

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Su certe classi di spazi localmente
convessi importanti
per le applicazioni



EDIZIONI CREMONESE
della S. A. EDITRICE PERRELLA
ROMA 1955

(Dai « *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni* », Serie V, Vol. XIV, Fasc. 1-2, Roma 1955)

Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni

di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA (Lisbona)

1. Introduzione. — Il presente lavoro trae origine da precedenti ricerche che abbiamo eseguito, da una parte, sulla teoria dei funzionali analitici, e dall'altra, sulla teoria delle distribuzioni. Queste ultime ricerche sono oggetto del lavoro [17] (*), non ancora pubblicato, nel quale ci proponiamo di dare una sistemazione diretta, assiomatica, della teoria delle distribuzioni.

La similitudine fra quelle due teorie è, in vari sensi, profonda. In ambedue interviene, come strumento essenziale, la teoria degli spazi vettoriali topologici localmente convessi. Tuttavia, in un caso come nell'altro, si tratta di categorie di spazi, certo più ampie di quella degli spazi di BANACH, ma con speciali e ben definite caratteristiche comuni che scaturiscono da due teoremi centrali dell'analisi classica: il teorema di ASCOLI sulle famiglie di funzioni equicontinue e il teorema di MONTEL sulle famiglie normali di funzioni analitiche (conseguenza del primo).

Nell'un caso come nell'altro, la teoria di BANACH si è mostrata insufficiente per rendere conto e trarre profitto da un fatto che suggerisce, in modo così saliente, la naturale estensione, ai campi funzionali, del teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS sulla compattezza delle parti limitate e chiuse degli spazi euclidei: uno spazio normato, in cui ogni insieme limitato e chiuso è compatto, ha necessariamente dimensione finita. Occorreva, dunque, un allargamento degli schemi astratti dell'analisi funzionale. La misura giusta, nè troppo esigua nè troppo ampia, ci è offerta appunto dagli spazi localmente convessi, con opportune ipotesi restrittive.

(*) I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia che si trova alla fine del presente lavoro.

In molti casi, uno spazio localmente convesso si traduce in un sistema d'infiniti spazi normati, i quali si raccordano tra di loro in modo tale che, in fin dei conti, certi problemi, che per i singoli spazi normati appaiono difficili e ritorti, si risolvono poi con semplicità ed eleganza per l'intero giuoco di spazi. Per esempio, il problema della determinazione dello spazio duale è assai più facile per uno spazio funzionale analitico $\mathcal{A}(F)$ che per gli spazi di BANACH di cui il primo si può considerare composto; anzi, per questi il problema non è ancora risolto, per quanto sappiamo.

Tre operazioni fondamentali permettono di costruire, partendo da spazi normati, spazi localmente convessi via via più complicati: sono esse le operazioni di passaggio al *limite proiettivo*, al *limite induttivo* e allo *spazio duale* — le quali presentano analogie profonde (ma non complete) con le operazioni logiche di congiunzione, disgiunzione e negazione, oppure con quelle corrispondenti di intersezione, riunione e passaggio al complementare, relative agli insiemi. Ora, lo studio dei limiti proiettivi, dei limiti induttivi e dei loro mutui rapporti riesce particolarmente semplice e proficuo quando si tratta di certe successioni di spazi normati, le cui parti limitate divengono relativamente compatte in altri spazi della stessa famiglia. Questo è il fatto essenziale che sfruttiamo nel presente lavoro e che avevamo già segnalato in [16], pp. 43-44, dove si trovano abbozzate le dimostrazioni di alcuni dei risultati qui esposti.

Alla fine (n. 5) ritorniamo ad un problema che da parecchio tempo ci ha preoccupato: Fino a che punto ed in quale modo la topologia di uno spazio può essere determinata dalla conoscenza dei limiti delle successioni, senza bisogno di ricorrere al procedimento più generale dei filtri? Per gli spazi funzionali analitici, il KÖTHE aveva già mostrato in [12] che la nozione d'insieme chiuso può essere definita in termini di limiti di successioni. Abbiamo ora ottenuto nuove risposte, che ci sembrano interessanti.

