

Sobre o cálculo simbólico geral para n elementos duma álgebra topológica

por

J. Sebastião e Silva

PUBLICADO EN LA REVISTA LAS CIENCIAS, DE MADRID. AÑO XXIV, NÚM. I



C. BERMEJO, IMPRESOR
GARCÍA MORATO, 122. — TELÉF. 33 06 19
M A D R I D

SOBRE O CALCULO SIMBOLICO GERAL PARA n ELEMENTOS DUMA ALGEBRA TOPOLOGICA

por J. SEBASTIÃO E SILVA

Director do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa

1. Seja γ um cone convexo não vazio de \mathbb{R}^n , de vértice na origem, que coincida com a aderência do seu interior e não contenha nenhuma recta de \mathbb{R}^n . Seja por outro lado $\tilde{\gamma}$ o tubo de base γ em \mathbb{C}^n , isto é o conjunto de todos os pontos $z = x + iy$ ($z_j = x_j + iy_j$) de \mathbb{C}^n com a parte real x em γ , considerando \mathbb{R}^n como o sub-espaço de \mathbb{C}^n obtido pela projecção $z \rightarrow x = \Re z$. Para cada $k = 0, 1, 2, \dots$, designaremos por \bar{k} o vector (k, k, \dots, k) e por $\mathfrak{A}_k^{\mathbb{I}}$ o espaço vectorial das funções complexas $\varphi(z) = \varphi(z_1, \dots, z_n)$ definidas e contínuas sobre o translado $\tilde{\gamma} + \bar{k}$ de $\tilde{\gamma}$, holomorfas no interior de $\tilde{\gamma} + \bar{k}$ e tais que o seu quociente pela função

$$\pi_k(z) = \prod_{j=1}^n (1 + |z_j|^2)$$

limitado sobre $\tilde{\gamma} + \bar{k}$, sendo $\mathfrak{A}_k^{\mathbb{I}}$ munido da norma

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in \tilde{\gamma} + \bar{k}} \left| \frac{\varphi(z)}{\pi_k(z)} \right|.$$

Então, se identificarmos cada função $\varphi \in \mathfrak{A}_k^{\mathbb{I}}$ à sua restrição ao tubo $\tilde{\gamma} + \bar{k}$, vê-se que $\mathfrak{A}_k^{\mathbb{I}} \subset \mathfrak{A}_{k+1}^{\mathbb{I}}$ e que a aplicação idêntica do primeiro espaço no segundo é completamente contínua. Daqui resulta que o limite indutivo $\bigcup_1^{\infty} \mathfrak{A}_k^{\mathbb{I}}$ dos $\mathfrak{A}_k^{\mathbb{I}}$ é um espaço do tipo (\mathfrak{S}_2) (i. e.

dual dum espaço de Schwartz metrisável completo). Designaremos por \mathfrak{A}_ω^I este limite indutivo: trata-se do espaço das funções $\varphi(z)$ holomorfas e de crescimento polinomial sobre translatados do tubo γ .

Seja agora γ^* o cone polar de γ em \mathbb{R}^n , isto é a intersecção de todos os semi-espaços determinados, para o lado de γ , pelos hiperplanos de \mathbb{R}^n que passem pela origem e são perpendiculares a geratrizes de γ ; mais precisamente, γ^* será o conjunto de todos os vectores $x \in \mathbb{R}^n$ tais que o produto interno $xv = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ de x por qualquer vector $v \in \gamma$ é não negativo. Posto isto, designaremos por $\Delta[\gamma^*]$ o espaço vectorial das distribuições de tipo exponencial e nulas fora de γ^* , isto é o espaço das distribuições T sobre \mathbb{R}^n da forma

$$T = D_{x_1}^k \dots D_{x_n}^k e^{k|x|} F(x_1, \dots, x_n), \quad [1]$$

onde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, k é um inteiro não negativo e F pertence ao espaço $\mathfrak{C}_b[\gamma^*]$, das funções complexas contínuas e limitadas em \mathbb{R}^n , nulas fora de γ^* (munido da sua norma usual); sendo o espaço $\Delta[\gamma^*]$ munido da topologia do limite indutivo das imagens do espaço normado $\mathfrak{C}_b[\gamma^*]$ pelas aplicações $F \rightarrow T$ definidas por (1), para $k = 0, 1, 2, \dots$. O espaço $\Delta[\gamma^*]$ é uma álgebra com respeito a convolução definida pela fórmula

