A \cap U_i$ será fechado [aberto] no espaço S_i , qualquer que seja i .*

Demonstração. Suponhamos que A é fechado no espaço $S = (U, \Phi)$. Se, para algum espaço S_i , o conjunto $A \cap U_i$ não fosse fechado, haveria pelo menos um ponto p de U_i tal que

$$p \in \Phi_i(A \cap U_i), \quad p \notin A \cap U_i.$$

Mas da primeira relação deduz-se

$$(1) \quad p \in \Phi(A),$$

enquanto da segunda resulta

$$(2) \quad p \notin A$$

(pois que, se fosse $p \in A$, como é $p \in U_i$, viria $p \in A \cap U_i$).

Porém, (1) e (2) significam que A não é fechado no espaço S , contrariamente à hipótese inicial.

Suponhamos agora que A é aberto no espaço S . Então, o conjunto $U - A$, complementar de A em U , será fechado neste espaço, e portanto o conjunto $(U - A) \cap U_i = U_i - A$ será também fechado em S_i , qualquer que seja i . Logo $A \cap U_i$ será aberto em S_i , qualquer que seja i ,

q. e. d.

Imediatamente se reconhece que

[3.6] *Se em cada um dos espaços S_i é verificada a condição \bar{IV} (n.º 1), o mesmo acontece no espaço reunião S .*

Porém, como veremos adiante, a condição \bar{V} pode ser verificada em cada um dos espaços S_i sem o ser no espaço S .

Nos espaços topológicos usuais, é muitas vezes verificada a seguinte propriedade, conhecida por 1.ª *condição de separação* («Erstes Trennungssaxiom») ou *condição 4.ª de F. Riesz*:

CONDIÇÃO T_1 . *Se A é formado dum só elemento, então $\bar{A} = A$ (isto é, A é fechado).* Em termos de «vizinhança»:

Dados dois pontos quaisquer p, q , existe sempre, pelo menos, uma vizinhança de p que não contém q (e vice-versa).

Imediatamente se reconhece que

[3.7] *Se em cada um dos espaços S_i é verificada a condição T_1 , o mesmo acontece no espaço reunião.*

Porém já o mesmo se não pode afirmar quanto à 2.ª condição de separação (designada por T_2) e que se enuncia:

Para cada par de pontos p, q , existem, pelo menos, duas vizinhanças respectivas $V(p), V(q)$, que são disjuntas.

4. Caso dos espaços (L). Espaços (L^*) . — Já na 1.ª dissertação foi definido um conceito de «soma de espaços (L) vectoriais». (Neste trabalho será usado de preferência o termo «reunião» em vez de «soma»).

Definiremos agora o conceito mais geral de «reunião de espaços (L)».

Consideremos uma família de espaços (L)

$$S_i = (U_i, \lim^{(i)})$$

constituídos por conjuntos fundamentais U_i e por correspondentes operadores de convergência, $\lim^{(i)}$. Posto isto, representemos por U o conjunto $\bigcup_i U_i$ e adoptemos a seguinte definição:

[4.1] Diz-se que uma dada sucessão $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ de elementos de U tem por limite um dado elemento p de U , e escreveremos $p = \lim p_n$, quando existe *pelo menos* um espaço S_μ da família $\{S_i\}$ no qual se tenha $p = \lim^{(\mu)} p_n$.

Todavia, para que o operador \lim assim definido seja unívoco e o sistema (U, \lim) resulte deste modo um espaço (L) , é necessário (e suficiente) impor aos espaços S_i a seguinte condição: *Se a sucessão (p_n) é convergente em dois espaços S_μ, S_ν da família $\{S_i\}$, tem-se necessariamente $\lim^{(\mu)} p_n = \lim^{(\nu)} p_n$.*

[4.2] Uma vez verificada esta condição, diremos que o sistema $S = (U, \lim)$ é, *como espaço (L)* , a reunião dos espaços S_i .

Mas notemos por outro lado que, em cada um dos conjuntos U_i , pode ser introduzida uma operação de fecho, Φ_i , a partir do operador de convergência $\lim^{(i)}$, conforme foi recordado no n.º 1. Então, imediatamente se reconhece que:

[4.3] *A operação de fecho, Φ , do espaço reunião (U, Φ) da família constituída pelos espaços (U_i, Φ_i) é precisamente a mesma que se obtém directamente em U a partir do operador \lim acima considerado.*

Entretanto, há que manter a distinção entre os conceitos de «reunião de espaços topológicos» e «reunião de espaços (L) », em virtude das circunstâncias que vão ser apontadas.

O conceito de convergência, tal como o de vizinhança, determina uma topologia no conjunto em que é definido, *mas não quer isso dizer que ele mesmo seja, necessariamente, uma noção topológica, isto é, que possa ser definido a partir da noção de fecho (como já se tinha observado na 1.ª dissertação).*

Para que a noção de limite possa ser definida em termos de fecho, deve acrescentar-se às condições L1, L2 (n.º 1), a seguinte condição ⁽¹⁾:

L3. *Se a sucessão (p_n) é tal que toda a subsucessão (p_n^*) de (p_n) contém pelo menos uma sucessão convergente para p , então $p = \lim p_n$.*

Posto isto:

[4.4] Chama-se *espaço* (L^*) (segundo Kuratowsky) todo o espaço (L) que verifica a condição L3

Pode então demonstrar-se que:

[4.5] *Para que, num espaço (L^*) , se tenha $p = \lim p_n$, é necessário e suficiente que, qualquer que seja a subsucessão (p_n^*) de (p_n) , o elemento p resulte aderente ao conjunto dos elementos de (p_n^*) .*

Esta proposição fornece, manifestamente, uma definição de «limite» em termos de «fecho». E é fácil ver ainda que:

[4.6] *Para que, num espaço (L^*) , se tenha $p = \lim p_n$, é necessário e suficiente que, a toda a vizinhança V de p , corresponda uma ordem ν tal que*

$$p_n \in V \quad \text{para} \quad n > \nu.$$

Tal proposição fornece um critério para definir «limite» em termos de «vizinhança» — precisamente o mesmo cri-

(1) KURATOWSKY [I], pág. 76.

tério que se adopta habitualmente nos espaços (D) e, mais geralmente ainda, nos espaços (E).

Interessa-nos porém salientar que, reciprocamente:

[4.7] *Todo o espaço (L) em que a noção de limite possa ser definida segundo o critério expresso em [4.5] ou segundo o critério expresso em [4.6], é um espaço (L*).*

E há ainda que pôr em relevo o seguinte facto:

[4.8] *Se os sistemas $(U_i, \lim^{(i)})$ são espaços (L*), não se pode daí concluir sem mais que o mesmo suceda com o espaço (L) reunião dos primeiros, segundo a definição atrás adoptada.*

Estas observações intervêm de maneira essencial nas considerações que irão desenvolver-se mais adiante.

5. Transformações contínuas — Sejam $S_1 = (U_1, \Phi)$, $S_2 = (U_2, \Phi)$ dois espaços (V) quaisquer (para comodidade representamos pelo mesmo símbolo Φ a operação de fecho em ambos os espaços) e designe T uma transformação unívoca de domínio $A \subset S_1$ e de contradomínio $B \subset S_2$. Recorde-se que a noção de continuidade pode ser introduzida pelo menos de dois modos diversos:

1) *No sentido de Cauchy*: Diz-se que T é *contínua* num dado ponto p de A, quando, para cada vizinhança W de $T(p)$, existe, pelo menos, uma vizinhança V de p tal que $T(V \cap A) \subset W$.

Este mesmo conceito de continuidade pode ser definido em função de fecho, tal como segue: T é *contínua* em p , se, e só se, a todo o subconjunto de A a que é aderente p , corresponde, por meio de T, um subconjunto de B a que é aderente $T(p)$.

2) *No sentido de Heine*: Suponhamos que S_1, S_2 são espaços (L). Diz-se que T é *contínua* em p quando, a toda

a sucessão de elementos de A convergente para p corresponde, por meio de T , uma sucessão de elementos de B convergente para $T(p)$.

Tendo em vista o que atrás foi dito, é fácil ver que:

[5.1] Se S_1, S_2 são espaços (L^*) , «continuidade no sentido de Cauchy» e «continuidade no sentido de Heine» são expressões equivalentes.

Porém, se S_1, S_2 são apenas espaços (L) , pode, quando muito, garantir-se que a continuidade à Heine implica a continuidade à Cauchy ⁽¹⁾.

A transformação dir-se-á simplesmente *contínua* quando for contínua em todos os pontos do conjunto A em que é definida; se além disso se tiver $A = U_1$, a condição de continuidade à Cauchy assume a forma:

$$T(\Phi(X)) \subset \Phi(T(X)), \quad \text{para } X \subset U_1,$$

enquanto a condição de continuidade à Heine assume a forma:

$$T(\lim_n x_n) = \lim_n (T(x_n)), \quad \text{para } x_n \in U_1.$$

[5.2] CONVENÇÃO. Para comodidade, em vez de «*contínua no sentido de Cauchy*», diremos simplesmente «*contínua*», e, em vez de «*contínua no sentido de Heine*», diremos «*L-contínua*». Esta convenção está de acordo com o facto de a continuidade à Heine implicar a continuidade à Cauchy.

(1) Note-se que não intervém aqui o axioma de Zermelo, porquanto a operação de fecho se supõe introduzida em S_1 e S_2 segundo a def. [1.1]. No caso clássico dos espaços métricos, o axioma de Zermelo é invocado para mostrar que a topologia assim definida coincide com a topologia introduzida mediante vizinhanças segundo o critério usual.

Das definições precedentes deduz-se imediatamente o seguinte resultado:

[5.3] *Sejam S, S^* dois espaços (V), o primeiro dos quais definido como reunião de uma família $\{S_i\}$ de espaços (V). Seja T uma transformação unívoca de domínio $A \subset S$ e de contradomínio $A^* \subset S^*$. Condição necessária e suficiente para que T seja contínua num ponto p de A é que seja contínua em p a respeito das topologias de todos os espaços S_i de que S é reunião e tais que $p \in S_i$.*

Este resultado subsiste, supondo que se trata de espaços (L) e de L-continuidade. Por dualidade, obtém-se um resultado análogo supondo que S^* é definido com *intersecção* de espaços.

6. Conceitos de «espaço produto». Funções contínuas de mais de uma variável. — Sejam

$$S_1 = (U_1, \Phi), \quad S_2 = (U_2, \Phi), \quad \dots, \quad S_n = (U_n, \Phi),$$

espaços (V) quaisquer. Chamaremos *espaço produto* de S_1, S_2, \dots, S_n , na ordem em que estão escritos, ao espaço que usualmente se chama *produto topológico* de S_1, S_2, \dots, S_n , isto é, ao espaço (U, Φ) , que tem por conjunto fundamental o produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ e em que se *pode* escolher para sistema de vizinhanças de cada ponto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ a família de todos os conjuntos V da forma $V = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$, sendo V_1, \dots, V_n , respectivamente, vizinhanças de a_1, \dots, a_n em S_1, \dots, S_n .

Todavia, sendo S_1, S_2, \dots, S_n espaços (L):

$$S_1 = (U_1, \text{lim}), \quad S_2 = (U_2, \text{lim}), \quad \dots, \quad S_n = (U_n, \text{lim}),$$

é-se levado naturalmente a definir *espaço produto* de S_1, S_2, \dots, S_n como o espaço (L) que se obtém sobre o conjunto $U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ considerando o ope-

rador *lim* assim definido: Dados um ponto $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ de U e uma sucessão de pontos $\mathbf{x}_p = (x_{1,p}, \dots, x_{n,p})$ de U , tem-se

$$\lim_p \mathbf{x}_p = \mathbf{x}, \text{ se e só se } \lim_p x_{i,p} = a_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Como é sabido, se S_1, \dots, S_n são espaços (D), há equivalência entre os dois referidos conceitos de espaço produto: a topologia introduzida em U pelo operador *lim* coincide com a topologia do produto topológico $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, tal como este foi primeiro definido. Porém, no caso geral, a equivalência não é necessariamente verificada.

Estes conceitos estão directamente relacionados com o conceito de continuidade para funções de mais de uma variável. Sejam x_1, x_2, \dots, x_n variáveis sobre os conjuntos U_1, U_2, \dots, U_n , respectivamente. Consideremos uma função $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ destas variáveis, definida num subconjunto A de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ e cujos valores pertençam a um espaço (V) qualquer, S^* . Obtém-se um conceito fraco de continuidade, dizendo que φ é contínua quando o for a respeito de cada uma das variáveis x_1, \dots, x_n , separadamente. Mas, em geral, exige-se uma condição mais forte: Diz-se que φ é função contínua de x_1, x_2, \dots, x_n quando representa uma função contínua do ponto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ no espaço produto S . Como se sabe, nem sequer no caso das funções de variáveis reais é verificada equivalência entre estes dois conceitos de continuidade.

As duas definições precedentes podem imediatamente ser transpostas para o caso dos espaços (L). Suponhamos, para maior simplicidade, que se trata duma função de duas variáveis, $\varphi(x, y)$. Então, a condição de L-continuidade fraca tomará a forma:

$$\lim_n \varphi(x_n, y) = \varphi(\lim_n x_n, y) \quad , \quad \lim_n \varphi(x, y_n) = \varphi(x, \lim_n y_n);$$

enquanto a condição de *L-continuidade própria dita* toma a forma

$$\lim_n \varphi(x_n, y_n) = \varphi(\lim_n x_n, \lim_n y_n),$$

sendo $(x_n), (y_n)$ sucessões convergentes arbitrárias, tais que $(x_n, y_n) \in A$.

7. Espaços (V) vectoriais. — Consideremos um espaço vectorial S , real ou complexo, que seja ao mesmo tempo um espaço (V), e representemos por Δ o corpo dos escalares, real ou complexo ($\Delta = \mathbb{R}$ ou $\Delta = \mathbb{K}$).

Então, será definida em S , além da adição e dos multiplicadores escalares, uma operação de fecho, Φ :

$$S = (U, +, \Delta, \cdot, \Phi).$$

Para que este conceito seja susceptível de aplicações interessantes, convém supor pelo menos que as duas operações vectoriais — *adição* e *multiplicação escalar* — são contínuas a respeito de Φ . Mas como se trata de funções de duas variáveis

$$x + y, \quad \xi \cdot x, \quad \text{com } x, y \in U, \quad \xi \in \Delta,$$

a continuidade pode ser entendida de duas maneiras, como há pouco foi indicado.

[7.1] Diremos que S é um *espaço (V) vectorial em sentido restrito*, quando $x + y$ for função contínua do ponto (x, y) em $U \times U$ e $\xi \cdot x$ for função contínua do ponto (ξ, x) em $\Delta \times U$.

[7.2] Diremos que S é um *espaço (V) vectorial em sentido lato*, quando $x + y$ e $\xi \cdot x$ forem funções contínuas em relação a cada uma das variáveis x, y ($x \in U, y \in U$) e ξ, x ($\xi \in \Delta, x \in U$), consideradas separadamente.

Em qualquer dos casos basta conhecer um sistema \mathfrak{B} de vizinhanças do vector nulo, para que a topologia fique determinada: *um sistema admissível de vizinhanças de um elemento a qualquer de U será a família dos conjuntos da forma $a + V$, com $V \in \mathfrak{B}$* . Além disso, tem-se a conhecida propriedade:

[7.3] *Uma transformação linear (ou simplesmente aditiva), entre dois espaços (V) vectoriais, é continua em todos os pontos, desde que o seja num ponto dado, qualquer.*

Se a operação de fecho definida em S verifica ainda as condições \overline{IV} , \overline{V} (n.º 1) e T_1 (n.º 3), o sistema S é o que se costuma chamar *espaço vectorial topológico*. Trata-se dum conceito bastante fecundo, equivalente ao de *espaço vectorial pseudo-normado*, que tem dado lugar a extensa bibliografia na última década (veja-se, por exemplo, HYERS [I]).

