

J. SEBASTIÃO E SILVA  
DA ACADEMIA DAS CIÊNCIAS DE LISBOA

## Sobre o cálculo simbólico relativo a uma álgebra localmente convexa

Comunicação apresentada na sessão da Classe de Ciências  
da Academia em 19 de Janeiro de 1961



LISBOA  
1961

**Separata do Boletim da Academia das Ciências de Lisboa**  
**—Volume XXXIII—Janeiro e Fevereiro de 1961**

O A. apresentou uma síntese dos diversos tipos de cálculo simbólico que tem considerado em trabalhos anteriores, em relação com a teoria das distribuições. A ideia desta síntese foi-lhe sugerida recentemente, por uma comunicação do matemático belga Lucien Waelbroeck sobre um novo conceito de espectro, no Colóquio sobre Análise Funcional, efectuado em Louvain, em Maio de 1960. O cálculo simbólico geral agora estabelecido inclui, como casos particulares, todas as modalidades até hoje conhecidas e utilizadas, desde o cálculo simbólico dos electrotécnicos até ao cálculo dos operadores auto-adjuntos da mecânica quântica, e encontra aplicação em vários tipos de problemas mistos, relativos a equações diferenciais parciais da física e da engenharia. Os resultados anunciados serão expostos em trabalhos a publicar em revistas estrangeiras da especialidade. No Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa prosseguem investigações sobre o mesmo tema.

---

1. Seja  $\mathbf{A}$  uma álgebra complexa, munida de elemento unidade,  $\mathbf{e}$ , e de uma topologia localmente convexa, a respeito da qual o produto seja separadamente contínuo. Para comodidade, designaremos por  $1$  o elemento unidade de  $\mathbf{A}$  e poremos  $\lambda 1 = \lambda$ , para todo o escalar  $\lambda$ .

Segundo L. Waelbroeck [8], chamaremos *conjunto espectral* dum elemento  $\mathbf{a}$  de  $\mathbf{A}$  todo o conjunto

S de números complexos, que verifique as duas condições seguintes:

- a) O elemento  $a - \lambda$  é invertível para todo o  $\lambda \in S$ .
- b) A função  $(a - \lambda)^{-1}$  de  $\lambda$ , com valores em  $\mathbf{A}$ , é limitada sobre o complementar,  $\mathbf{C} - S$ , do conjunto  $S$ .

Desde logo se reconhece que a classe de todos os conjuntos espectrais de  $\mathbf{a}$  é um filtro (cf. [8]). Chamar-lhe-emos o *filtro espectral de  $\mathbf{a}$* .

2. Uma base de filtro  $\{F_k\}$ , constituída por subconjuntos  $F_k$  do plano  $\mathbf{C}$ , com  $k = 1, 2, \dots$ , será chamada *regular*, quando verificar as seguintes condições:

R1. Qualquer que seja  $k$ ,  $\mathbf{C} - F_k$  é um aberto não vazio de  $\mathbf{C}$ .

R2. Para todo o  $k$  existe um  $\delta_k > 0$ , tal que a distância de  $\mathbf{C} - F_k$  a  $F_{k+1}$  é maior que  $\delta_k$ .

R3. Quaisquer que sejam  $k = 1, 2, \dots$  e  $\rho > 0$ , a fronteira de  $F_k$ , no círculo  $|z| \leq \rho$ , é formada por um número finito de linhas contínuas rectificáveis.

R4. Sendo  $c$  um ponto qualquer de  $\mathbf{C} - F_k$  e  $F_k^*$  a imagem de  $F_k$  pela transformação  $z \rightarrow 1/(z - c)$ , o comprimento da fronteira de  $F_k^*$ , intersectada com o círculo  $|z| \leq \rho$ , tende para um limite finito quando  $\rho \rightarrow 0$ , qualquer que seja  $F_k$ .

De R2 resulta manifestamente que o interior de  $F_k$  contém  $F_{k+1}$ , para todo o  $k$ .

Um filtro  $\mathbf{F}$  diz-se *regularizável*, quando admite uma base  $\{F_k\}$  regular.