$$S * T = \int_{\mathbb{R}^n} S(\hat{x} - u) T(u) du,$$

no sentido da topologia daquele espaço; a convolução $S * T$ pode também definir-se axiomáticamente como a função bilinear contínua de S e T , com os valores em $\Delta[\gamma^*]$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (S * T) = S * \frac{\partial T}{\partial x_j} = \frac{\partial S}{\partial x_j} * T \quad \delta * T = T * \delta = T.$$

Posto isto, demonstra-se:

TEOREMA 1.—*Existe uma (e só uma) aplicação linear contínua \mathfrak{L} de $\Delta[\gamma^*]$ sobre \mathfrak{A}_ω^I («transformação de Laplace») tal que*

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} T\right) = z_j \mathfrak{L}(T),$$

para todo o j , e $\mathfrak{I}(\delta) = 1$. Essa aplicação é dada pela fórmula

$$\mathfrak{I}(T) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\hat{z} \cdot u} T_u \, d u, \quad T \in \Lambda[\gamma^*]$$

onde $z \cdot u = z_1 u_1 + \dots + z_n u_n$, sendo o integral definido por prolongamento contínuo a T e referido à topologia de $\mathfrak{A}_\omega^\gamma$; a aplicação \mathfrak{I} admite uma inversa também contínua dada por

$$\mathfrak{I}^{-1}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-\infty i}^{k+\infty i} \int_{k-\infty i}^{k+\infty i} e^{\lambda \cdot t} \varphi(\lambda) \, d\lambda, \quad \varphi \in \mathfrak{A}_k^\gamma, \, k=0, 1, \dots,$$

sendo o integral definido de modo análogo ao anterior. Além disso, \mathfrak{I} é um isomorfismo da álgebra de convolução $\Lambda[\gamma^*]$ sobre a álgebra multiplicativa $\mathfrak{A}_\omega^\gamma$; isto é, tem-se ainda:

$$\mathfrak{I}(S * T) = \mathfrak{I}(S) \mathfrak{I}(T).$$

2. Designemos por $\tilde{\Lambda}[\gamma^*]$ o espaço das distribuições de tipo exponencial com os suportes contidos em translatados do cone γ^* , isto é o espaço das translatadas $\tau_h T = T(x-h)$ das distribuições $T \in \Lambda[\gamma^*]$, com a mais fina topologia que torne contínuas as translações, induzindo em $\Delta[\gamma^*]$ a topologia deste espaço. Por outro lado, seja $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega^\gamma$ o espaço das funções ψ da forma

$$\psi(z) = e^{h \cdot z} \varphi(z) \quad \text{com} \quad h \in \mathbb{R}^n, \, \varphi \in \mathfrak{A}_\omega^\gamma,$$

munido da mais fina topologia que torne contínuas estas aplicações.

$$\varphi \rightarrow e^{h \cdot z} \varphi \quad \text{de} \quad \mathfrak{A}_\omega^\gamma \quad \text{em} \quad \tilde{\mathfrak{A}}_\omega^\gamma$$

Em tais condições, a transformação de Laplace $\mathfrak{I}: \Lambda[\gamma^*] \rightarrow \mathfrak{A}_\omega^\gamma$ pode prolongar-se num (e um só) isomorfismo $\tilde{\mathfrak{I}}$ de $\tilde{\Lambda}[\gamma^*]$ sobre $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega^\gamma$ tal que

$$\tilde{\mathfrak{I}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} T\right) = z_j \tilde{\mathfrak{I}}(T) \quad \tilde{\mathfrak{I}}(\delta) = 1.$$

Para simplificar, escreveremos \mathbb{L} em vez de $\tilde{\mathbb{L}}$ e diremos ainda que este operador é a transformação de Laplace. Aliás, continua a ter-se $\mathbb{L}(S * T) = \mathbb{L}(S) \mathbb{L}(T)$, sendo a convolução definida em $\tilde{\Lambda}[\gamma^*]$, de modo análogo ao de $\Lambda[\gamma^*]$.