NOTA: Até aqui temos feito a distinção entre o espaço S e o seu conjunto fundamental U, mas nos casos correntes não há perigo em confundir S com U, dizendo indiferentemente «o espaço S» ou «o conjunto S». Na realidade, um espaço é um conjunto *organizado* por meio de certas relações.

8. Espaços (L) vectoriais. — Consideremos agora um espaço vectorial S (real ou complexo), que seja ao mesmo tempo um espaço (L):

$$S = (U, +, \Delta, \cdot, \lim).$$

Convirá, para as aplicações, supor que a adição e a multiplicação escalar são L-continuas em S. A L-continuidade pode aqui ser entendida de dois modos diversos, como foi atrás indicado, mas basta que nos limitemos à a epção restrita:

[8.1] Diremos que S é um *espaço* (L) *vectorial*, quando valem as regras:

$$\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n, \quad \lim (\xi_n \cdot x_n) = \lim \xi_n \cdot \lim x_n,$$

sendo (x_n) , (y_n) duas sucessões quaisquer convergentes de elementos de U e (ξ_n) uma qualquer sucessão convergente de elementos de Δ ⁽¹⁾.

É fácil ver que todo o espaço (L) vectorial é, pelo menos, um espaço (V) vectorial em sentido lato.

É ainda manifesto que:

[8.2] *Num espaço (L) vectorial, condição necessária e suficiente para que $\lim x_n = a$ é que $\lim (x_n - a) = 0$.*

[8.3] *Uma transformação aditiva entre dois espaços (L) vectoriais será L-contínua em todos os pontos, desde que o seja num ponto dado, qualquer.*

Recordemos agora o conceito de «reunião de espaços (L) vectoriais». Consideremos uma família $\{S_i\}$ de espaços (L) vectoriais complexos e representemos por S a reunião de todos os conjuntos S_i . Posto isto, adoptemos as seguintes convenções: 1) *soma* de dois dados elementos a, b de S é a soma desses elementos num pelo menos dos espaços S_i (ao qual a, b pertençam conjuntamente); 2) produto dum número complexo λ por um elemento a de S_i é o produto de λ por a num pelo menos dos espaços S_i ; 3) a é limite duma sucessão (a_n) de elementos de U , se existe, pelo menos, um espaço S_i , no qual (a_n) converge para a .

Todavia, para que, com estas definições, o conjunto S se torne um espaço (L) vectorial, devemos impor à família $\{S_i\}$ condições suplementares, que podem ser, *por exemplo*, as seguintes: I) dados dois espaços S_j, S_k quais-

(1) O conceito de espaço (L) vectorial tinha sido definido na 1.^a dissertação, mas de maneira pouco precisa.

quer, pertencentes à família $\{S_i\}$, existe pelo menos um espaço da mesma família que contém $S_j \cup S_k$; II) a soma de dois vectores, o produto de um vector por um escalar e o limite duma sucessão de vectores, tomados num espaço S_i , não mudam quando se passa de S_i a outro espaço da mesma família que contenha S_i .

[8.4] Verificadas estas condições, diremos que S é, como *espaço* (L) *vectorial*, a reunião dos espaços da família $\{S_i\}$.

É claro que, em particular, o sistema S é, como *espaço* (L), a reunião dos espaços (L) da família $\{S_i\}$, conforme as convenções do n.º 4.

9. Conceito de «espaço cociente».—Seja S um conjunto qualquer. Como é sabido, entende-se por «repartição» de S qualquer família S^* de subconjuntos de S , disjuntos dois a dois, cuja reunião coincida com S . Tal família determina em S uma relação de equivalências, ρ , (isto é, uma relação *reflexiva, simétrica e transitiva*), desde que se ponha:

$x \rho y$, se e só se x, y pertencem a um mesmo conjunto da família S^* .

Representemos em geral por $\alpha(x)$ o conjunto x^* e S^* tal que $x \in x^*$. Ficará assim definida uma transformação unívoca α de S sobre S^* , que chamaremos *transformação natural* de S sobre S^* , tendo-se:

$x \rho y$ se e só se $x^* = y^*$ (onde $x^* = \alpha(x)$, $y^* = \alpha(y)$).

Deste modo, podemos dizer que α transforma a relação de equivalência ρ na relação *lógica* de identidade « $=$ »; intuitivamente, diz-se que, mediante a transformação α , dois elementos equivalentes x, y são *identificados*, passando a ser concebidos como *representantes* dum mesmo ente abstracto (elementos duma mesma classe).

Recordemos que, reciprocamente, toda a relação de equivalência ρ definida em S determina uma repartição S^* de S , desde que se ponha:

$z(x) =$ conjunto dos elementos y de S tais que $y \rho x$.

Suponhamos agora que S é um espaço (V) . A maneira de introduzir em S^* uma topologia é *a priori* arbitrária, mas é natural que se procure fazê-lo de modo que seja verificada a seguinte condição:

1) z é uma transformação **contínua** de S sobre S^* .

Todavia esta condição não basta para que o problema fique determinado.

Seja R um segundo espaço (V) e T uma transformação unívoca de S sobre R . Suponhamos além disso que se tem

$$[9.1] \quad x \rho y \text{ implica } T(x) = T(y).$$

Nestas condições, a transformação T^* de S^* sobre R assim definida:

$$T^*(x^*) = T(x), \quad \text{para } x^* = z(x),$$

é manifestamente uma transformação unívoca, podendo dizer-se então que T^* é a transformada de T por meio de z e escrever-se

$$T^* = z(T) \quad (\text{é claro que } T = T^* \cdot z).$$

Pois bem, o nosso problema ficará determinado desde que, à condição 1), juntemos esta outra:

2) *Se T é contínua, também T^* o será, qualquer que seja o segundo espaço R considerado (supondo verificada a condição [9.1]).*

A topologia de S^* que verifica as condições 1), 2) será, manifestamente, o *extremo inferior* de todas as topologias que verificam a condição 1).

Mas a solução do problema está ainda dependente do significado que se atribue aqui ao termo «topologia»!

Suponhamos que se pretende obter apenas um espaço (V). Seja Φ a operação de fecho em S. Então, a operação de fecho em S que satisfaz a 1) e 2), será o operador Φ^ assim definido:*

$$[9.2] \quad \Phi^*(X) = \kappa(\Phi(\kappa^{-1}(X))), \text{ para todo o } X \subset S^*,$$

representando por $\kappa^{-1}(X)$ o máximo subconjunto X de S tal que $X = \kappa(X)$, isto é, a reunião de todos os subconjuntos da família S^* que são elementos de $X^{(1)}$. Por outros termos

[9.3] Dizer que a pertence ao fecho de X em S^ equivale a dizer que existe pelo menos um representante de a em S que é aderente ao conjunto de todos os representantes dos elementos de X em S.*

Por exemplo, seja S o espaço cartesiano ordinário e S^* a família de todas as rectas com uma direcção dada. Dizer que uma recta r da família S^* é aderente a um conjunto X de rectas da mesma família, equivale a dizer que existe pelo menos um ponto de r aderente a um conjunto de pontos das rectas pertencentes a X.

Observemos ainda que a verificação simultânea das condições 1), 2) equivale à proposição:

[9.4] Toda a transformação contínua T de S sobre R que verifique a condição [9.1] é da forma

$$T = T^* \cdot \kappa,$$

em que T^ representa uma transformação contínua de S^* sobre R, tendo-se $T^* = \kappa(T)$. Reciprocamente, toda a transformação T desta forma é uma transformação contínua de S sobre R que respeita a condição [9.1].*

(1) Poderíamos escrever então $\Phi^* = \kappa(\Phi)$.

É fácil também estabelecer o seguinte teorema:

[9.5] *Seja $\mathfrak{B}(x)$ um sistema de vizinhança do ponto genérico x de S . Um sistema admissível de vizinhanças dum ponto a qualquer de S^* será a família de todos os subconjuntos de S^* da forma*

$$\kappa \left[\bigcup_{x \in a} V(x) \right], \quad \text{com } V(x) \in \mathfrak{B}(x).$$

Com tal topologia, S^* dir-se-á o *espaço cociente* de S segundo a relação de equivalência ρ .

Mas suponhamos agora que é exigida a condição de todos os espaços considerados serem espaços (F). Neste caso, o problema terá de ser resolvido de maneira diversa, que pode não ser equivalente à primeira. Como a família dos conjuntos fechados deverá ser fixada em S^* de modo que resultem verificadas as condições 1), 2), virá a definição:

[9.6] Diz-se que um subconjunto X de S^* é *fechado* quando o conjunto $\kappa^{-1}(X)$ (isto é, a reunião de todos os subconjuntos de S que são elementos de X) é fechado em S .

É ao espaço (F) que se obtém com esta definição de conjunto fechado, que mais frequentemente se aplica a designação de «espaço cociente» (ALEXANDROFF und HOPF [I], BOURBAKI [I]). Todavia, para as aplicações que irão ser aqui feitas adoptaremos o primeiro conceito.

É claro que a família dos conjuntos fechados será a mesma nos dois casos, porém a operação de fecho pode não ser a mesma, porque, no primeiro caso, nem sempre é verificada a condição de o fecho de qualquer conjunto ser fechado ⁽¹⁾.

(1) Neste caso, em vez do termo «fecho» seria preferível o de «aderência».

10. Conceito de produto de espaços (L) sendo estes em número infinito — Seja M um conjunto qualquer, que, para efeitos de analogia, chamaremos «conjunto de índices», e suponhamos que, a cada elemento i de M , se faz corresponder um determinado conjunto S_i . Consideremos, por outro lado, uma correspondência p qualquer, segundo a qual, a cada elemento i de M , fique associado um elemento $p(i)$ de S_i . Ao conjunto de todas as possíveis correspondências p deste género chamaremos *produto cartesiano* dos conjuntos S_i a respeito do conjunto de índices M e designaremos tal conjunto pelo símbolo

$$\prod_{i \in M} S_i$$

ou simplesmente por $\prod_i S_i$. Ao elemento $p(i)$ de S_i chamaremos *coordenada de ordem i de p*. Em vez de « $p(i)$ » pode usar-se igualmente a notação « p_i ».

Suponhamos agora que os conjuntos S_i são espaços (L), cujos operadores de convergência representaremos pelo símbolo comum «lim», e introduzamos em $\prod_i S_i$ a seguinte definição de limite :

$$p = \lim p_n \iff p(i) = \lim p_n(i), \text{ qualquer que seja } i \in M.$$

Com tal definição, o conjunto $\prod_i S_i$ torna-se manifestamente um espaço (L) a que chamaremos *produto* dos espaços (L) da família $\{S_i\}$, a respeito de M .

Se os conjuntos S_i são espaços (L) vectoriais, podemos, além da anterior definição de limite, introduzir em $\prod_i S_i$ os seguintes conceitos de «adição» e de «multiplicação escalar» :

$$\begin{aligned} (p + q)(i) &\equiv p(i) + q(i) & (p, q \in \prod_i S_i, \quad \alpha \in \Delta). \\ (\alpha p)(i) &\equiv \alpha(p(i)) \end{aligned}$$

Assim, o conjunto $\prod_i S_i$ tornar-se-á um espaço (L) vectorial. Em particular, podem os conjuntos S_i coincidir todos entre si:

$$S_i = S, \quad \text{para todo o } i \in M;$$

então, recaí-se no conceito de «espaço de operadores», estudado na 1.^a dissertação (n.º 27) tendo-se

$$\prod_i S_i = \Theta(M, S).$$

§ 2.º — Do espaço funcional de Fantappiè aos novos espaços funcionais analíticos

11. Definição do espaço funcional de Fantappiè. — Já na 1.^a dissertação fiz uma breve história das investigações relativas à construção de espaços funcionais analíticos. Mas não pus então em relevo este facto: numa primeira fase, Fantappiè ⁽¹⁾ limitava o seu estudo às *funções analíticas uniformes* (em todo o campo *natural* de regularidade), procurando só depois generalizar os seus resultados às funções multiformes, as quais, porém, davam origem a sérias dificuldades. Mais tarde ⁽²⁾, teve a ideia de substituir o conceito de função analítica em *sentido restrito* (de Weierstrass) pelo conceito de função *localmente analítica*, com o qual se realizou um progresso importante na sua teoria. Em tudo o que segue, vou limitar-me ao caso das funções duma só variável, uma vez que a extensão às funções de mais de uma variável é quase imediata.

Por «função localmente analítica» entende-se, como foi recordado na 1.^a dissertação, uma função complexa $f(z)$, de variável complexa z , univocamente definida e analítica (isto é, holomorfa) num determinado domínio

(1) FANTAPPIÈ [I].

(2) FANTAPPIÈ [II].

aberto D do plano-esfera, mesmo *não conexo*, considerado como seu *domínio de existência* (por convenção). O termo «função» é pois aqui usado no sentido geral da teoria das funções, de modo que *duas funções localmente analíticas* f_1, f_2 *devem ser consideradas distintas, desde que os seus domínios de existência não coincidam, mesmo que se tenha* $f_1(z) = f_2(z)$ *sobre algum domínio contido nos primeiros* (tratar-se-ia então da mesma função analítica de Weierstrass, sendo os domínios conexos).

Este facto é salientado por Fantappiè (em [II], pág. 534), nos seguintes termos: «È da osservare che, mentre una funzione analitica in senso stretto, col suo campo naturale di esistenza, risulta sempre perfettamente individuata dai valori che essa assume nell' intorno di un punto qualunque di tale campo, *per individuare invece una funzione analitica localmente bisogna assegnare insieme tanto la regione R in cui essa è definita (anche costituita da più parti non connesse), come i valori che essa vi assume (in modo, naturalmente, che vi risulti regolare ovunque)*».

O espaço funcional de Fantappiè (de ordem 1) é precisamente constituído por todas as funções localmente analíticas de uma variável, sujeitas à condição de se anularem no ponto impróprio quando este pertence ao seu domínio de existência.

Neste conjunto, que designaremos por \mathfrak{S} , é introduzida uma topologia mediante a seguinte definição de «vizinhança»:

[11.1] Dada uma função $f_0 \in \mathfrak{S}$, de domínio D , e fixados um conjunto fechado $A \subset D$ e um número $\sigma > 0$, chama-se *vizinhança* (A, σ) de f_0 , ao conjunto de todas as funções $f \in \mathfrak{S}$, de domínio $D^* \supset A$, tais que

$$|f(z) - f_0(z)| < \sigma, \quad \text{qualquer que seja } z \in A^{(1)}.$$

(1) Em particular, A pode ser o conjunto vazio e então a referida condição considera-se verificada para todo o elemento f do espaço.

Em seguida, Fantappiè mostra que com tal definição o conjunto \mathfrak{S} se torna um espaço topológico T_0 (no sentido de Alexandroff-Hopf), isto é, um espaço que verifica as condições $\bar{I}-\bar{V}$ (n.º 1) e ainda o axioma de separação de Kolmogoroff, mais fraco do que T_1 :

T_0 . Dados dois pontos p, q , pelo menos para um deles existe sempre uma vizinhança que não contém o outro.

Fantappiè introduz ainda a seguinte definição, que nada tem que ver com a topologia de \mathfrak{S} , mas que lhe é cómoda para os desenvolvimentos ulteriores:

[11.2] Dada uma função $f_0 \in \mathfrak{S}$, de domínio D , e fixado no conjunto fechado $A \subset D$, chama-se *vizinhança linear* (A) de f_0 o conjunto de todas as funções $f \in \mathfrak{S}$ cujo domínio D^* contém A .

12. Considerações relativas à topologia de \mathfrak{S} . — A família de vizinhanças $\mathfrak{B}(f_0)$ associada ao ponto f_0 de \mathfrak{S} por meio da definição [11.2] pode ser substituída por uma outra família mais restrita, $\mathfrak{B}(f_0)$, mediante a seguinte

[12.1] DEFINIÇÃO. Dada $f_0 \in \mathfrak{S}$ de domínio D e fixado $\varepsilon > 0$, chamaremos *vizinhança* (ε) de f_0 à vizinhança ($A_\varepsilon, \varepsilon$) de f_0 , em que A_ε designa o conjunto de todos os pontos de D cuja distância (esférica) ao complementar de D é $\geq \varepsilon$.