3. Seja  $\mathbf{F}$  um filtro regularizável de subconjuntos de  $\mathbf{C}$  e seja  $\{F_k\}$  uma base de  $\mathbf{F}$ . Para todo o  $k$  de-

signamos por  $\mathcal{A}(F_k)$  o espaço das funções complexas  $\varphi$ , definidas e contínuas sobre  $F_k$ , holomorfas no interior de  $F_k$  e tais que

$$|\varphi(z)| \leq M |z|^k \text{ sobre } F_k,$$

sendo  $M$  uma constante dependente de  $\varphi$ . O espaço  $\mathcal{A}(F_k)$  é uma álgebra complexa, relativamente às noções naturais de soma e de produto de duas funções. Por outro lado, sendo  $c$  um ponto arbitrário de  $\mathbb{C} - F_1$ , consideramos o espaço  $\mathcal{A}(F_k)$  munido da topologia  $\mathcal{E}_k$  definida pela norma

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \left| \frac{\varphi(z)}{(z-c)^k} \right|$$

Prova-se que o espaço  $\mathcal{A}(F_k)$ , munido desta norma, é um espaço de Banach; e que a topologia  $\mathcal{E}_k$  não muda, quando se substitui  $c$  por um outro ponto de  $\mathbb{C} - F_1$ . Além disso, se identificarmos cada função  $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$  com a sua restrição ao conjunto  $F_{k+1}$ , é evidente que  $\mathcal{A}(F_k) \subset \mathcal{A}(F_{k+1})$ , para todo o  $k$ . Poremos então, por definição:

$$\mathcal{A}(F) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}(F_k)$$

No conjunto  $\mathcal{A}(F)$  definem-se, de modo natural, noções de soma e de produto, que o tornam uma álgebra complexa, munida de elemento unidade. Por sua vez, está indicado introduzir em  $\mathcal{A}(F)$  a topologia do limite indutivo dos espaços normados  $\mathcal{A}(F_k)$ , isto é, a menos fina topologia localmente convexa que, para cada  $k$ , induz em  $\mathcal{A}(F_k)$  uma topologia menos fina que  $\mathcal{E}_k$ . Ora demonstra-se que:

Qualquer que seja  $k$ , todo o conjunto  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}(\mathbf{F}_k)$ , limitado a respeito de  $\mathcal{E}_k$ , é relativamente compacto a respeito de  $\mathcal{E}_{k+1}$ .

Daqui resulta, por definição, que :

O espaço vectorial topológico  $\mathcal{A}(\mathbf{F})$  é um espaço do tipo  $(S_2)$  (ou um espaço  $(LN^*)$ , como dizemos em [1]).

Além disso é imediato que o produto  $\varphi \cdot \psi$ , em  $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ , é contínuo. Também não oferece dificuldade verificar que :

O elemento  $\hat{z}$  de  $\mathcal{A}(\mathbf{F})$  (isto é, a função  $\varphi(\hat{z}) \equiv z$ ) tem por filtro espectral precisamente  $\mathbf{F}$ .

4. Seja ainda  $\mathbf{A}$  uma álgebra topológica que verifique as condições indicadas no n.º 1. Suponhamos além disso que  $\mathbf{A}$  é separada e semi-completa e seja por outro lado  $\mathbf{F}$  um filtro de subconjuntos de  $\mathbf{C}$  que admita uma base  $\{\mathbf{F}_k\}$  regular. Nestas condições :

**TEOREMA.** Existe uma correspondência biunívoca  $H \leftrightarrow \mathbf{a}$  entre os homomorfismos contínuos  $H$  da álgebra  $\mathcal{A}(\mathbf{F})$  em  $\mathbf{A}$ , que transformam a unidade de  $\mathcal{A}(\mathbf{F})$  na unidade de  $\mathbf{A}$ , e os elementos  $\mathbf{a}$  de  $\mathbf{A}$  cujo filtro espectral é mais fino que  $\mathbf{F}$  (isto é, tais que todo o  $\mathbf{F}_k$  é conjunto espectral de  $\mathbf{a}$ ). Essa correspondência é dada pelas duas fórmulas recíprocas

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = H(\hat{z}) \\ H(\varphi) = \frac{(\mathbf{a} - \lambda_0)^p}{2\pi i} \int_{\dot{\mathbf{F}}_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^p} (\mathbf{a} - \lambda)^{-1} d\lambda, \end{array} \right.$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{F})$ ,

sendo  $\lambda_0$  um ponto arbitrário de  $\mathbf{C} - \mathbf{F}_1$  e  $k, p$  inteiros.

ros tais que  $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$  e  $\varphi(\lambda)(\lambda - \lambda)^{-p}$  seja limitada sobre  $F_k$ ; a fronteira  $\bar{F}_k$  de  $F_k$  considera-se orientada de modo a deixar à direita os pontos de  $F_k$ .