Ci lusinghiamo di potere, con tali risultati, contribuire al chiarimento e alla semplificazione di una parte importante della teoria delle distribuzioni, e così pure del nuovo indirizzo di ricerche aperto da KÖTHE, SILVA DIAS e GROTHENDIECK, nello studio degli spazi funzionali analitici ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Il presente lavoro ha certamente rapporti stretti con le profonde e difficili ricerche di GROTHENDIECK in [8] e [9]; ma non abbiamo ancora avuto la possibilità di esaminare da vicino tali rapporti. Comunque il nostro scopo è stato quello di stabilire, in modo breve, alcuni criteri semplici e comodi, per gli spazi che abbiamo trovato nelle applicazioni.

Al Prof. KÖTHE dobbiamo qui esprimere la nostra viva gratitudine, per i preziosi insegnamenti che da Lui abbiamo ricevuti, sulla teoria degli spazi localmente convessi, e per la revisione critica, che gentilmente ha voluto fare, del manoscritto di questo lavoro.

2. Preliminari. — In ciò che riguarda le nozioni fondamentali, terminologia e notazioni qui impiegate, rinviando alle opere [2] e [3] della scuola BOURBAKI e alle memorie [4], [5] e [7]; vedi anche [6]. Intanto dobbiamo qui precisare alcune nozioni, che in tali opere vengono presentate in modo alquanto diverso, nominatamente le nozioni di limite proiettivo e di limite induttivo di spazi localmente convessi. Convieni pure avvertire che, in tutti gli spazi vettoriali qui considerati, il corpo degli scalari è indifferentemente quello dei numeri reali o quello dei numeri complessi.

a) *Limiti proiettivi.* Sia A un insieme *filtrante a destra*; vuol dire questo che si è definita, per certe coppie di elementi α, β di A , una relazione $\alpha \leq \beta$ soddisfacente le condizioni: I. Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, allora $\alpha \leq \gamma$; II. Se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, si ha $\alpha = \beta$ e reciprocamente; III. Quali che siano $\alpha, \beta \in A$, esiste sempre un $\gamma \in A$ tale che $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$. Supponiamo ora che si sia associato ad ogni $\alpha \in A$, uno spazio localmente convesso S_α e, ad ogni coppia (α, β) tale che $\alpha \leq \beta$, un'applicazione lineare continua $g_{\alpha\beta}$ di E_β in E_α in modo che riesca $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$, quando $\alpha \leq \beta \leq \gamma$; si dice allora che gli spazi S_α formano uno *spettro proiettivo, per rapporto alle applicazioni $g_{\alpha\beta}$* .

In tale ipotesi, denotiamo con S^* il prodotto topologico $\prod_{\alpha \in A} S_\alpha$ di tutti gli S_α , e con S l'insieme di quegli elementi $x = (x_\alpha)$ di S^* che soddisfanno la condizione

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta}(x_\beta) \text{ se } \alpha \leq \beta;$$

allora, tenuto conto della linearità e della continuità dei $g_{\alpha\beta}$ è facile vedere che S è un sotto-spazio lineare chiuso di S^* . Allo spazio vettoriale S , munito della topologia che vi è indotta da quella di S^* , si dà il nome di *limite proiettivo degli S_α per rapporto alle applicazioni $g_{\alpha\beta}$* .

Indicheremo con g_α l'applicazione (lineare continua) di S in S_α che fa corrispondere ad ogni elemento $x = (x_\alpha)$ di S la coordinata di ordine α di x , cioè porremo $x_\alpha = g_\alpha(x)$; e diremo che g_α è la *proiezione α di S* . Si avrà naturalmente $g_\alpha = g_{\alpha\beta} g_\beta$, per $\alpha \leq \beta$.

Gli intorni dello zero in S saranno allora le immagini reciproche $g_a^{-1}(V_a)$ degli intorni V_a dello zero nei diversi spazi S_a (basterà prendere, naturalmente, un sistema fondamentale d'intorni di 0 in ogni S_a).

È facile vedere che, con tale topologia, S è ancora uno spazio localmente convesso e che, se tutti gli spazi S_a sono separati, anche il loro limite proiettivo è separato.

Esempi. 1° Designiamo con \widehat{C} la sfera di RIEMANN, cioè il piano della variabile complessa reso compatto con l'aggiunzione del punto ∞ , e sia D un aperto di \widehat{C} , non vuoto e distinto da \widehat{C} . Consideriamo l'insieme \mathcal{A} delle parti aperte A di D tali che $\overline{A} \subset D$; rispetto alla relazione $A_1 \subset A_2$, l'insieme \mathcal{A} è manifestamente filtrante a destra. Denotiamo ora con $\mathcal{B}(\overline{A})$, per ogni $A \in \mathcal{A}$, lo spazio delle funzioni $f(z)$ continue in \overline{A} , oloforme in A e tali che $f(\infty) = 0$, se $\infty \in A$ — con la topologia definita dalla norma $p_A(f) = \sup_{z \in A} |f(z)|$.