Visto que se tem $\mathfrak{B}(f_0) \subset \mathfrak{B}(f_0)$, para demonstrar a equivalência topológica entre as duas famílias, basta provar (n.º 2) que toda a vizinhança pertencente a $\mathfrak{B}(f_0)$ contém uma vizinhança pertencente a $\mathfrak{B}(f_0)$. Sejam pois σ um número positivo e A um subconjunto fechado de D (domínio de f_0). Designando por δ a distância de A ao complementar de D (a qual é certamente > 0 , por ser D aberto e A fechado, contido em D), representemos por ε o menor dos números δ, σ . Então, é evidente que $A \subset A_\varepsilon$ e, como se tem $\varepsilon < \sigma$, resultará que:

se $|f(z) - f_0(z)| < \varepsilon$ sobre A_ε , também $|f(z) - f_0(z)| < \sigma$ sobre A , — o que significa, precisamente, que todo o elemento da vizinhança $(A_\varepsilon, \varepsilon)$ de f_0 é também um elemento da vizinhança (A, σ) de f_0 .

q. e. d.

Note-se que, na memória [I], Fantappiè tinha apresentado uma definição de vizinhança que pouco difere da definição [12.1]. Só mais tarde, por sugestão de O. CATTUNDA [I], a substituiu pelo conceito de vizinhança (A, σ) , a qual vem simplificar grande parte das suas demonstrações. Todavia, a família de vizinhanças definida por [12.1], sendo mais restrita do que a primeira, torna-se mais cómoda em certos casos.

Introduzamos agora esta outra

[12.2] DEFINIÇÃO. Diz-se que uma sucessão (f_n) de elementos de \mathfrak{S} , tem por *limite* (ou *converge* para) um dado elemento f de \mathfrak{S} , quando, qualquer que seja a vizinhança V de f , existe uma ordem ν a partir da qual se tem $f_n \in V$.

Desde logo se reconhece que:

[12.3] Se a sucessão (f_n) converge para f , também converge para todo o elemento f^* do qual f seja um **prolongamento**, isto é, para todo o elemento f^* cujo domínio D^* esteja contido no domínio D de f e tal que

$$f^*(z) = f(z) \quad \text{sobre} \quad D^*.$$

Com efeito, se f é um prolongamento de f^* , todo o elemento de \mathfrak{S} que existir na vizinhança (ε) de f , existirá também na vizinhança (ε) de f^* (embora a recíproca não seja verdadeira, visto ser verificada a propriedade T_0).

Para indicar que f é um prolongamento de f^* , escreveremos

$$f \succ f^* \quad \text{ou} \quad f^* \prec f.$$

Para indicar que f_n converge para f , escreveremos, tendo em atenção o teorema [12.3]:

$$f \prec \lim f_n.$$

Visto que, por virtude de [12.3], a unicidade do limite não é verificada, o conjunto \mathfrak{S} não é um espaço (L) a respeito do operador Lim considerado, conquanto as propriedades L1, L2 (n.º 1) sejam verificadas.

É fácil estabelecer agora este outro resultado:

[12.4] *Para que, no espaço topológico \mathfrak{S} (com a definição de vizinhança [11.1] ou [12.1]), um dado ponto f seja aderente a um dado conjunto X , é necessário e suficiente que exista pelo menos uma sucessão de pontos de X convergente para f .*

A demonstração pode fazer-se exactamente como no caso dos espaços métricos, utilizando a definição [12.1] de vizinhança e recorrendo ao axioma de Zermelo.

13. O conceito de linha analítica. — No espaço cartesiano ordinário, R^3 , o conceito de linha contínua (de Jordan) é, intuitivamente, o de trajectória dum ponto móvel

$$P = F(t),$$

com t variável num dado intervalo (a, b) . É claro que a variável t pode ser considerada como variável real qualquer (*parâmetro*), independente da ideia de tempo, bastando que seja P um ponto variável, *função contínua* de t . Por outras palavras: $F(t)$ deve ser uma transformação contínua de domínio (a, b) e de contradomínio contido em R^3 . Mas a função $F(t)$ será apenas uma *representação paramétrica* da linha em questão (trajectória de P), dizendo-se que duas funções F_1, F_2 deste tipo representam a *mesma linha* quando existe pelo menos uma transformação bi-

continua θ (do intervalo em que é definida F_1 sobre o intervalo em que é definida F_2) tal que

$$F_1(t) \equiv F_2(\theta(t)).$$

A definição de linha contínua de Jordan pode então ser formulada como o faz Fréchet em [I], pág. 149.

Posto isto, consideremos, no espaço funcional \mathfrak{S} , um ponto variável P , função dum parâmetro complexo λ , num domínio D do plano esfera. Quere isto dizer que, a cada $\lambda \in D$, corresponderá um determinado elemento P de \mathfrak{S} :

$$P = F(\lambda),$$

podendo então dizer-se, intuitivamente, que $F(\lambda)$ é a *posição* do ponto P correspondente ao valor λ do parâmetro. A noção de linha contínua pode generalizar-se ao caso presente, impondo a D a condição de ser um domínio conexo, e a F a condição de ser uma transformação contínua de D sobre \mathfrak{S} : $F(\lambda)$ será então uma representação paramétrica duma linha contínua de \mathfrak{S} .

Mas não esqueçamos que, para um valor determinado de λ , $F(\lambda)$ é um determinado elemento de \mathfrak{S} e, como tal, uma função da variável complexa z , função que podemos representar por $f(z, \lambda)$ ou por $f_\lambda(z)$, escrevendo indiferentemente

$$f_\lambda(z) \quad \text{ou} \quad f(z, \lambda) \quad \text{ou} \quad [F(\lambda)](z).$$

Ainda se costuma dizer, neste caso, que $f_\lambda(z)$ é uma *função de z dependente do parâmetro λ* . Mas é preciso não perder de vista que *os valores da função $F(\lambda)$ não são números, mas sim funções, elementos de \mathfrak{S}* ; não se trata pois duma função no sentido clássico, mas sim duma função no sentido da Análise geral. Todo o risco de confusão será evitado se chamarmos a $F(\lambda)$, como é costume, **função pontual** ou **ponto-função**.

Ora Fantappiè introduz, logo no início da sua teoria dos funcionais analíticos, uma noção que intervém de maneira crucial em todo o desenvolvimento da teoria: a noção de «linha analítica». Seja ainda $F(\lambda)$ uma função pontual, definida num domínio aberto D de Ω (mesmo *não conexo*) e de contradomínio em $\mathfrak{S}^{(1)}$. Como vimos, $F(\lambda)$ pode exprimir-se como função de duas variáveis z, λ , pondo:

$f(z, \lambda) = [F(\lambda)](z)$, para todo o $\lambda \in D$ e todo o z pertencente ao domínio de existência, $D(\lambda)$, da função de z , $f(z, \lambda)$.

Representemos por $C(\lambda)$ o conjunto complementar de $D(\lambda)$ em Ω : $C(\lambda) = \Omega - D(\lambda)$.

[13.1]. DEFINIÇÃO ⁽²⁾. Diz-se que $F(\lambda)$ representa parametricamente uma *linha analítica* de \mathfrak{S} , quando são verificadas as seguintes condições:

- 1) $f(\lambda, z)$ é função analítica (localmente) das duas variáveis λ, z ;
- 2) o conjunto fechado $C(\lambda)$ é função contínua de λ em D .

Quanto à condição 1), é necessário ter em conta as convenções de Fantappiè relativas a pontos impróprios para funções de mais duma variável, convenções recordadas na 1.^a dissertação.

A condição 2) pressupõe, na família dos subconjuntos fechados de Ω , uma estrutura topológica que pode ser introduzida mediante a seguinte definição de desvio:

[13.2] Chama-se *desvio* de dois conjuntos A, B ao extremo superior das distâncias (esféricas):

$\text{dist}(x, B)$, com $x \in A$, e $\text{dist}(y, A)$, com $y \in B$.

⁽¹⁾ Continuo a representar aqui por Ω o plano-esfera, como na 1.^a dissertação.

⁽²⁾ FANTAPPIÈ [II], pág. 640.

Então, o conjunto $C(\lambda)$ dir-se-á *função contínua* de λ em λ_0 , se, a cada $\varepsilon > 0$ se puder associar um $\delta > 0$, tal que o desvio entre $C(\lambda)$ e $C(\lambda_0)$ seja $< \varepsilon$ para $|\lambda - \lambda_0| < \delta$.

A condição 2) parece ter sido introduzida *com o objectivo de conseguir que a função $F(\lambda)$ resulte contínua*. Mas é fácil ver que o mesmo objectivo podia ser alcançado com uma condição mais fraca. Observe-se, entretanto, que *não basta uma expressão analítica para definir a função pontual $F(\lambda)$: é necessário acrescentar-lhe uma lei pela qual, a cada valor λ de D , fique associado um domínio aberto $D(\lambda)$ de Ω (de modo que a condição 2) resulte verificada)*.

Consideremos o exemplo citado por Fantappiè em [I], pág. 20:

$$f(z, \lambda) \equiv \operatorname{sen} z + \frac{\lambda - 1}{z - \lambda}.$$

Se tomarmos $\lambda \neq 1$, corresponder-lhe-á uma função de z , analítica no sentido de Weierstrass, que tem como únicos pontos singulares λ e ∞ . Porém, ao valor $\lambda = 1$, corresponderá a função $f(z, 1) \equiv \operatorname{sen} z$, que admite como único ponto singular, ∞ . Portanto, se adoptarmos como $D(\lambda)$ o domínio *natural* de existência da função de z , $f(z, \lambda)$, isto é, se pusermos

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= \{\infty, \lambda\}, & \text{para } \lambda \neq 1 \\ C(\lambda) &= \{\infty\}, & \text{para } \lambda = 1 \end{aligned} \quad , \quad \text{com} \quad C(\lambda) = \Omega - D(\lambda),$$

imediatamente se reconhece que $C(\lambda)$ é função contínua de λ , para $\lambda \neq 1$, mas descontínua no ponto $\lambda = 1$. À função $\operatorname{sen} z$ correspondente a $\lambda = 1$, chamava Fantappiè *função excepcional* da linha analítica considerada. Mas, com o conceito de função localmente analítica, as funções excepcionais são eliminadas. Assim, no caso precedente, para que se trate duma linha analítica segundo o novo ponto de vista, será necessário, por exemplo, tomar $C(1) = \{\infty, 1\}$, mantendo $C(\lambda) = \{\infty, \lambda\}$, para $\lambda \neq 1$.

Um caso mais complexo será aquele em que a expressão analítica $f(z, \lambda)$ fornece funções analíticas de z pluriformes no seu inteiro domínio de regularidade: será então necessário fixar, para cada valor de λ , de acordo com a condição 2), um ramo monódromo da correspondente função de z , sobre um conveniente domínio $D(\lambda)$.

Haverá portanto, na escolha dos domínios $D(\lambda)$, uma larga arbitrariedade, que é origem de não pequenas dificuldades e complicações no desenvolvimento da teoria. Era a este facto que, em parte, eu me referia na 1.^a dissertação, quando falava das «*inúteis considerações sobre os domínios de definição das funções localmente analíticas, que tanto embaraçam a exposição de Fantappiè*»; e a que também me referia na minha memória [I], quando afirmava: «*le quali considerazioni ingombrano inutilmente la teoria, celandone la vera essenza e l'intrinseca bellezza*».

Note-se que a definição [13.1] deve ser completada da seguinte maneira:

Dadas duas funções $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$ do tipo indicado, definidas em domínios D_1 , D_2 de Ω , respectivamente, diz-se que F_1, F_2 são representações paramétricas da *mesma linha analítica*, se, e só se, existe pelo menos uma transformação biunívoca e analítica θ de D_1 sobre D_2 , tal que

$$F_1(\lambda) \equiv F_2(\theta(\lambda)).$$

Todavia, para comodidade de linguagem, podemos chamar «linha analítica» a toda a função pontual $F(\lambda)$ nas condições indicadas.

14. Definição de funcional analítico. — Seja \Re um conjunto de pontos do espaço \mathfrak{C} e Θ um *funcional* definido ⁽¹⁾ em \Re , isto é, um operador que, a cada **função** $f \in \Re$, faça

(1) FANTAPPIÈ [II], pág. 652-654.

corresponder um e um só número complexo

$$\Theta(f), \text{ também representável por } \Theta_z[f(z)]$$

(transformação unívoca de \mathfrak{R} sobre K).

[14.1] Segundo Fantappiè, diz-se que o funcional Θ é *analítico (localmente)*, quando verifica as seguintes condições:

1.^a — O conjunto \mathfrak{R} onde o funcional se considera definido é um domínio aberto do espaço funcional \mathfrak{E} .

2.^a — Se $f_0 \in \mathfrak{R}$, a todo o prolongamento f_1 de f_0 (que pertence necessariamente a \mathfrak{R}), o operador Θ faz corresponder o mesmo número; isto é, em símbolos:

$$f_1 \succ f_0 \rightarrow \Theta(f_1) = \Theta(f_0).$$

3.^a — Sobre toda a linha analítica L contida em \mathfrak{R} , o valor de $\Theta(f)$ reduz-se a uma função analítica do parâmetro de que depende o ponto genérico da linha L . Por outros termos: se $F(\lambda)$ representa uma linha analítica contida em \mathfrak{R} , então $\Theta(F(\lambda))$ será uma função analítica de λ .

Para justificar a presença da condição 2.^a, Fantappiè invoca este facto: dada uma função $y_0 \in \mathfrak{E}$, qualquer prolongamento y_1 de y_0 pertence a todas as vizinhanças (A, σ) de y_0 , e é portanto natural considerar y_1 como extremamente (infinitamente) vizinho de y_0 . Ora, observa ele: «*negli ordinari spazi a un numero finito di dimensioni, ogni punto P_1 che fosse interno a tutti gli intorni di un punto P_0 dovrebbe necessariamente coincidere con questo*» (axioma de separação T_1). Conclue então: «viene quindi spontaneo di pensare che un funzionale F , definito per la funzione y_0 , debba pur esser definito e assumere lo stesso valore per ogni prolungamento y_1 di y_0 ». Depois acrescenta: «*Alla stessa conclusione si arriva pure se si vuole che il valore del funzionale $F[y]$ debba dipendere solo dai valori che la funzione assume nel suo campo di definizione, e non dalla forma di questo campo.*»

Mas então porque não considera Fantappiè os pontos y_0, y_1 coincidentes? *Porque utiliza o conceito de função localmente analítica?*

Já sabemos que tal conceito foi introduzido para evitar os inconvenientes da polidromia e a existência de funções excepcionais das linhas analíticas. Mas, sendo assim, a justificação anterior não parece satisfatória, pois que poderia igualmente aplicar-se a destruir as bases da teoria.

Na verdade, Fantappiè foi guiado por uma intuição que não chega a externar completamente. A condição 2.^a tende a um fim semelhante àquele com que foi introduzida a condição 2.^a) na definição de linha analítica: **permitir que todo o funcional analítico seja contínuo**. A continuidade de tais funcionais não fica desde logo demonstrada (a demonstração não foi sequer conseguida por Fantappiè), mas o que pode já demonstrar-se é que:

[14.2] *Todo o funcional contínuo Θ verifica a condição 2.^a de [14.1].*

Com efeito, suponhamos que se tem $f_0 \prec f_1$, com $\Theta(f_0) \neq \Theta(f_1)$, e seja δ um número positivo inferior a $|\Theta(f_0) - \Theta(f_1)|$. Então, em toda a vizinhança de f_0 existirá o elemento f_1 , cujo transformado, $\Theta(f_1)$, não pertence à vizinhança (δ) de $\Theta(f_0)$, o que significa, precisamente, que Θ não é contínuo.