Este teorema justifica que se ponha

$$\varphi(\mathbf{a}) = H(\varphi), \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{F}).$$

(desde que o filtro espectral de  $\mathbf{a}$  seja mais fino que  $\mathbf{F}$ ). Fica assim estabelecido um cálculo simbólico que compreende, como casos particulares, todos os tipos de cálculo simbólico considerados nos nossos trabalhos anteriores (para uma só variável).

O caso mais interessante é aquele em que os  $F_k$  são ilimitados. Então, na fórmula anterior, intervem um integral impróprio, que se pode definir correctamente, no caso mais geral das bases  $\{F_k\}$  regulares.

5. Importa ainda observar os seguintes factos:

a) Pode determinar-se, mais geralmente, a expressão de todas aplicações lineares contínuas de  $\mathcal{A}(\mathbf{F})$  num espaço localmente convexo qualquer  $E$ , separado e semi-completo. No caso em que os conjuntos  $C - F_k$  são ilimitados, as «indicatrizes» de tais aplicações são as funções com valores em  $E$ , holomorfas e com «decréscimo quase-rápido» em cada um desses conjuntos.

b) Considerando  $n$  bases regulares  $F_k, \dots, F_k^n$  e designando por  $\mathbf{F}$  o filtro gerado pelos produtos cartesianos

$$F_k^1 \times F_k^2 \times \dots \times F_k^n, \quad k = 1, 2, \dots,$$

pode definir-se a álgebra  $\mathcal{A}(\mathbf{F})$  de funções  $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ , análogamente ao que fizemos para o caso de uma variável. O teorema anterior estende-

-se então trivialmente ao caso de  $n$  variáveis, o que nos permite definir funções de «operadores»

$\varphi(a_1, \dots, a_n)$ , com  $\varphi \in \mathcal{A}(\mathbf{F})$  e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{A}$ ,

no caso em que  $a_1, \dots, a_n$  são permutáveis entre si dois a dois e o filtro espectral de  $a_s$  é mais fino que o filtro de base  $\{F_k^s\}$ , para  $s = 1, \dots, n$ .

Mais geralmente ainda, pode estender-se o teorema anterior ao caso de funções  $\varphi$  com valores num espaço localmente convexo  $E$ , supondo que se define uma aplicação bilinear  $(a, u) \rightarrow au$  de  $\mathbf{A} \times E$  num outro espaço  $E_{\mathbf{A}}$ , hipocontínua relativamente às partes compactas.

*O cálculo simbólico assim estabelecido aplica-se a casos muito gerais de problemas mistos relativos a equações em derivadas parciais.*

c) Mediante «fórmulas de tipo exponencial» como as que considerámos em [3], [4] e [6], o anterior cálculo simbólico, de «forma cartesiana», pode estender-se ao caso de espaços  $\mathcal{A}(\mathbf{F})$ , em que o filtro  $\mathbf{F}$  não admite nenhuma base constituída só por produtos cartesianos e sub-conjuntos de  $\mathbf{C}$ . *Essa extensão do cálculo simbólico, em que intervêm ultra-distribuições, é aplicável a casos muito gerais de problemas de Cauchy, problemas nos limites e problemas mistos.*

d) Os resultados que anunciamos nesta comunicação serão expostos numa série de trabalhos, o primeiro dos quais deve aparecer na revista «Annali di Matematica», e já foram em parte anunciados no Congresso Luso-Espanhol para o Progresso das Ciências realizado em Sevilha, de 23 a 26 de Novembro de 1960.



## BIBLIOGRAFIA

- [1] J. SEBASTIÃO E SILVA. *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*. Rendiconti Mat. Univ. Roma (5) 14 (1955), p. 338-410.
  - [2] ——. *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*. Portugaliae Math. 14 (1955), p. 105-132.
  - [3] ——. *Sobre o cálculo simbólico geral para  $n$  elementos duma álgebra topológica*. Congresso Luso-Espanhol de 1958 (Madrid).
  - [4] ——. *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*. Port. Math. 17 (1958), p. 105-132.
  - [5] ——. *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*. Math. Annalen, 136 (1958), p. 58-96.
  - [6] ——. *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables* (8), 27 (1959), p. 42-47, 118-122.
  - [7] ——. *Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné*. Memorie Accad. Lincei (8), 6 (1960), p. 1-13.
  - [8] L. WAELBROECK. *Locally convex algebras; spectral theory*. Seminar on complex algebras, IAS (1957)-58).
  - [9] ——. *Étude spectrale de certaines algèbres complètes*. CBRM, Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle à Louvain (1960).
-