Se, per $A_1 \subset A_2$, indichiamo con ϱ_{A_1, A_2} l'operatore che, ad ogni funzione $f \in \mathcal{B}(\overline{A_2})$ fa corrispondere la restrizione di f a A_1 , si vede subito che gli spazi di BANACH $\mathcal{B}(\overline{A})$ formano uno spettro proiettivo per rapporto ai ϱ_{A_1, A_2} . Ora il limite proiettivo dei $\mathcal{B}(\overline{A})$ rispetto a tali applicazioni è isomorfo allo spazio $\mathcal{B}(D)$ delle funzioni $f(z)$ definite e olomorfe in D (e tali che $f(\infty) = 0$, se $\infty \in D$), con la topologia della convergenza uniforme sulle parti chiuse di D .

2° Sia Q un intervallo compatto della retta \mathbf{R} e designiamo con $\mathcal{E}^n(Q)$ lo spazio delle funzioni $f(x)$ continuamente derivabili in Q fino all'ordine n , con la topologia definita dalla norma $\|f\|_n = \sup_{x \in Q} (|f(x)|, \dots, |f^{(n)}(x)|)$. Considerando i numeri naturali n ordinati dalla relazione naturale $m \leq n$ e rappresentando con $I_{m,n}$ l'applicazione canonica ⁽²⁾ di $\mathcal{E}^n(Q)$ in $\mathcal{E}^m(Q)$, per $m \leq n$, il limite proiettivo degli $\mathcal{E}^n(Q)$ per rapporto agli $I_{m,n}$ è isomorfo allo spazio $\mathcal{E}(Q)$ delle funzioni indefinitamente derivabili in Q con la topologia usuale.

(Questi due esempi, come pure quelli che daremo in seguito, si estendono senz'altro al caso delle funzioni di più variabili; ma per brevità ci limitiamo qui al caso delle funzioni di una sola variabile).

⁽²⁾ Dati due insiemi A, B tali che $A \subset B$, si chiama *applicazione canonica* di A in B l'operatore che, ad ogni elemento x di A , fa corrispondere lo stesso elemento x in B .

b) *Limiti induttivi* — Sia ancora A un insieme filtrante a destra. Supponiamo che si abbia associato ad ogni $\alpha \in A$ uno spazio localmente convesso S_α e, ad ogni coppia (α, β) tale che $\alpha \leq \beta$, un'applicazione lineare continua $g_{\beta\alpha}$ di S_α in S_β , in modo che riesca $g_{\gamma\alpha} = g_{\gamma\beta} g_{\beta\alpha}$, per $\alpha \leq \beta \leq \gamma$; si dice allora che gli spazi S_α formano uno *spettro induttivo* per rapporto alle applicazioni $g_{\beta\alpha}$. Denotiamo in tale ipotesi, con S_* l'insieme di tutte le coppie (x, α) (o semplicemente x_α , scrivendo α come indice) che si ottengono associando ad ogni $\alpha \in A$ un elemento $x = x_\alpha$ di S_α . In S_* possiamo introdurre una *relazione di equivalenza* nel modo seguente:

Se dice che due elementi x_α e x_β di S_* sono *equivalenti* e si scrive $x_\alpha \sim x_\beta$, quando esiste almeno un $\gamma \in A$ e un $x_\gamma \in S_*$ tali che $x_\gamma = g_{\gamma\alpha}(x_\alpha)$, $x_\gamma = g_{\gamma\beta}(x_\beta)$ [$\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$].

Sia S l'insieme quoziente di S_* per questa relazione di equivalenza e sia g_α , per ogni $\alpha \in A$, l'applicazione canonica di S_α in S , cioè, l'applicazione $x_\alpha \rightarrow \bar{x}$ che trasforma ogni elemento x_α di S_α nella classe di equivalenza $\bar{x} \in S$ di cui x_α è un rappresentante; g_α si chiama l'*iniezione* di S_α in S .