Também se pode reconhecer que:

[14.3] *Se um funcional Θ , definido em todo o espaço \mathfrak{S} , verifica a condição 2.^a de [14.1], Θ reduz-se necessariamente a uma constante.*

Basta observar que, sendo D_1, D_2 , dois domínios conexos entre si e dadas duas funções $f_1, f_2 \in \mathfrak{S}$, de

domínios D_1, D_2 respectivamente, a função f de domínio $D_1 \cup D_2$ assim definida

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{para } z \in D_1 \\ f_2(z) & \text{para } z \in D_2 \end{cases},$$

é ainda um elemento de \mathfrak{S} , prolongamento de f_1 e de f_2 , tendo-se portanto

$$\Theta(f) = \Theta(f_1) = \Theta(f_2).$$

15. Regiões funcionais lineares. — Para que a teoria dos funcionais analíticos possa desenvolver-se de maneira profícua, há que fazer intervir ainda o conceito de «soma de duas funções». Fantappiè não chega a definir tal conceito, considerando-o como dado naturalmente. Tudo se passa como se a definição por ele adoptada seja esta :

[15.1] *Soma de duas funções.* — Dadas duas funções $f_1, f_2 \in \mathfrak{S}$, cujos domínios D_1, D_2 se intersectem, chama-se *soma* de f_1 com f_2 à função f de domínio $D_1 \cap D_2$, tal que

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad \text{qualquer que seja } z \in D_1 \cap D_2,$$

escrevendo-se então $f = f_1 + f_2$. Se os domínios D_1, D_2 são disjuntos, dir-se-á que *não existe* a soma de f_1 com f_2 .

Analogamente se define «produto de duas funções». Por outro lado :

[15.2] *Produto duma função por um número.* — Dada uma função $f \in \mathfrak{S}$, de domínio D , chama-se *produto* de f por um número complexo α qualquer, a função g com o mesmo domínio D , assim definida :

$$g(z) = \alpha \cdot f(z), \quad \text{para todo o } z \in D,$$

escrevendo-se $g = \alpha f$.

Ora Fantappiè ⁽¹⁾ introduz as seguintes definições :

[15.3] *Campo linear.* — Diz-se que um subconjunto \mathfrak{Y} do espaço \mathfrak{S} é um *campo linear*, quando verifica as condições :

- 1) Se $f_1, f_2 \in \mathfrak{Y}$, também $f_1 + f_2 \in \mathfrak{Y}$.
- 2) Se $f \in \mathfrak{Y}$, também $\alpha f \in \mathfrak{Y}$, qualquer que seja $\alpha \in K$.

[15.4] *Região funcional linear.* — Um subconjunto de \mathfrak{S} diz-se uma *região funcional linear*, quando é ao mesmo tempo um conjunto aberto e um campo linear (Fantappiè usa o termo «região» como sinónimo de «conjunto aberto»).

Em seguida demonstra o seguinte teorema interessante :

[15.5] *A toda a região funcional linear \mathfrak{R} do espaço \mathfrak{S} corresponde um subconjunto fechado C de Ω , não vazio e distinto de Ω , tal que \mathfrak{R} é precisamente a família de todas as funções $f \in \mathfrak{S}$ cujos domínios de existência contêm C .*

A proposição recíproca é evidente. Então, sendo C um conjunto nas condições enunciadas, Fantappiè passa a representar por (C) a família das funções localmente analíticas $f(z)$ cujos domínios contêm C e que se anulam para $z = \infty$ se $\infty \in C$; chamando a C o *conjunto característico* da região linear (C) .

Todavia, uma região linear (C) não é, como se depreende das afirmações de Fantappiè, um espaço vectorial relativo ao corpo complexo. Para o reconhecer, basta observar o seguinte facto: dadas duas funções f_1, f_2 , tais que o domínio de f_2 contenha pontos estranhos ao domínio de f_1 , não haverá nenhuma função g tal que $f_1 + g = f_2$.

(1) FANTAPPIÈ [II], pág. 645-647.

Em particular: *não existe com* (C) *nenhum elemento* ζ *tal que* $f + \zeta = f$, *qualquer que seja* $f \in (C)$. Existem sim infinitas funções ζ , de domínio D_0 *arbitrário*, tais que

$$\zeta(z) = 0, \text{ para } z \in D_0;$$

mas, evidentemente, se adicionarmos ζ a uma função f cujo domínio D tenha pontos fora de D_0 , obtém-se uma função f^* de domínio $D \cap D_0$ *distinta* de f (ter-se-á apenas $f^* \prec f$).

Convém ainda registar este outro facto, consequência imediata da definição [11.2]:

[15.6] *Qualquer que seja* $f \in (C)$, *a vizinhança linear* (C) *de* f *é precisamente a região* (C) .

Recordemos por último a definição de funcional linear analítico segundo Fantappiè. Já sabemos que um funcional Θ definido num subconjunto \mathcal{Y} *qualquer* de \mathcal{S} , se diz **aditivo** quando, para $f_1, f_2 \in \mathcal{Y}$, $f_1 + f_2 \in \mathcal{Y}$, resulta sempre:

$$[15.7] \quad \Theta(f_1 + f_2) = \Theta(f_1) + \Theta(f_2);$$

e que se diz **homogéneo**, quando, para $f \in \mathcal{Y}$, $\alpha \in K$, $\alpha f \in \mathcal{Y}$, resulta

$$[15.8] \quad \Theta(\alpha f) = \alpha \Theta(f).$$

O funcional Θ dir-se-á **linear** (segundo a terminologia mais em uso), quando for simultâneamente aditivo e homogéneo.

Pois bem, Fantappiè prova que todo o funcional analítico Θ que seja aditivo é necessariamente homogéneo, assentando desde logo na definição:

[15.9] Dado um funcional *analítico* Θ , definido numa região *linear* $\mathfrak{R} = (A)$, diz-se que Θ é **linear**, quando é aditivo.

Porque considera Fantappiè uma *região linear* e não um outro subconjunto de \mathfrak{S} , como domínio dos funcionais analíticos lineares? Em primeiro lugar, considera *uma região*, atendendo à condição 2.^a de [14.1]. Se depois supõe a região \mathfrak{N} *linear*, é isso uma consequência inevitável de [15.5] e do seguinte teorema:

[15.10] *Se Θ é um funcional aditivo definido numa vizinhança (A, σ) de f_0 , então Θ será univocamente prolongável, como funcional aditivo, a toda a vizinhança linear (A) de f .*

16. Espaço cociente duma região linear (C) ; os novos espaços funcionais analíticos. — No n.º 14 vimos como Fantappiè foi levado, por considerações intuitivas, a introduzir a condição 2.^a na sua definição de funcionais analíticos. No espaço cartesiano ordinário, é verificada a condição T_1 de separação (e mesmo outras mais fortes): *se um ponto p pertence a todas as vizinhanças de um ponto q , necessariamente p coincide com q .* No espaço funcional \mathfrak{S} de Fantappiè não é verificada a condição T_1 (apenas a condição T_0): *dadas duas funções $f, g \in \mathfrak{S}$, pode acontecer que f pertença a todas as vizinhanças de g , sem coincidir com g ; f então será, necessariamente, um prolongamento de g .*

A primeira ideia que surge é esta: Porque não identificar então dois tais elementos f, g ? Para quê esta distinção artificiosa, baseada numa atribuição convencional de domínios de existência? Ora, há que ter em atenção este facto:

Se fossemos efectuar a referida identificação em todo o espaço \mathfrak{S} , isto é, se fossemos considerar como coincidentes dois pontos f, g de \mathfrak{S} sempre que f fosse um prolongamento de g — então todos os elementos de \mathfrak{S} deveriam ser considerados idênticos e \mathfrak{S} reduzir-se-ia a um único ponto.

Para o reconhecer, basta recordar a demonstração de [14.3] e atender à propriedade transitiva da identidade.

Mas ainda poderia pôr-se esta outra objecção: O facto apontado resulta de se terem admitido, como domínios de existência de funções pertencentes a \mathfrak{S} , domínios **não conexos**. Porque não introduzir a restrição de todos os domínios serem conexos?

Em primeiro lugar, deve notar-se que se trata duma restrição que vem limitar, de maneira *substancial*, as aplicações da teoria. Além disso, há que atender a este outro facto:

Se, dadas duas funções $f, g \in \mathfrak{S}$, com domínios de existência conexos, fossemos considerar f idêntica a g sempre que f fosse um prolongamento de g — então deveríamos considerar como idênticas duas quaisquer funções localmente analíticas que representassem a mesma função analítica no sentido de Weierstrass.

Ora já sabemos que o conceito weierstrassiano de função analítica foi abandonado, em virtude das complicações a que davam origem os factos de polidromia.

Mas resta uma outra solução.

O fulcro de toda a teoria de Fantappiè é o conceito de funcional linear analítico. Como todo o funcional linear analítico é, segundo [15.9], definido numa região funcional linear (C), a teoria dos funcionais analíticos passa a desenvolver-se essencialmente à volta do conceito de região linear, e só numa parte mínima da teoria — a questão do prolongamento analítico — se sairá deste conceito ⁽¹⁾. Mais ainda: a topologia do espaço funcional \mathfrak{S} deixa de intervir no desenvolvimento da teoria, tomando assim o aspecto de qualquer coisa de adventício e perfeitamente inútil; em seu lugar, o conceito de linha analítica (em cuja definição, como se viu, não intervêm minimamente a topologia de \mathfrak{S}), passa a desempenhar o papel fundamental.

Ora, estando assim as coisas, porque não efectuar a referida identificação em cada região linear (C)? Esta foi

(1) Tenciono tratar deste assunto num próximo trabalho.

a pergunta que se apresentou afinal ao meu espírito e o ponto de partida de toda a minha reelaboração da teoria.

[16.1] *Consideremos uma região linear (C). Duas funções $f_1, f_2 \in (C)$ dir-se-ão **equivalentes a respeito de C**, escrevendo-se*

$$f_1 \cong f_2,$$

se, e só se, existir pelo menos uma função $g \in (C)$, da qual f_1 e f_2 sejam prolongamentos, isto é, tal que

$$g \prec f_1 \quad , \quad g \prec f_2.$$

Que a relação « \cong » é efectivamente reflexiva, simétrica e transitiva, não oferece dúvida. Tal relação determina portanto uma repartição no conjunto (C): a cada uma das classes de equivalência assim definidas chamo eu **função analítica ligada ao conjunto C**; além disso, represento por $\mathfrak{F}[C]$ o conjunto de todas essas classes, isto é, a repartição considerada. Sendo f um elemento qualquer de (C), convencionemos designar por $\varkappa(f)$ o elemento de $\mathfrak{F}[C]$ de que f é um representante; ter-se-á:

$$f \cong g \quad \Longleftrightarrow \quad \varkappa(f) = \varkappa(g).$$

Elementos de $\mathfrak{F}[C]$ serão designados por letras gregas $\varphi, \psi, \chi, \dots$. O elemento de (C) que representa φ sobre um dado domínio D (*domínio de holomorfia de φ*) será designado por φ_D ; portanto

$$\varkappa(\varphi_D) = \varphi,$$

escrevendo-se

$$\varphi(z) = \varphi_D(z), \quad \text{para} \quad z \in D.$$

Posto isto, podemos introduzir em $\mathfrak{F}[C]$ uma topologia segundo o processo geral estipulado no n.º 9 (definições

[9.2] e [9.3]). Fica assim definido o espaço cociente $\mathfrak{F}[C]$ da região funcional (C) segundo a relação « \cong ».

Seja agora S um espaço (V) qualquer *que verifique a condição T_1 de separação*, e designe T uma transformação contínua da região (C) sobre S. Em virtude do teorema [14.2] generalizado, T verifica a condição 2.^a de [14.1] e ter-se-á portanto:

$$f_1 \cong f_2 \rightarrow T(f_1) = T(f_2).$$

(Com efeito, se $f_1 \cong f_2$, existirá $g \in (C)$ tal que $g \prec f_1$, $g \prec f_2$ e virá pois $T(f_1) = T(g) = T(f_2)$, q. e. d.).

A proposição geral [9.4] habilita-nos por conseguinte a afirmar:

[16.2] TEOREMA. *Toda a transformação contínua T de (C) sobre S é da forma*

$$T = T^* \cdot \alpha,$$

em que α designa a transformação natural de (C) sobre $\mathfrak{F}[C]$ e T^ uma transformação contínua de $\mathfrak{F}[C]$ sobre (C), tendo-se $T^* = \alpha(T)$. Reciprocamente, toda a transformação T desta forma é contínua.*

Assim, o estudo das transformações contínuas de domínio (C) reduz-se inteiramente ao estudo das transformações contínuas de domínio $\mathfrak{F}[C]$. Mais ainda:

[16.3] TEOREMA. *Seja X uma vizinhança (A, σ) dum dado elemento f do espaço funcional \mathfrak{S} . Toda a transformação contínua T de X sobre S se pode escrever sob a forma $T = T^* \alpha$, em que α designa a transformação natural de (A) sobre $\mathfrak{F}[A]$ e T^* uma transformação contínua de domínio $\alpha(X) \subset \mathfrak{F}[A]$ e contradomínio em S.*

Demonstraremos oportunamente que o espaço topológico $\mathfrak{F}[C]$ assim definido não é um espaço (F). Ocorre então perguntar:

Porquê definir o espaço cociente $\mathfrak{F}[C]$ segundo o critério [9.3] e não segundo o critério [9.6], que conduziria seguramente a um espaço (F)? Procuraremos responder mais adiante a esta questão.

17. O conjunto $\mathfrak{F}[C]$ como espaço (L). — Para comodidade de linguagem, recordemos as seguintes definições já adoptadas na 1.^a dissertação:

[17.1] Dado um subconjunto A de Ω , chamamos *vizinhança* de A todo o domínio D a que A seja interior (limitado se A é limitado) e tal que nenhuma sua componente seja desconexa de A .

[17.2] Dado um elemento φ de $\mathfrak{F}[C]$, chamamos *domínio de holomorfia* de φ toda a vizinhança D de C que seja domínio de existência de algum representante de φ em (C) ou que esteja contida num tal domínio.

[17.3] Dizemos que uma sucessão (φ_n) de elementos de $\mathfrak{F}[C]$ tem por **limite** um dado elemento φ de $\mathfrak{F}[C]$ e escrevemos

$$\varphi = \text{Lim } \varphi_n,$$

se existe pelo menos um comum domínio de *holomorfia* D das funções $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ e φ , tal que, a todo o $\varepsilon > 0$, se possa associar uma ordem ν , de modo que resulte

$$| \varphi_n(z) - \varphi(z) | < \varepsilon \quad \text{sobre } D, \quad \text{para } n > \nu.$$

O termo «vizinhança», tal como é usado em [17.1], tem um inconveniente: conforme o sentido da topologia geral, *vizinhança dum conjunto* deveria ser uma família de conjuntos e não um conjunto. Mas uma vez acautelado o leitor sobre o uso de tal expressão, creio que não haverá possibilidade de equívoco.

O domínio D a que se refere a definição [17.3] pode ser indiferentemente aberto ou fechado, já que todo o domínio de homorfia de φ , *aberto*, contém pelo menos um domínio de holomorfia de φ , *fechado*, e vice-versa.