3. Seja agora \mathbf{A} uma álgebra complexa, munida de elemento unidade, \mathbf{e} , e de uma topologia de espaço localmente convexo, tal que o produto seja hipocontínuo a respeito das partes compactas de \mathbf{A} . Suponhamos além disso que \mathbf{A} é completa a respeito das sucessões. Então:

TEOREMA 2.—Dado um sistema qualquer $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ de n elementos de \mathbf{A} , permutáveis dois a dois, não pode existir mais de um homomorfismo contínuo \mathbb{H} da álgebra $\mathfrak{A}_n^{\mathbb{L}}$ sobre \mathbf{A} , que faça corresponder à função 1 o elemento \mathbf{e} e a cada função z_j o elemento \mathbf{a}_j ($j = 1, \dots, n$). Para que exista um tal homomorfismo, é necessário e suficiente que:

E 1. Para todo o vector \mathbf{x} de γ^* a equação $\mathbf{u}'(\tau) = -(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{u}(\tau)$ onde $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_n \mathbf{a}_n$, admita, para τ real qualquer, a solução $\mathbf{u}(\tau)$ [que se designa por $e^{-\tau \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}$ ou por $\exp(-\tau \mathbf{x} \cdot \mathbf{a})$], tal que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{e}$ e que:

E 2. Os valores de $\mathbf{u}(\tau)$ sejam elementos regulares de \mathbf{A} que permutam com $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$;

E 3. $\mathbf{u}(\tau)$ tenha decrescimento rápido relativamente às exponenciais reais, quando $\tau \rightarrow +\infty$.

Verificadas estas condições, tem-se

$$\mathbb{H}(\varphi) = \int_{R^n} \exp(-t \cdot \mathbf{a}) \varphi_t \, dt \quad \text{com} \quad \varphi = \mathbb{L}^{-1}(\varphi),$$

sendo o integral a respeito da distribuição φ definido por prolongamento contínuo e referido à topologia de \mathbf{A} . Tem-se além disso, para todo o $t \in \gamma^*$:

$$\exp(-t \cdot \mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{iR^n} \exp(-t \cdot z) (\mathbf{a} - z)^{-1} \, dz.$$

Nestas condições, é natural convencionar escrever:

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) = \mathbb{H}(\varphi).$$

4. As considerações anteriores podem generalizar-se, substituindo o espaço \mathfrak{H}_0^I pelo espaço \mathfrak{F}^I (que contém o primeiro) das funções complexas $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ holomorfas do tipo exponencial sobre translatados do tubo $\tilde{\gamma}$; mas, para prolongar a \mathfrak{F}^I a transformação inversa de Laplace, \mathfrak{L}^{-1} , torna-se forçoso sair do quadro das distribuições; deverá mergulhar-se \mathfrak{H}_0^I num espaço $\mathfrak{U}[\gamma^*]$ de ultra-distribuições que generalise, para n variáveis, a noção de «ultra-distribuição do tipo exponencial e de suporte limitado à esquerda» que definimos em [4]. *Só deste modo se consegue construir um cálculo simbólico geral que englobe, por um lado, as técnicas mais ou menos ligadas à transformação de Laplace e, por outro lado, o método de Fantappié, cujas conhecidas limitações podem assim ser levantadas.*

Finalmente, todos estes resultados se podem ainda generalizar ao caso em que as funções φ e as distribuições T são funções, resp. distribuições vectoriais, tomando os valores num qualquer espaço localmente convexo E completo.

BIBLIOGRAFIA

- (1) SCHWARTZ (L) *Transformation de Laplace des distributions*. «Séminaire Math. de Lund», tome supplémentaire (1952), p. 196-206.
- (2) SILVA (J. S. e.): *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*. «Portugaliae Math.», 14 (1955), p. 105-132.
- (3) — — *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*. «Port. Math.», 17 (1958), p. 1-17.
- (4) — — *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*, «Math. Annalen», 21 (1958), p. 58-96.
- (5) SILVEIRA (M. da): *General operational calculus in n variables*, 1 «Port. Math.», 15 (1957).