Nell'insieme S si può adesso definire una (e soltanto una) struttura di spazio vettoriale, per rapporto alla quale i g_α siano applicazioni lineari. Infatti, siano \bar{x}, \bar{y} , elementi di S e x_α, y_α , rispettivamente, rappresentanti di \bar{x}, \bar{y} corrispondenti ad uno stesso elemento α di A , allora, perchè g_α sia continua, si debbono definire l'addizione e la moltiplicazione scalare in modo che sia

$$\bar{x} + \bar{y} = g_\alpha(x_\alpha + y_\alpha), \quad \lambda \bar{x} = g_\alpha(\lambda x_\alpha),$$

dove λ è uno scalare complesso; e si può verificare che, con tali definizioni, S risulta uno spazio vettoriale.

D'altra parte, fra le topologie di spazio localmente convesso su S che rendono continue le applicazioni g_α esiste necessariamente una, τ , più fina di tutte le altre. Allo spazio S , munito della topologia τ , si dà il nome di *limite induttivo degli S_α per rapporto alle applicazioni $g_{\beta\alpha}$* . Un sistema fondamentale d'intorni dello zero per la topologia τ è l'insieme delle parti assolutamente convesse e assorbenti ⁽³⁾ V di S tali che, per ogni $\alpha \in A$, $\bar{g}_\alpha^{-1}(V)$ è un intorno dello zero in S_α .

⁽³⁾ Un insieme $H \subset S$ si dice *assolutamente convesso*, se per ogni coppia x, y di elementi di H , si ha ancora $\alpha x + \beta y \in H$ per $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. L'insieme H si dice *assorbente*, se, per ogni punto x di S , esiste uno scalare λ tale che $x \in \lambda H$.

Si osservi intanto che la topologia τ può non essere separata, anche se tutti gli spazi S_α sono separati.

Esempi. 1° Sia F una parte chiusa e non vuota di \widehat{C} , distinta da \widehat{C} . L'insieme \mathcal{S} degli aperti H di \widehat{C} tali che $F \subset H$ è filtrante a destra rispetto alla relazione $H_1 \supset H_2$. Denotiamo ancora con $\mathcal{B}(\overline{H})$ lo spazio di BANACH delle funzioni $f(z)$ continue in \overline{H} , olo-morfe in H e tali che $f(\infty) = 0$ se $\infty \in H$ — con la norma $p_H(f) = \sup_{z \in H} |f(z)|$. Rispetto agli operatori di restrizione $\varrho_{H_1 H_2}$ ($H_1 \supset H_2$), gli spazi $\mathcal{B}(\overline{H})$ formano allora uno spettro induttivo. Il limite induttivo dei $\mathcal{B}(\overline{H})$ per rapporto ai $\varrho_{H_1 H_2}$ è lo spazio $\mathcal{A}(F)$ delle *funzioni localmente analitiche* ⁽⁴⁾ su F , con la topologia che vi hanno introdotto il KÖTHER in [12] e il SILVA DIAS in [18]. Si badi che, identificando ogni funzione $f(z)$ con i suoi prolungamenti analitici, possiamo scrivere $\mathcal{B}(\overline{H}_1) \subset \mathcal{B}(\overline{H}_2)$, quando $H_1 \supset H_2$; l'operatore $\varrho_{H_1 H_2}$ diventa allora l'applicazione canonica ⁽²⁾ del primo spazio nel secondo.

2° Sia Q un intervallo compatto di \mathbb{R} e, per ogni numero naturale n , designiamo con $\mathcal{C}_n(Q)$ l'insieme delle distribuzioni T , definite all'interno di Q , che sono derivate n -esime di funzioni $f(x)$ continue su Q ; $\mathcal{C}_0(Q)$ sarà, naturalmente, l'insieme delle funzioni continue su Q . Supponendo $\mathcal{C}_0(Q)$ munito della topologia usuale, introduciamo in $\mathcal{C}_n(Q)$ la più fine topologia che rende continua l'applicazione $f \mapsto D^n f$ di $\mathcal{C}_0(Q)$ su $\mathcal{C}_n(Q)$. In tale modo $\mathcal{C}_n(Q)$ diventa uno spazio di BANACH; inoltre, per $m \leq n$, si ha $\mathcal{C}_m(Q) \subset \mathcal{C}_n(Q)$ e l'applicazione canonica del primo spazio nel secondo è continua. Ebbene, il limite induttivo dei $\mathcal{C}_n(Q)$ per rapporto alle applicazioni canoniche è lo spazio $\mathcal{C}_\omega(Q)$ delle distribuzioni su Q , con la topologia forte di SCHWARTZ. E possiamo aggiungere che il limite proiettivo degli spazi $\mathcal{C}_n(Q)$ per rapporto agli operatori di restrizione $\varrho_{Q_1 Q_2}$ è isomorfo allo spazio delle distribuzioni sulla retta (v. [15] e [17]).