Observemos agora que a topologia de $\mathfrak{F}[C]$ pode ser introduzida directamente, isto é, sem pressupor a topologia do espaço funcional \mathfrak{S} de Fantappiè. É isto uma consequência do seguinte

[17.4] TEOREMA. *Dado um subconjunto \mathfrak{X} de $\mathfrak{F}[C]$, condição necessária e suficiente para que um elemento φ de $\mathfrak{F}[C]$ seja aderente a \mathfrak{X} , a respeito da topologia introduzida em $\mathfrak{F}[C]$ no n.º precedente, é que exista pelo menos uma sucessão de elementos de \mathfrak{X} que tenha por limite φ , segundo a definição [17.3].*

a) *A condição é necessária.* Suponhamos que φ é aderente a \mathfrak{X} a respeito da topologia indicada. Quere isto dizer (def. [9.3]) que existe pelo menos um representante f de φ em (C) , aderente ao conjunto X dos representantes dos elementos de \mathfrak{X} . Mas então, por força de [12.4], existirá uma sucessão (f_n) de elementos de X convergente para f . Designe D o domínio (aberto) de f e seja D^* uma vizinhança fechada de C contida em D . Para todo o $\varepsilon > 0$, existirá pois uma ordem ν a partir da qual as funções f_n estão todas na vizinhança (D^*, ε) de f , tendo-se portanto

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon, \text{ sobre } D^*, \text{ para } n > \nu.$$

Mas isto significa precisamente que as funções f_n representam uma sucessão de elementos de $\mathfrak{F}[C]$ convergente para φ .

b) *A condição é suficiente.* Suponhamos que existe uma sucessão (φ_n) de elementos de \mathfrak{X} tal que $\varphi = \text{Lim } \varphi_n$. Existirá então, pelo menos, um comum domínio de holo-

morfia D das funções $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi$, tal que, a cada $\varepsilon > 0$, corresponde uma ordem ν , de modo que resulte

$$|\varphi_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon, \text{ sobre } D, \text{ para } n > \nu.$$

Suponhamos que D é aberto e representemos: por f_n o elemento de (C) que representa φ_n sobre D ($n=1, 2, \dots$); por f o elemento de (C) que representa φ sobre D . É óbvio que a sucessão (f_n) converge para f em $f(D)$. Logo f é aderente ao conjunto dos representantes de φ em (C) e portanto φ aderente ao conjunto \mathfrak{F} ,

q. e. d.

Este resultado permite-nos pois afirmar que:

[17.5] *A topologia introduzida em $\mathfrak{F}[C]$ pelo operador Lim coincide com a topologia de $\mathfrak{F}[C]$ como espaço cociente de região funcional (C) .*

É claro que o operador Lim definido em $\mathfrak{F}(C)$ é já *unívoco*, ao contrário do que sucedia com o operador de convergência definido em (C) . Além disso, as condições L_1, L_2 ($n.^\circ 1$) continuam a ser verificadas. Tem-se pois que:

[17.6] *A respeito do operador Lim introduzido pela Def. [17.3], o conjunto $\mathfrak{F}[C]$ é um espaço (L) .*

18. O conjunto $\mathfrak{F}[C]$ como espaço (L) vectorial. O novo conceito de linha analítica. — No conjunto $\mathfrak{F}[C]$ podem ainda ser introduzidas definições de «soma de duas funções» e de «produto duma função por um número complexo», como se fez na 1.^a dissertação. *Tais operações podem considerar-se como as transformadas, por meio de κ , das correspondentes operações definidas em (C) .* Mas observa-se esta diferença fundamental: *a respeito de tais ope-*

rações, o conjunto $\mathfrak{F}[C]$ é já um espaço vectorial relativo ao corpo complexo, ao contrário do que sucede com a região linear (C) .

Viu-se ainda na 1.^a dissertação que:

[18.1] *A respeito dos conceitos de adição, multiplicação escalar e convergência, tais como foram definidos, o conjunto $\mathfrak{F}[C]$ é um espaço (L) vectorial — ao qual chamamos, precisamente, o **espaço funcional analítico** $\mathfrak{F}[C]$.*

Tendo atenção na maneira como foram definidos tais conceitos, observa-se também que, *entre os representantes dos elementos de $\mathfrak{F}[C]$ em (C) , podem ser excluídos, como inessenciais, todos aqueles cujos domínios de existência não sejam vizinhanças de C , segundo a def. [17.1].* Pode mesmo, para cada elemento φ de $\mathfrak{F}[C]$ eleger-se um representante privilegiado em (C) : por exemplo, *aquele representante cujo domínio de existência é o conjunto dos pontos interiores a todos os círculos de convergência das séries que representam φ em torno de cada ponto de C .* Assim nos aproximamos do conceito de espaço funcional de Pincherle, a que me refiro logo de entrada na minha 1.^a dissertação.

*

Já observámos que na definição de linha analítica, tal como foi dada por Fantappiè, não intervém minimamente a topologia do espaço funcional \mathfrak{E} . (Fantappiè poderia ter definido um tal conceito utilizando a definição de limite que apresento em [12.2], mas isso mesmo daria lugar a complicações, relativamente à escolha dos domínios de existência). Pelo contrário, no espaço funcional $\mathfrak{F}[C]$, pode ser introduzido de maneira muito simples um conceito de linha analítica a partir da topologia ali definida:

[18.2] *Linha analítica.* — Dizemos que uma função $f(\lambda)$ da variável complexa λ , de contradomínio contido em $\mathfrak{F}[C]$, *representa parametricamente uma linha analítica* de $\mathfrak{F}[C]$, quando $f(\lambda)$ é analítica localmente (isto é, holomorfa) num domínio do plano esfera. E dizemos que duas tais funções f_1, f_2 , definidas em domínios D_1, D_2 , respectivamente, representam a *mesma linha analítica* de $\mathfrak{F}[C]$, quando existe uma transformação θ , biunívoca e analítica, de D_1 sobre D_2 , tal que $f_1(\lambda) \equiv f_2(\theta(\lambda))$.

Quanto ao conceito de «analiticidade» aqui mencionado, ele deriva imediatamente (como se viu na 1.^a dissertação) dos conceitos de «adição», «multiplicação escalar» e «limite» definidos em $\mathfrak{F}[C]$. *Desaparecem agora totalmente as preocupações relativas a domínios de existência.* E não haverá nisso inconveniente? Não porque, em primeiro lugar:

[18.3] *Toda a linha analítica $F(\lambda)$ de \mathfrak{S} contida em (C) dá lugar a uma linha analítica $f(\lambda)$ de $\mathfrak{F}[C]$, desde que se ponha:*

$$f(\lambda) = z(F(\lambda)), \text{ sobre o domínio } D \text{ de } F(\lambda).$$

Reciprocamente, para toda a linha analítica $f(\lambda)$ de $\mathfrak{F}[C]$ pode construir-se uma linha analítica $F(\lambda)$ de (C) tal que: $f(\lambda) = z(F(\lambda))$, sobre um domínio fechado D^ fixado arbitrariamente no interior do domínio de $f(\lambda)$.*

Esta proposição é uma consequência imediata do que foi estabelecido nos n.^{os} 5, 6 da minha memória [I] e no n.^o 38 da minha 1.^a dissertação.

Além disso, recordemos a definição seguinte:

[18.4] *Transformação analítica.* — Seja S um espaço (L) vectorial qualquer. Dizemos que uma transformação T de domínio $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}[C]$ e de contradomínio contido em S é *analítica*, quando transforma *linhas analíticas* de $\mathfrak{F}[C]$ (contidas em \mathfrak{X}) em *linhas analíticas* de S .

Finalmente:

[18.5] TEOREMA. *Seja X uma vizinhança (A, σ) dum elemento f do espaço funcional \mathfrak{E} . Seja por outro lado S um espaço (L) vectorial qualquer. Toda a transformação analítica T de X sobre S é da forma*

$$T = T^* \kappa$$

em que κ designa a transformação natural de (C) sobre $\mathfrak{F}[C]$ e T^ uma transformação analítica do conjunto $\kappa(X)$ sobre o espaço S , tendo-se ⁽¹⁾*

$$T^* = \kappa(T).$$

Reciprocamente, toda a transformação T daquela forma é uma transformação analítica de X sobre S . Existe assim uma correspondência biunívoca $T \leftrightarrow T^$ entre as transformações analíticas de X sobre S e as transformações analíticas de $\kappa(X)$ sobre S .*

Esta proposição resulta imediatamente de [18.3].

Conclusões. Como acabamos de ver, o espaço $\mathfrak{F}[C]$ resume tudo o que há de *essencial* na região funcional linear (C) de Fantappiè. Na verdade, houve apenas uma mudança de linguagem, com o objectivo de tornar mais cómodos os raciocínios, o que, de resto, concorda inteiramente com o que eu digo na introdução da minha memória [I]:

«Mi è sembrato, tuttavia, che il nuovo concetto potesse ancora essere modificato (e non sostanzialmente), in modo da rendere più agevole la trattazione di detta teoria e, quindi, più facile il suo ulteriore sviluppo».

Mas é bem sabido quanto uma simples mudança de linguagem pode ser fecunda em matemática. Já mais de

(1) Veremos adiante que o conjunto $\kappa(X)$ é aberto desde que X o seja.

uma vez pus em relevo o facto de, em toda a teoria de Fantappiè, os operadores efectivamente estudados, com o domínio no espaço funcional \mathfrak{S} — os *funcionais analíticos* — serem unicamente operadores de contradomínio numérico, isto é, operadores que, a *funções*, fazem corresponder *números*. Só ao tratar das linhas analíticas são ali consideradas funções (de variável complexa) que tomam os valores em \mathfrak{S} e, assim mesmo, vejam-se as complicações, os raciocínios emaranhados e dificilmente controláveis a que dá origem esse conceito. E não é portanto de surpreender este facto:

Não há, em toda a teoria de Fantappiè, um estudo de operadores contínuos ou de operadores analíticos, com o domínio e o contradomínio contidos em \mathfrak{S} .

Ora são esses — os operadores que transformam *funções* em *funções* — os que verdadeiramente interessam, *porque nessa categoria se encontram o operador de derivação e todos os que Fantappiè utiliza nas aplicações do seu cálculo operacional.*

O expediente dos «funcionais mistos» é, como já mostrei nos trabalhos anteriores, apenas um modo de ladear o problema, sem o resolver.

Com a nova orientação, foi-me possível mostrar sem dificuldade que a expressão geral das transformações lineares contínuas (ou analíticas, visto que há equivalência entre os dois conceitos) dum espaço $\mathfrak{F}[C]$ sobre um espaço $\mathfrak{F}[C^*]$, é a seguinte:

$$T_z[\varphi(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \theta(z, \lambda) \varphi(\lambda) d\lambda, \quad \text{para } z \in D^*,$$

sendo φ um elemento variável de $\mathfrak{F}[C]$, Γ a fronteira devidamente orientada dum domínio de holomorfia de φ (escolhido com larga arbitrariedade), $\theta(z, \lambda)$ uma função de z, λ , holomorfa num domínio de Ω^2 que contenha $C^* \times (\Omega - C)$ e, finalmente, D^* uma vizinhança de C^* ,

dependente de Γ ; *mas o variar de D^* com Γ não influe no resultado, que é sempre um determinado elemento ψ de $\mathfrak{F}[C^*]$: o transformado de φ por meio de T .*

Com a orientação de Fantappiè, não vejo como seria possível chegar a um resultado equivalente a este, de tal modo se me afigura rebarbativa e artificiosa uma escolha dos domínios de holomorfia, de modo a serem verificadas as condições de linearidade e de analiticidade (ou continuidade), escolha que, de restò, seria absolutamente estranha ao espírito da questão.

Mais geralmente ainda, foi-me possível fazer assim o estudo dos operadores analíticos, mesmo não lineares, com o domínio num espaço $\mathfrak{F}[C]$ e o contradomínio num espaço $\mathfrak{F}[C^]$.*

Em todo esse estudo a topologia introduzida intervém de maneira essencial. Pelo contrário, na teoria de Fantappiè tal não sucede, como foi objectivamente reconhecido por ele mesmo na sua memória [II] (pág. 620, chamada:

«Devo qui ricordare che in una memoria di Minetti (.....) si criticavano i miei lavori, non per errori concreti in essi riscontrati, ma per ciò che in essi non era ancora stato fatto (in particolare per la mancanza di una topologia dello spazio funzionale) e per la poca convenienza e opportunità, secondo tale Autore, delle definizioni fondamentali da me adottate. Poichè io non ho mai preteso di aver fatto tutto quanto ci sarebbe da fare, mentre ritengo che la convenienza e fecondità di un nuovo indirizzo di ricerca non possa essere stabilita al suo inizio, ma solo dagli sviluppi successivi e dai collegamenti, spesso impreveduti anche per l'autore, con altre teorie, non risposi allorè a tali critiche, nonostante qualche asprezza di linguaggio; ad ogni modo quanto precede chiarisce anche le ragioni per cui credetti opportuno non mettermi con le mie ricerche sulla stessa strada di tanti altri Autori, aggiungendo allora un nuovo spazio funzio-

nale ai moltissimi già esistenti, e battere invece una strada del tutto nuova e quindi, naturalmente, anche meno familiare e comoda di quella abituale».

Ponderem-se estas palavras:

«... ritengo che la convenienza e fecondità di un nuovo indirizzo di ricerca non possa essere stabilita al suo inizio, ma solo dagli sviluppi successivi e dai collegamenti, spesso impreveduti anche per l'autore, con altre teoria...»

Ora, como se viu na 1.^a dissertação, o novo ponto de vista que adoptei permitiu-me efectivamente estabelecer fecundas conexões («collegamenti»), com a teoria das funções analíticas em anéis normados instituída por Lorch, e com a teoria das funções analíticas em espaços de Banach, desenvolvida por A. E. Taylor, Hille, Zorn, etc. — construções abstractas, de larguíssimo alcance, a que a teoria de Fantappiè vem subordinar-se como caso concreto.

Resta um pormenor de linguagem a discutir: eu chamo «função analítica ligada a um conjunto» ao que na realidade não passa duma classe de funções holomorfas. Primeiro que tudo, há que ter em conta este facto: algum nome era preciso dar a essas entidades, elementos dos novos espaços. Além disso, o conceito de «função analítica ligada a um conjunto» assemelha-se intuitivamente ao de função analítica de Weierstrass, como eu observo na minha memória [I]: *«Si vede dunque come il concetto di «funzione analitica legata ad un insieme» sia per così dire intermedio fra quello di funzione analitica di Weierstrass» e «quello di funzione localmente analitica», tendendo a riunire i vantaggi dell'uno e dell'altro senza conservarne g'inconvenienti».*

Finalmente, convém recordar este precedente: Na teoria dos espaços funcionais hilbertianos, uma vez definida «distância entre duas funções f, g » como o integral lebesguiano de $(f - g)^2$ sobre o domínio de existência comum observa-se que a distância pode ser nula, tendo-se

contudo $f(x) \neq g(x)$ sobre um conjunto de medida L nula (por exemplo, sobre o conjunto dos números racionais), o que induz desde logo a identificar duas funções que coincidam «presque partout», isto é, que difiram quando muito sobre um conjunto de medida nula. Assim, cada «função», elemento do espaço funcional, será então na realidade uma classe de funções no sentido ordinário.

De resto, como se observou atrás, poderia fixar-se para cada função analítica ligado a um conjunto um domínio de holomorfia privilegiado, recaindo assim no conceito corrente de função. Porque não o fazer então? Mas por uma simples razão de comodidade! Pela mesma razão que nos leva, por exemplo, a utilizar diferentes representações para um *mesmo* número fraccionário, embora, para cada um deles, se possa adoptar uma representação privilegiada: a fracção irredutível, a dizima, a fracção contínua, etc.

Haveria ainda um ponto a considerar: a questão do prolongamento analítico de operadores funcionais. Mas este assunto ficará para um próximo trabalho.

§ 3.º — Topologia dos novos espaços funcionais analíticos

19. O espaço $\mathfrak{F}[C]$ como reunião de espaços de Banach. Sistema de vizinhanças em $\mathfrak{F}[C]$. — Já na 1.ª dissertação mostrei como todo o espaço funcional analítico $\mathfrak{F}[C]$ se pode exprimir como reunião ⁽¹⁾ de espaços de Banach: Seja D um qualquer domínio fechado do plano-esfera; representemos por $[D]$ a família de todas as funções *holomorfas no interior* de D e *contínuas no domínio* D (anulando-se no ponto impróprio, se este pertence a D); chamando *norma duma função* $\varphi \in [D]$ ao valor máximo de

(1) Na 1.ª dissertação emprego o termo «soma» em vez de «reunião».

$|\varphi(z)|$ para $z \in D$, tem-se que $[D]$ é um espaço de Banach complexo. Pois bem: o espaço $\mathfrak{F}[C]$ pode ser considerado como a reunião de todos os espaços de Banach $[D]$ tais que D é uma vizinhança de C .

Introduzamos ainda a seguinte

[19.1] CONVENÇÃO. Em tudo o que se segue, D_n designará o conjunto de pontos de Ω cuja distância a C é $\leq 1/n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Posto isto, ter-se-á mais precisamente:

[19.2] O espaço funcional analítico $\mathfrak{F}[C]$ pode ser considerado como o espaço reunião de todos os espaços de Banach $[D_n]$, para $n = 1, 2, \dots$.

O termo «reunião» pode aqui ser entendido de duas maneiras: *reunião de espaços* (L) (def. [4.2]) ou *reunião de espaços topológicos* (def. [3.1]). Ambas as acepções são lícitas e até equivalentes, como resulta do que será estabelecido no n.º seguinte. Adoptando a segunda acepção, a proposição [19.2] pode enunciar-se deste outro modo:

[19.3] Seja \mathfrak{Z} um subconjunto qualquer de $\mathfrak{F}[C]$. Para que um dado elemento φ de $\mathfrak{F}[C]$ seja aderente a \mathfrak{Z} , é necessário e suficiente que exista pelo menos uma vizinhança D_ν de C , tal que, para todo o $\varepsilon > 0$, se encontre pelo menos um elemento ζ de \mathfrak{Z} satisfazendo à condição:

$$|\zeta(z) - \varphi(z)| < \varepsilon \quad \text{sobre } D_\nu.$$

Sob esta forma a proposição [19.2] torna-se evidente.

Observe-se agora que o novo modo de conceber o espaço $\mathfrak{F}[C]$ nos permite facilmente, mediante o critério geral [3.1], assinalar um sistema admissível de vizinhança para cada elemento de $\mathfrak{F}[C]$:

[19.4] Definição de vizinhança. — Dado um ponto φ de $\mathfrak{F}[C]$ e fixada uma sucessão $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ de números

positivos, representemos por V_n a totalidade dos elementos ζ de $\mathfrak{F}[C]$ tais que

$$|\zeta(z) - \varphi(z)| < \varepsilon_n \text{ sobre } D_n,$$

Nestas condições, chamaremos *vizinhança* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ de φ à reunião de todos os conjuntos V_n assim obtidos, para $n = 1, 2, \dots$.

É fácil ver, tendo em atenção [3.1], que esta noção de vizinhança introduz em $\mathfrak{F}[C]$ a topologia já ali definida. Por outro lado, recordando o critério geral de equivalência entre famílias de vizinhanças, tem-se o resultado:

[19.5] *Impondo à sucessão (ε_n) , a que se refere a definição [9.4], as condições suplementares*

$$1) \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_n > \dots \quad ; \quad 2) \quad \lim \varepsilon_n = 0,$$

obtém-se uma família de vizinhanças de φ equivalente à primeira.

Visto que a segunda família é uma parte da primeira, basta provar que toda a vizinhança pertencente à primeira contém pelo menos uma vizinhança pertencente à segunda. Ora isto é evidente, se notarmos que, para toda a sucessão (ε_n) , existe pelo menos uma sucessão (ε'_n) , que verifica as condições 1), 2) e tal que $\varepsilon'_n \leq \varepsilon_n$, para $n = 1, 2, \dots$.

Para comodidade de exposição, convém ainda introduzir a seguinte

[19.6] *CONVENÇÃO. Em tudo o que segue, dado um elemento φ de $\mathfrak{F}[C]$, designaremos por $|\varphi|_m$ o valor positivo assim definido*

$$|\varphi|_m \begin{cases} = \max_{z \in D_m} |\varphi(z)|, & \text{se } D_m \text{ é domínio de holomorfia de } \varphi, \\ = +\infty, & \text{se } D_m \text{ não é domínio de holomorfia de } \varphi, \end{cases}$$

$$(m = 1, 2, \dots).$$

20. Carácter topológico do operador Lim. — É agora altura de abordar um problema que tinha ficado por resolver na 1.^a dissertação:

É a noção de «limite» que definimos em $\mathfrak{F}[C]$ uma noção topológica, isto é, exprimível em termos de «fecho»?

A questão resolve-se pela afirmativa:

[20.1] TEOREMA. *Todo o espaço funcional analítico $\mathfrak{F}[C]$ é um espaço (L^*) .*

Em virtude do que foi dito no n.º 4, esta proposição é equivalente à seguinte:

[20.2] *Condição necessária e suficiente para que se tenha*

$$\text{Lim } \varphi_n = 0 \quad (\varphi_n \in \mathfrak{F}[C]; \quad n = 1, 2, \dots)$$

é que, a toda a vizinhança V de 0 , se possa associar uma ordem ν , tal que

$$\varphi_n \in V, \quad \text{para } n > \nu.$$

Demonstração. — Que a condição é necessária, é evidente, recordando as definições [17.3] e [19.4].

Mostremos agora que a condição é suficiente. Suponhamos que tal condição é verificada a respeito da sucessão (φ_n) . Começarei então por mostrar que existe pelo menos uma vizinhança D_m sobre a qual o conjunto $\{\varphi_n\}$ é limitado. Para o provar, suponhamos que tal não sucede e designemos por σ um número positivo qualquer: então, existirá pelo menos um termo φ_{i_1} da sucessão (φ_n) tal que

$$|\varphi_{i_1}|_1 > \sigma \quad (\text{veja-se CONVENÇÃO [19.6]});$$

por sua vez, existirá um termo φ_{i_2} de (φ_n) , tal que

$$|\varphi_{i_2}|_2 > \sigma, \quad i_2 > i_1,$$

e assim sucessivamente. Podemos deste modo extrair da sucessão (φ_n) uma sucessão (φ_{i_m}) tal que:

$$[20.3] \quad i_1 < i_2 < \dots < i_m < \dots; \quad |\varphi_{i_m}|_m > \sigma, \quad \text{para } m = 1, 2, \dots.$$

Seja agora ε_1 um número positivo inferior a σ ; seja por sua vez ε_2 um número positivo inferior a σ e a $|\varphi_{i_1}|_2$; ε_3 um número positivo inferior a σ , $|\varphi_{i_1}|_3$, $|\varphi_{i_2}|_3$; e assim sucessivamente. Teremos deste modo uma sucessão (ε_m) que verifica as condições

$$[20.4] \quad \varepsilon_m < \min(\sigma, |\varphi_{i_1}|_m, |\varphi_{i_2}|_m, \dots, |\varphi_{i_{m-1}}|_m), \quad \text{para } m = 1, 2, \dots.$$

Mas recordemos que, em virtude duma conhecida propriedade das funções analíticas, se tem

$$|\zeta|_1 \geq |\zeta|_2 \geq \dots \geq |\zeta|_m \geq \dots, \quad \text{para todo o } \zeta \in \mathfrak{F}[C];$$

portanto, da segunda parte de [20.3] resultará

$$\begin{aligned} & |\varphi_{i_p}|_m > \sigma, \quad \text{para } m \leq p, \\ \text{donde} & \\ & |\varphi_{i_p}|_m > \varepsilon_m, \quad \text{para } m \leq p. \end{aligned}$$

Por outro lado, de [20.4] deduz-se

$$|\varphi_{i_p}|_m > \varepsilon_m, \quad \text{para } m > p.$$

Então será:

$|\varphi_{i_p}|_m > \varepsilon_m$, quaisquer que sejam $m, p = 1, 2, \dots$, donde se conclue que nenhum dos termos da sucessão (φ_{i_p}) pertence à vizinhança $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ de 0 . Mas isto é incompatível com a hipótese de, em cada vizinhança de 0 , existirem todos os termos de (φ_n) , a partir de certa ordem.

O absurdo proveio de supor que o conjunto $\{\varphi_n\}$ não é limitado em nenhum dos domínios D_m .

Seja então D_v o primeiro dos domínios D_m sobre os quais o conjunto $\{\varphi_n\}$ é limitado. Vou provar que se tem

$$[20.5] \quad \lim_n \varphi_n(z) = 0, \quad \text{uniformemente sobre } D_{v+1},$$

e assim o teorema ficará demonstrado. *Suponhamos que tal não sucede.* Quere isto dizer que é possível determinar um $\varepsilon > 0$ de modo que se tenha

$$[20.6] \quad |\varphi_n|_{v+1} > \varepsilon,$$

para infinitos valores distintos $k_1, k_2, \dots, k_p, \dots$ do índice n . Agora de duas uma: ou há pelo menos um termo da sucessão (φ_{k_p}) que se repete infinitas vezes, ou isso não sucede. No primeiro caso, é óbvio que se pode extrair de (φ_{k_p}) uma subsucessão (φ_p^*) uniformemente convergente em D_{v+1} (com $\varphi_1^* = \varphi_2^* = \dots$). No segundo caso, o conjunto $\{\varphi_{k_p}\}$ tem infinitos elementos distintos e, como é limitado no domínio D_v , será possível, em virtude dum conhecido teorema ⁽¹⁾, extrair dele uma sucessão formada de elementos distintos, uniformemente convergente no interior de D_v e portanto em D_{v+1} .

Seja pois (ψ_m) uma subsucessão de (φ_{k_p}) uniformemente convergente em D_{v+1} . Como tal sucessão é formada de infinitos termos de (φ_n) , em cada vizinhança de 0 haverá pelo menos um elemento do conjunto $\{\psi_m\}$, o que significa que 0 é aderente a este conjunto e que portanto se pode extrair dele uma sucessão convergente para 0 , isto é, *uniformemente convergente para 0* sobre algum dos domínios D_n . Logo, será necessariamente:

$$\lim_m \psi_m(z) = 0, \quad \text{uniformemente sobre } D_{v+1},$$

o que porém é incompatível com o facto de (ψ_m) ser uma subsucessão de (φ_{k_p}) e esta verificar a condição [20.6].

O absurdo proveio de supor que a condição [20.5] não é verificada. Assim o teorema fica completamente demonstrado.

Este teorema habilita-nos imediatamente a afirmar que:

[20.7] *Sobre o espaço funcional analítico $\mathfrak{F}[C]$, todo o operador contínuo no sentido de Cauchy é também contínuo no sentido de Heine (há portanto equivalência entre os conceitos, à base do axioma de Zermelo).*

(1) Veja-se por exemplo MONTEL [I] ou VALIRON [I], pág. 436.

Ter-se-á pois, atendendo a [5.2], o seguinte resultado:

[20.7] *Seja S um espaço (V) qualquer e designe T uma transformação de domínio $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}[C]$ e de contradomínio $\mathfrak{Y} \subset S$. A transformação T será L -contínua num ponto φ de \mathfrak{X} , se, e só se, para cada vizinhança V de $T(\varphi)$ e para cada vizinhança D de C , se puder determinar um correspondente número $\delta > 0$, de modo que seja verificada a condição:*

$$\zeta \in \mathfrak{X}, |\zeta(z) - \varphi(z)| < \delta \text{ sobre } D \rightarrow T(\zeta) \in V.$$

21. Outras particularidades da topologia de $\mathfrak{F}[C]$. — Visto que $\mathfrak{F}[C]$ é um espaço (L) , imediatamente se pode afirmar:

[21.1] *A condição \overline{IV} (n.º 1) e a condição T_1 são verificadas em $\mathfrak{F}[C]$.*

Quanto à condição \overline{V} (n.º 1) o resultado é negativo:

[21.2] **TEOREMA.** *Sendo C limitado, o espaço $\mathfrak{F}[C]$ não verifica a condição \overline{V} .*

Demonstração. Recordemos que, em termos de vizinhança ⁽¹⁾, a condição \overline{V} se traduz do seguinte modo:

[21.3] «Qualquer que seja o ponto x , pode fixar-se, para cada vizinhança V_x de x , uma vizinhança V_x^* do mesmo ponto, tal que, todo o ponto $y \in V_x^*$, possui pelo menos uma vizinhança $V_y \subset V_x$.»

Seja então V_0 uma vizinhança de 0 em $\mathfrak{F}[C]$, definida por uma dada sucessão (ε_n) , tal que

$$[21.4] \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots ; \quad \lim \varepsilon_n = 0,$$

e V_0^* uma segunda vizinhança de 0 , qualquer, definida

(1) APPERT [I], § VI.

por uma sucessão (ε_n^*) . Consideremos uma função $\xi \in \mathfrak{F}[C]$, assim definida:

$$[21.5] \quad \xi(z) \equiv c, \quad \text{com } 0 < c < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_1^*).$$

Ter-se-á então

$$0 < \|\xi\|_1 < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_1^*), \quad \text{e portanto } \xi \in V_0^*, \xi \in V_0.$$

Seja agora V_ξ , uma vizinhança *qualquer* de ξ , definida por uma sucessão (ε'_n) e designe ε_ν o primeiro termo da sucessão (ε_n) tal que

$$[21.6] \quad \varepsilon_\nu < c, \quad D_\nu \neq \Omega.$$

(será, evidentemente, $\nu > 1$, em virtude de [21.5]).

Consideremos, por outro lado, uma função η assim definida:

$$[21.7] \quad \eta(z) \equiv c + \varepsilon \frac{1}{z - \alpha}, \quad \text{com } \alpha \in D_{\nu-1} - D_\nu,$$

(isto é, com α pertencente ao domínio $D_{\nu-1}$ mas não a D_ν), sendo ε um coeficiente positivo a determinar. Tem-se pois

$$[21.8] \quad \eta(\alpha) = \infty.$$

Designemos por Γ uma circunferência de centro α , *contida em* $D_{\nu-1} - D_\nu$ e ponhamos

$$M = \max \left| \frac{1}{z - \alpha} \right|, \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Então é claro que será,

$$\left| \frac{1}{z - \alpha} \right| < M, \quad \text{para } z \in D_\nu,$$

e portanto, atendendo a [21.7],

$$c - \varepsilon M < |\eta(z)| < c + \varepsilon M, \quad \text{para } z \in D_\nu.$$

Assim, ter-se-á

$$|\eta - \xi|_v < \varepsilon'_v, \quad \text{isto é,} \quad |\eta(z) - c| < \varepsilon'_v, \quad \text{sobre } D_v,$$

desde que seja

$$\varepsilon M < \varepsilon'_v \quad \text{isto é,} \quad \varepsilon < \frac{\varepsilon'_v}{M},$$

e então poderemos afirmar que

$$\eta \in V_\xi.$$

Mas por outro lado, em virtude de [21.6], ter-se-á

$$|\eta|_n > \varepsilon_n, \quad \text{para } n \geq v,$$

desde que seja

$$c - \varepsilon M > \varepsilon_v, \quad \text{isto é,} \quad \varepsilon < \frac{c - \varepsilon_v}{M},$$

e então, atendendo a [21.8] e a [21.4],

$$\eta \notin V_0.$$

Por conseguinte, basta tomar

$$\varepsilon < \min \left(\frac{\varepsilon'_v}{M}, \frac{c - \varepsilon_v}{M} \right),$$

para que resulte simultâneamente

$$\eta \in V_\xi, \quad \eta \notin V_0.$$

Em resumo: *qualquer que seja a vizinhança V_0^* de 0 , existe sempre um ponto ξ de V_0^* , que não tem nenhuma vizinhança contida em V_0 .* Mas isto significa, precisamente, que a condição [21.3], e portanto a condição \bar{V} , não é verificada. q. e. d.

Restava examinar o caso de C ser ilimitado, mas é o primeiro caso o que oferece mais interesse.

Ocorre entretanto averiguar quais sejam os conjuntos fechados ou os conjuntos abertos em $\mathfrak{F}[C]$. Não me foi possível resolver o problema de maneira completa. A seguinte proposição oferece uma solução parcial:

[21.9] TEOREMA. *Condição suficiente para que um dado conjunto \mathfrak{X} seja aberto em $\mathfrak{F}[C]$ é que, para todo o elemento $\varphi \in \mathfrak{X}$, exista pelo menos um número $\varepsilon < 0$, tal que o conjunto de todas as funções ζ de $\mathfrak{F}[C]$ que verificam a condição*

$$|\zeta(z) - \varphi(z)| < \varepsilon, \quad \text{sobre } C,$$

esteja contido em \mathfrak{X} .

Demonstração. Basta observar que, para um tal elemento φ , é sempre possível determinar uma vizinhança $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ contida em \mathfrak{X} — fazendo por exemplo:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon.$$

Será a condição enunciada também necessária? Ou haverá conjuntos abertos de outros tipos? Eis uma pergunta a que não me foi possível responder. Observa-se no entanto que *a família completa dos conjuntos abertos em $\mathfrak{F}[C]$ define sobre este conjunto uma topologia que satisfaz à condição V — aquela mesma topologia que se obtém definindo o espaço $\mathfrak{F}[C]$ como espaço-cociente da região linear (C) , segundo o critério [9.6].*

A dificuldade em caracterizar esta família, mediante uma definição simples, justifica em parte o facto de se ter preferido o critério [9.3].

Ao teorema [21.9], interessa associar este outro:

[21.10] TEOREMA. *Seja \mathfrak{X} um subconjunto aberto de $\mathfrak{F}[C]$. Qualquer que seja a vizinhança D_n de C , o conjunto $\mathfrak{X} \cap [D_n]$ resulta aberto no espaço $[D_n]$ (mas não no espaço $\mathfrak{F}(C)$).*

Trata-se, como é fácil ver, duma consequência imediata das proposições [3.5] e [19.2].

Este resultado tem particular interesse em relação ao que foi dito no n.º 47 da 1.ª dissertação.

O teorema [21.2] habilita-nos imediatamente a afirmar que:

[21.11] O espaço funcional analítico $\mathfrak{F}[C]$ não é metrizável (sendo C limitado).

Recordemos que é por um processo inteiramente análogo que se demonstra a proposição correspondente para o espaço \mathfrak{R} das funções reais, definidas num mesmo intervalo, com a definição de convergência pontual.

Mas podemos ir um pouco mais longe. Já na 1.^a dissertação observei que, na minha nota [II], tinha afirmado serem os espaços funcionais analíticos espaços (E), mas que uma análise posterior me tinha levado a descobrir um erro nos raciocínios em que assentava essa minha afirmação. Começemos pelo seguinte

[21.12] TEOREMA. *No espaço $\mathfrak{F}[C]$ não é possível instituir para cada ponto um sistema admissível de vizinhanças com a potência do numerável (supondo C limitado).*

Demonstração. Suponhamos que existe um sistema admissível $\{V^n\}$ de vizinhanças do ponto 0 , constituído por uma infinidade numerável de conjuntos. Então, em virtude da equivalência entre o sistema de vizinhanças $\{V^n\}$ e o sistema definido por [19.5], poderemos, para cada valor de n , fixar uma vizinhança W^n de 0 , definida por uma sucessão decrescente $\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \dots$ e tal que

$$W^n \subset V^n.$$

Por outro lado, como toda a vizinhança da família $\{W^n\}$ contém uma vizinhança da família $\{V^n\}$, segue-se que as duas famílias são equivalentes.

Seja agora ν o primeiro valor de n tal que $n > 1, D_n \neq \Omega$ e designe V' uma vizinhança de 0 definida por uma sucessão (ε'_n) que verifique as seguintes condições:

$$\varepsilon'_{n+1} > \varepsilon'_n, \quad \varepsilon'_n < \varepsilon_n^n, \quad \text{para } n \geq \nu$$

$$\varepsilon'_n < \min(\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2, \dots, \varepsilon_n^{\nu-1}), \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Consideremos por outro lado uma sucessão (ζ_n) de elementos de $\mathfrak{F}[C]$ assim definida:

$\zeta_n(z) \equiv c + \frac{\varepsilon}{z - \alpha_n}$, com $\alpha_n \in D_{n-1} - D_n$, para $n \geq \nu$, sendo

$$\varepsilon'_n < c < \varepsilon''_n, \quad \varepsilon < \min \left(\frac{c - \varepsilon'_n}{M}, \frac{\varepsilon''_n - c}{M} \right),$$

em que M designa o máximo de $(z - \alpha_n)^{-1}$ sobre uma circunferência Γ de centro α_n , contida em $D_{n-1} - D_n$. Então ter-se-á

$$\varepsilon'_n < |\zeta_n|_n < \varepsilon''_n, \quad \text{para } n \geq \nu,$$

e ainda

$$\zeta_n(\alpha_n) = \infty, \quad \text{para } n \geq \nu,$$

donde se conclue que é simultâneamente

$$\zeta_n \in W^n, \quad \zeta_n \notin V^i, \quad \text{para } n \geq \nu.$$

Quere isto dizer que a vizinhança V^i de $\mathbf{0}$ não contém nenhuma das vizinhanças $W^\nu, W^{\nu+1}, \dots$, e, como por outro lado também não contém nenhuma das vizinhanças $W^1, \dots, W^{\nu-1}$, segue-se que a família $\{W^n\}$ não constitue um sistema admissível de vizinhança de $\mathbf{0}$, ao contrário do que tínhamos deduzido da hipótese inicial.

Daqui resulta imediatamente que

[21.13] *O espaço $\mathfrak{F}[C]$ não é um espaço (E) (sendo C limitado).*

(Porque, se o fosse, seria possível instituir para cada ponto um sistema admissível de vizinhanças com a potência do numerável).

Assim se conseguiu dar uma resposta a cada uma das questões postas no n.º 19 da 1.ª dissertação.

22. A L-continuidade da adição. — E, para terminar, examinemos o comportamento da adição a respeito da topologia do espaço $\mathfrak{F}[C]$.

Já vimos que se trata dum espaço (L) vectorial e que portanto se tem:

$$\text{Lim} (\varphi_n + \psi_n) = \text{Lim } \varphi_n + \text{Lim } \psi_n,$$

sendo (φ_n) , (ψ_n) sucessões convergentes arbitrárias de elementos de $\mathfrak{F}[C]$.

Vejamos agora se tal operação é contínua no sentido de Cauchy a respeito dos dois argumentos tomados conjuntamente. Como se trata dum espaço (L) vectorial bastaria provar que essa operação é contínua no ponto $(0, 0)$, isto é, que se verifica a condição seguinte:

Para toda a vizinhança V de 0 existe pelo menos uma vizinhança W de 0 tal que

$$W + W \subset V$$

(designando por $W + W$ o conjunto de todas as funções que se obtém somando dois quaisquer elementos de W).

Mas esta condição implica a condição \overline{V} (tratar-se-ia então dum «grupo topológico» a respeito da adição). Com efeito, dada uma vizinhança V de 0 e determinada uma vizinhança W de 0 tal que $W + W \subset V$, é claro que, para todo o $\varphi \in W$, a vizinhança $\varphi + W$ de φ estaria contida em V, pois que a condição $W + W \subset V$ equivale a esta outra:

$$\varphi \in W \rightarrow \varphi + W \subset V;$$

e análogamente para qualquer elemento de $\mathfrak{F}[C]$ distinto de 0.

Mas nós já vimos que no espaço $\mathfrak{F}[C]$ não é verificada a condição \overline{V} . Logo:

[22.1] *No espaço $\mathfrak{F}[C]$ a adição não é contínua no sentido de Cauchy a respeito dos dois argumentos, tomados conjuntamente (supondo C limitado).*

NOTAS FINAIS

I — Só depois de impressa a primeira folha deste trabalho, me apercebi de que a proposição recíproca do teorema [3.5] é também verdadeira, sendo a sua demonstração quase imediata. Podemos pois substituir o enunciado [3.5], por este outro, mais completo:

Condição necessária e suficiente para que, no espaço reunião (U, Φ) , um conjunto A seja fechado [aberto], é que o conjunto $A \cap U_i$ seja fechado [aberto] no espaço S_i , qual-quer que seja i .

II — Ao recordar, no n.º 11, a definição do espaço funcional \mathfrak{S} , faltou dizer que são admitidas como elementos de \mathfrak{S} apenas funções localmente analíticas cujos domínios não coincidam com Ω , devendo portanto ser excluída a função idênticamente nula sobre Ω , visto ser essa a única função localmente analítica que, anulando-se no ponto ∞ , tem por domínio de definição todo o plano-esfera ($F_{\text{ANTAPPIÈ}}$ [II], pág. 636).

III — Na 2.ª parte do teorema [18.3], deve impor-se à função pontual $f(\lambda)$ a restrição de, no ponto ∞ , ter como valor um elemento de $\mathfrak{F}[C]$ que se reduza a uma constante numérica (supondo que o domínio de $f(\lambda)$ contém o ponto ∞).

IV — Quando um dado elemento de $\mathfrak{F}[C]$ corresponder a uma função analítica uniforme em todo o seu natural

domínio de regularidade, podemos, para brevidade de linguagem, identificar esse elemento de $\mathfrak{F}[C]$ com a referida função, tal como se fez, por exemplo, a propósito da função η considerada em [21.7]:

$$\eta(z) \equiv c + \frac{\varepsilon}{z - \alpha}.$$

É claro que, neste caso, os domínios de holomorfia de η serão as vizinhanças de C que não contêm α .

BIBLIOGRAFIA

P. ALEXANDROFF und H. HOPF

- [I] *Topologie*, Springer, Berlin, 1935.

A. APPERT

- [I] *Propriété des espaces abstraits les plus généraux*. Act. Scient. et Ind. 145, Hermann, Paris, 1934.

G. BIRKHOFF

- [I] *Lattice theory*. Amer. Math. Soc. Col. Pub., New York, 1940.

BOURBAKI

- [I] *Topologie générale*. Act. Scient. et Ind., 858, Hermann, Paris, 1940.

L. FANTAPPIÈ

- [I] *I funzionali analitici*. Mem. Acc. Lincei, 1930.
[II] *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici*. Mem. Acc. Italia, 1941, pp. 617-706.

D. H. HYERS

- [I] *Linear topological spaces*. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 51, no. 1, 1945.

C. KURATOWSKI

- [I] *Topologie I*. Monografias matemáticas, Varsóvia, 1935.

A. MONTEIRO

- [I] *Les ensembles fermés et les fondements de la topologie*, Port. Math., vol. 2, 1941.
[II] *La notion de fermeture et les axiomes de séparation*, Port. Math., vol. 2, 1941.

P. MONTEL

- [I] *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe.* Gauthier-Villars, Paris, 1910.

A. PEREIRA GOMES

- [I] *Funções continuas.* Cadernos de Análise Geral, Junta de Investigação Matemática, Porto, 1944.

H. RIBEIRO

- [I] *Sur l'axiomatique des espaces topologiques de M. Fréchet.* Port. Math., vol. 1, 1940.

J. SEBASTIÃO E SILVA

- [I] *L'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche.* Mem. Acc. Lincei, 1947, pp. 207-240.
- [II] *Sull'Analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche,* Rend. Acc. Lincei, Giugno, 1946.
- [III] *As funções analíticas e a Análise funcional.* Dissertação de doutoramento, 1948 (publicada na Port. Math. em 1950).

G. VALIRON

- [I] *Théorie des fonctions.* Masson, Paris, 1948.

R É S U M É

Le but essentiel de ce travail est d'approfondir l'étude de la topologie des espaces fonctionnels analytiques déjà commencée dans nos travaux précédents [I], [II], [III], et de comparer notre point de vue avec celui de M. Fantappiè. La lecture de ces travaux n'est pas indispensable pour comprendre ce que nous exposons ici.

Dans le § 1 nous nous occupons de quelques notions d'analyse général qui interviennent par la suite. Surtout, les notions d'*espace réunion* et d'*espace quotient* jouent ici un rôle fondamental.

Étant donnée une famille $\{S_i\}$ d'espaces topologiques, nous appelons **espace réunion** de cette famille l'espace S , dont l'ensemble fondamental est la réunion des ensembles fondamentaux de tous les espaces donnés et dont l'opération de fermeture est définie d'après la règle suivante: un point p est *adhérent* à un ensemble A dans S , si p est adhérent à un sous-ensemble de A dans un, au moins, des espaces S_i (la condition $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ n'étant pas exigée). Si l'on suppose donné un système de voisinages dans chacun des espaces S_i , on peut en déduire un système admissible de voisinages dans l'espace réunion, d'après le théorème [3.3]. En outre, on a le résultat suivant: «*Pour qu'un ensemble A soit fermé [ouvert] dans S ,*

il faut et il suffit que l'ensemble $A \cap S_i$ soit fermé [ouvert] dans l'espace S_i quel que soit i ([3.5] et NOTAS FINAIS, I) ⁽¹⁾.

Quant au concept d'**espace quotient**, nous avons dû nous éloigner de la définition usuelle. Soit S un espace (V) , dans lequel on suppose définie une relation d'équivalence, ρ , et soit S^* la partition déterminée dans S par ρ . Désignons par α la transformation naturelle de S sur S^* , c'est-à-dire, la transformation qui fait correspondre à chaque élément x de S l'ensemble $x^* \in S^*$ auquel x appartient. Nous introduisons dans S^* une topologie, de façon à rendre vraie la proposition suivante:

[9.4] *Si l'on désigne par R un espace (V) quelconque, et par T une transformation continue de S sur R vérifiant la condition*

$$x \rho y \rightarrow T(x) = T(y),$$

la transformation T^ de S^* sur R telle que*

$$T^*(x^*) = T(x), \quad \text{si } x^* = \alpha(x),$$

sera aussi continue [nous posons $T^ = \alpha(T)$]. Réciproquement, si T^* est une transformation continue de S^* sur R , alors $T^* \cdot \alpha$ sera aussi une transformation continue de S sur R qui vérifie la condition sus-indiquée.*

Or, pour que cette proposition soit vraie, *il faut et il suffit* que l'opération de fermeture soit définie dans S^* d'après la règle suivante:

[9.3] Un élément a de S^* est adhérent à un ensemble $X \subset S^*$, s'il existe au moins un représentant de a dans S qui soit adhérent à l'ensemble de tous les représentants des éléments de X dans S .

(1) Pour abrégé, nous représentons ici par S_i l'ensemble fondamentale de l'espace S_i , tandis que dans le § 1 nous posons $S_i = (U_i, \Phi_i)$, U_i étant l'ensemble fondamental et Φ_i l'opérateur de fermeture de l'espace S_i .

Nous disons alors que l'ensemble S^* , muni de cette topologie, est l'espace quotient de S par la relation φ .

Cependant, ce n'est pas là le critère généralement adopté. La plupart des auteurs (ALEXANDROFF et HOPF, BOURBAKI, etc.) imposent à tous les espaces considérés la condition $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et alors on définit directement dans S^* la notion d'ensemble fermé: «Un sous-ensemble X de S^* est *fermé*, si l'ensemble de tous les éléments des éléments de X est fermé dans S »; la fermeture d'un ensemble $A \subset S$ étant définie comme le plus petit ensemble fermé contenant A . Or, cette opération de fermeture peut ne pas coïncider avec celle définie d'après [9.3], quoique la famille des ensembles fermés soit la même dans ces deux topologies.

* * *

Dans le § 2 nous montrons comment on passe naturellement de l'espace fonctionnel de Fantappiè aux espaces fonctionnels analytiques tels que nous les avons définis dans nos travaux précédents. (Dans ces travaux, nous n'avons pas exposé en détail le passage dont il est question ici, ce qui aurait pu suggérer que nos hypothèses sont indépendantes de celles de M. Fantappiè et que, par suite, on ne peut pas vraiment parler d'une simplification de sa théorie).

Suivant la terminologie de M. Fantappiè, une **fonction localement analytique** est une fonction complexe, $w = f(z)$, de la variable complexe z , univoquement définie et analytique dans un ensemble ouvert, D , du plan-sphère, Ω , cet ensemble D étant considéré comme le *domaine de définition* de f (même si D est non connexe ou si f est prolongeable analytiquement au delà de D). Nous désignons par \mathfrak{S} l'ensemble constitué par: 1) toutes les fonctions localement analytiques dont les domaines ne contiennent pas le point ∞ ; 2) toutes les fonctions localement

analytiques dont les domaines contiennent ∞ et qui s'annulent en ce point (la fonction identiquement nulle dans tout le plan-sphère étant exclue). L'espace fonctionnel de Fantappiè (d'ordre 1) est précisément l'ensemble \mathfrak{S} avec la définition suivante de voisinage :

[11.1] Soit f_0 un élément quelconque de \mathfrak{S} . Désignant par A un ensemble fermé contenu dans le domaine de f_0 et par σ un nombre positif quelconque, on appelle **voisinage** (A, σ) de f_0 l'ensemble de toutes les fonctions $f \in \mathfrak{S}$, dont les domaines contiennent A et tels que :

$$|f(z) - f_0(z)| < \sigma, \text{ quel que soit } z \in A.$$

Mais il y a une autre notion qui joue un rôle fondamental dans la théorie de M. Fantappiè : c'est la notion de **ligne analytique**. Considérons une fonction $f(z, \lambda)$, de deux variables complexes λ, z , laquelle, pour chaque valeur de λ , devienne un élément déterminé de \mathfrak{S} , et désignons par $D(\lambda)$ le domaine de cette fonction de z dépendant de λ . On dit que $f(z, \lambda)$ représente une *ligne analytique* de \mathfrak{S} , si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $f(z, \lambda)$ est une fonction holomorphe des variables z, λ dans un domaine ouvert de l'espace projectif à deux dimensions complexes.

2) Si l'on pose $C(\lambda) = \Omega - D(\lambda)$, l'ensemble $C(\lambda)$ est une fonction *continue* de λ (dans le sens précisé au n.º 13).

On voit aussitôt qu'il ne suffit pas, en général, de donner une expression analytique pour définir une telle fonction $f(z, \lambda)$: il faut y adjoindre une loi d'après laquelle on associe à chaque valeur de λ un domaine $D(\lambda)$, de façon que la condition 2) soit vérifiée. *Or, cette loi sera en général tout à fait artificielle et deviendra très peu commode pour les raisonnements.*

La notion de ligne analytique est le noyau de la notion de **fonctionnelle analytique**. Soit Θ une fonctionnelle

définie dans un ensemble $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}$, c'est-à-dire, une transformation univoque de \mathfrak{N} sur l'ensemble des nombres complexes. On dit que Θ est une *fonctionnelle analytique*, si Θ vérifie les conditions suivantes :

1° — \mathfrak{N} est un domaine ouvert de \mathfrak{S} .

2° — Si $f_0 \in \mathfrak{N}$ et f_1 est un *prolongement* de f_0 (nous écrivons alors $f_0 \prec f_1$), on a $\Theta(f_0) = \Theta(f_1)$.

3° — Si $f(z, \lambda)$ représente une *ligne analytique* de \mathfrak{S} , alors $\Theta_z[f(z, \lambda)]$ sera une *fonction analytique* de λ .

M. Fantappiè justifie la condition 2° par des considérations intuitives. Mais il faut remarquer le fait suivant :

[14.2] *Pour que la fonctionnelle Θ soit continue, il faut que Θ vérifie la condition 2°.*

Ce résultat subsiste, plus généralement, si l'on suppose que l'espace contenant le contredomaine de Θ est *un espace* (V) *quelconque vérifiant la condition T_1* . (Dans l'espace \mathfrak{S} cette condition n'est pas vérifiée, puisque, si $f_0 \prec f_1$, tout voisinage de f_0 contient f_1).

Quoique l'espace \mathfrak{S} soit présenté au commencement de la théorie des fonctionnelles analytiques, l'essentiel de cette théorie est développé autour du concept de **région fonction linéaire** : Soit C un sous-ensemble de Ω , fermé, non vide et distinct de Ω ; la famille de toutes les fonctions appartenant à \mathfrak{S} , dont les domaines contiennent C , est la *région fonctionnelle linéaire* déterminée par C ; on la désigne par (C) . On peut maintenant définir les notions de *somme* de deux éléments de (C) et de *produit* d'un élément de (C) par un nombre complexe; on peut aussi parler de *fonctionnelles linéaires* définies dans (C) . Mais il ne faut pas oublier que *la région (C) n'est pas un espace vectoriel*.

La condition 2° imposée par M. Fantappiè à ses fonctionnelles analytiques [$\Theta(f_0) = \Theta(f_1)$, si $f_0 \prec f_1$] nous fait nous demander s'il ne serait pas plus commode d'identi-

fier f_0 avec f_1 , quand $f_0 \prec f_1$. Mais on se trouve arrêté dès l'abord par le fait suivant :

Si dans l'espace S on voulait identifier chaque élément f avec ses prolongements, on devrait identifier tous les éléments de \mathfrak{S} . (Une fonctionnelle continue définie dans tout l'espace \mathfrak{S} se réduit nécessairement à une constante).

D'ailleurs, si l'on se bornait à identifier f_0 avec f_1 dans le cas où f_1 est un *prolongement analytique* de f_0 , on trouverait tous les inconvénients des fonctions pluriformes, que M. Fantappiè a voulu éviter.

Toutefois, nous ne devons pas oublier que, dans presque toute la théorie de M. Fantappiè, il n'est question que de régions linéaires ⁽¹⁾. Or, dans une région linéaire (C), on peut déjà identifier partout chaque élément avec ses prolongements : cela n'a plus d'inconvénients, mais seulement des avantages. C'est ce que nous avons fait dans nos travaux précédents [I], [II], [III] :

Nous disons que deux éléments f_1, f_2 de (C) sont *équivalents* et nous écrivons

$$f_1 \cong f_2,$$

lorsqu'il existe une troisième fonction $g \in (C)$ dont f_1, f_2 soient des prolongements :

$$g \prec f_1, \quad g \prec f_2.$$

La relation « \cong » détermine une partition dans (C) : les éléments de cette partition sont appelés **fonctions analytiques attachées** à C ; l'ensemble de ces éléments est représenté par $\mathfrak{F}[C]$. Il s'agit maintenant d'introduire dans $\mathfrak{F}[C]$ une topologie, de façon à retenir *tout ce qui est essentiel dans la région* (C). Or, nous avons déjà tout préparé à cet effet dans nos considérations sur l'espace

(1) Exception faite de l'étude du prolongement analytique des fonctionnelles ; nous comptons y revenir dans un prochain travail.

quotient. Nous avons adopté le critère [9.3], plutôt que le critère [9.6], parce que celui-ci ne donnait pas prise à nos raisonnements. D'autre part, la topologie que l'on définit de cette manière peut être introduite dans $\mathfrak{F}[C]$ d'une façon tout à fait indépendante, comme nous l'avons fait dans nos travaux précédents, en partant de la définition suivante de convergence :

On dit qu'une succession (φ_n) d'éléments de $\mathfrak{F}[C]$ converge vers un élément φ de $\mathfrak{F}[C]$, s'il existe au moins un ensemble ouvert contenant C , sur lequel la succession $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$ converge uniformément vers $\varphi(z)$.

L'ensemble $\mathfrak{F}[C]$, avec la topologie que nous venons d'y introduire et avec des notions naturelles d'addition et de multiplication scalaire, est ce que nous avons nommé l'espace fonctionnel analytique $\mathfrak{F}[C]$ — un espace (L) vectoriel.

La proposition général [9.4] appliquée dans ce cas nous permet de ramener immédiatement l'étude des opérateurs continus sur (C) à l'étude des opérateurs continus sur $\mathfrak{F}[C]$, puisque la condition

$$f_1 \cong f_2 \quad \rightarrow \quad \Theta(f_1) = \Theta(f_2)$$

est nécessairement vérifiée (pourvu que l'espace contenant le contredomaine de Θ vérifie la condition T_1).

En outre, la notion de ligne analytique peut être, elle aussi, traduite dans l'espace $\mathfrak{F}[C]$: les lignes analytiques de $\mathfrak{F}[C]$ seront les transformées des lignes analytiques de (C) par la transformation naturelle α de (C) sur $\mathfrak{F}[C]$; c'est-à-dire, si $f(z, \lambda)$ représente une ligne analytique de (C) , alors $\alpha_s[f(z, \lambda)]$ représente aussi une ligne analytique de $\mathfrak{F}[C]$, et réciproquement. Mais cette notion peut être définie directement dans l'espace fonctionnel analytique $\mathfrak{F}[C]$, à partir des notions primitives de cet espace (addition, opérateurs scalaires et opérateur Lim), comme nous l'avons fait précédemment: une fonction $f(\lambda)$ de la variable complexe λ et dont les valeurs soient éléments

de $\mathfrak{F}[C]$ représente une **ligne analytique** de $\mathfrak{F}[C]$, lorsque $f(\lambda)$ est une *fonction analytique* de λ dans un domaine de Ω . Il n'est donc plus question des domaines de définition, $D(\lambda)$, de la fonction $f(z, \lambda)$ de z , dont le choix devient si artificiel et embarrassant dans la théorie de M. Fantappiè.

Nous pouvons dire maintenant qu'une transformation T est **analytique**, lorsque T transforme les lignes analytiques en lignes analytiques: voilà ce qui remplace la notion de fonctionnelle analytique de M. Fantappiè; en effet:

[18.5] *Soit X un voisinage (A, σ) d'un élément f de \mathfrak{G} . Si l'on désigne par S un espace (L) vectoriel quelconque et par T une transformation analytique de X sur S [vérifiant la condition: $f_1 \prec f_2 \rightarrow T(f_1) = T(f_2)$] la transformation $T^* = \alpha(T)$, où α représente la transformation naturelle de (A) sur $\mathfrak{F}[A]$, est aussi analytique. Réciproquement, si la transformation T^* de $\alpha(X)$ sur S est analytique, la transformation $T = T^* \cdot \alpha$ de X sur S est aussi analytique.*

L'espace $\mathfrak{F}[C]$ contient donc tout ce qu'il y a d'essentiel dans la région linéaire (C) . On obtient de cette manière un instrument plus souple pour l'Analyse fonctionnelle dans le champ des fonctions analytiques. *Ce concept nous a permis déjà d'établir la connexion de cette branche de l'Analyse fonctionnelle avec la théorie générale des fonctions analytiques dans des espaces de Banach* (développée par MM. A. Taylor, E. Hille, M. Zorn, etc.) *et dans des algèbres de Banach* (E. Lorch, etc.) — ce qui auparavant ne semblait point viable.

En particulier, on peut faire maintenant l'étude systématique des opérateurs qui transforment des fonctions en fonctions (tels que l'opérateur de dérivation et ces opérateurs que M. Fantappiè utilise dans son calcul symbolique). Dans la théorie de M. Fantappiè, ces opérateurs se présentent déguisés sous la forme de *fonctionnelles mixtes*, ce qui tourne la difficulté sans la résoudre,

et ne permet pas de baser ouvertement le calcul opératoire sur la formule de Cauchy généralisée (M. Fantappiè l'a fait pour les matrices finies; M. N. Dunford, pour les transformations linéaires continues d'un espace de Banach sur lui-même). Or, dans nos travaux précédents, nous avons établi l'expression générale des transformations linéaires continues (ou analytiques) d'un espace $\mathfrak{F}[C]$ sur un espace $\mathfrak{F}[C']$, expression qui est le noyau de la théorie des transformations analytiques entre ces espaces. *Au contraire, une étude des transformations analytiques dont le domaine et le contredomaine soient contenus dans \mathfrak{E} , d'après le point de vue de M. Fantappiè, ne semble pas facile: sa notion de ligne analytique nous en donne une idée.*

* * *

Le § 3 est consacré plus particulièrement à l'étude de la structure topologique des espaces fonctionnels analytiques, tels que nous les avons définis. Nous avons déjà montré que l'espace $\mathfrak{F}[C]$ peut être considéré comme la réunion d'une famille d'espaces de Banach. *On peut alors fixer pour chaque élément de $\mathfrak{F}[C]$ un système admissible de voisinages.*

Mais nous avons laissé plusieurs questions sans réponse. Par exemple:

L'espace $\mathfrak{F}[C]$ est-il un espace (L^) ?*

Maintenant, nous avons trouvé que la réponse est affirmative, c'est-à-dire, nous croyons avoir démontré le théorème suivant:

[20.2] *Pour que, dans l'espace $\mathfrak{F}[C]$, une succession (φ_n) de points converge vers un point φ , il faut et il suffit que, pour chaque voisinage V de φ , il existe un ordre ν tel que:*

$$n > \nu \rightarrow \varphi_n \in V.$$

Pour démontrer cette proposition, nous avons utilisé le théorème de Montel sur les familles de fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine.

Nous avons aussi posé ces questions :

L'espace $\mathfrak{F}[C]$ est-il un espace de Banach ? un espace (D) ? un espace (E) ?

Au n.º 21 nous démontrons que l'espace topologique $\mathfrak{F}[C]$ ne vérifie pas la condition $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ (l'ensemble C étant borné). Il s'ensuit que cet espace n'est pas métrisable. Plus encore : *Il n'est pas possible de fixer pour chaque élément de $\mathfrak{F}[C]$ un système admissible de voisinages avec la puissance du numérable* — d'où il résulte que l'espace $\mathfrak{F}[C]$ n'est pas même un espace (E). (Dans notre Note [II], nous étions arrivé à la conclusion contraire, mais par la suite nous avons trouvé une erreur dans nos raisonnements).

Mais il ne faut pas oublier que nous avons défini l'espace topologique $\mathfrak{F}[C]$ comme espace quotient dans la région fonctionnelle (C), d'après le critère [9.3]. Si, au contraire, nous avons adopté le critère [9.6], la topologie définie dans $\mathfrak{F}[C]$ satisferait sûrement la condition indiquée plus haut. Mais nous ne l'avons pas fait, comme nous l'avons déjà dit, parce que la famille des ensembles fermés dans $\mathfrak{F}[C]$ n'a pas donné prise à nos raisonnements. Toutefois, *il n'est pas exclu qu'on réussisse à définir de façon convenable, dans l'ensemble $\mathfrak{F}[C]$, une topologie qui le rende un espace pseudo-normable ou même un espace de Banach (avec les opérations vectorielles déjà définies)*. La question reste donc ouverte dans cette direction.

Enfin, nous avons considéré la question suivante :

Est-ce que la somme $u + v$ définie dans $\mathfrak{F}[C]$ est une fonction continue (au sens de Cauchy) de ses deux arguments u, v ?

La réponse est encore négative, le condition $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ n'étant pas vérifiée. Mais nous savons déjà que, dans

$\mathfrak{F}[C]$, le somme $v + v$ est fonction continue de v, v au sens de Heine: il **s'agit d'un espace (L) vectoriel**.

Ces résultats n'affectent nullement les développements que nous avons faits dans nos travaux précédents. On voit seulement que l'Analyse fonctionnelle, dans ce domaine, garde un caractère spécifique, qui ne permet pas de la ramener *immédiatement* aux cadres préétablis de l'Analyse générale.

E R R A T A

Pág.	Linha	Onde está	Deveria estar
23	15	um subconjunto A	um subconjunto $\Phi(A)$
27	14	$\tau_2 \supset \tau_1$	$\tau_2 \subset \tau_1$
29	27	$\bigcap_i \Phi_i(A)$	$\bigcap_i [\Phi_i(A) \cap U_*]$
96	3	S	\mathfrak{S}