c) *Limiti induttivi canonici e limiti induttivi stretti.* — Nei limiti induttivi, il caso più frequente nella pratica — e che abbiamo già trovato negli esempi precedenti — è quello in cui si tratta

⁽⁴⁾ Secondo un suggerimento del KÖTHER, chiamiamo ora *funzioni localmente analitiche su F* le classi d'equivalenza che, nei nostri lavori precedenti, abbiamo chiamato *funzioni analitiche legate all'insieme F* . D'altronde, usiamo ora la notazione $\mathcal{A}(F)$ invece di $\mathcal{F}[C]$.

di una famiglia $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di spazi tali che $E_\alpha \subset E_\beta$, per $\alpha \leq \beta$, essendo il limite induttivo S degli S_α riferito alle applicazioni canoniche $(^2) I_{\beta\alpha}$. Allora l'insieme S può identificarsi alla riunione degli S_α . Ad ogni applicazione canonica $I_{\beta\alpha}$ è imposta la sola condizione di essere continua (essa è già sicuramente lineare), il che vuol dire che, per $\alpha \leq \beta$, la topologia di E_β deve indurre in E_α una topologia meno fine di quella di E_α . D'altra parte, la topologia del limite induttivo S sarà la più fine delle topologie su S che, in ogni spazio S_α , inducono una topologia meno fine di quella di S_α . Diremo, in questa ipotesi, che S è il *limite induttivo canonico* degli S_α .

In particolare può anche avvenire che, per $\alpha \leq \beta$, la topologia di S_β induca in S_α la stessa topologia di questo spazio. Se dice allora che S è il *limite induttivo stretto* degli S_α . Un esempio molto semplice di limite induttivo stretto è quello della successione degli spazi euclidei $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \dots \subset \mathbb{R}^n \subset \dots$, dove ogni punto x di \mathbb{R}^n vien identificato al punto di \mathbb{R}^ω le cui n prime coordinate sono quelle di x , essendo le rimanenti tutte nulle. Un altro esempio è lo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ delle funzioni $f(x)$ indefinitamente derivabili sulla retta, a sostegno $(^5)$ compatto; $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ è il limite induttivo (stretto) degli spazi $\mathcal{D}(Q)$ delle funzioni indefinitamente derivabili a sostegno contenuto in un intervallo compatto fisso, Q ; si sa che il duale di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ è lo spazio delle distribuzioni di SCHWARTZ sulla retta.

Si osservi ancora che, rappresentando con $\mathcal{D}^m(Q)$, per ogni intero m , lo spazio delle funzioni continuamente derivabili fino all'ordine m , a sostegno contenuto in Q , con la topologia indotta da quella di $\mathcal{E}^m(Q)$, lo spazio $\mathcal{D}(Q)$ è il limite proiettivo dei $\mathcal{D}^m(Q)$ per rapporto alle applicazioni canoniche.

d) *Spettri equivalenti*. — Sia A un insieme filtrante a destra e sia A' un insieme *co-finale* in A , cioè un sotto-insieme A' di A nel quale esiste, per ogni $\alpha \in A$, un elemento α' tale che $\alpha \leq \alpha'$. Vale allora la seguente proposizione, che non dimostreremo:

PROPOSIZIONE 1. *Dato uno spettro proiettivo di spazi S_α (con $\alpha \in A$) per rapporto a certe applicazioni $g_{\alpha\beta}$, il limite proiettivo degli spazi $S_{\alpha'}$ rispetto alle applicazioni $g_{\alpha'\beta'}$, quando gli indici α', β' sono presi solo in A' , è isomorfo al limite proiettivo di tutti gli S_α , rispetto ai $g_{\alpha\beta}$.*

⁽⁵⁾ *Sostegno di una funzione $f(x)$* («support de $f(x)$ » in francese) è l'aderenza dell'insieme dei punti x per cui $f(x) \neq 0$; vedi [15], pp. 17-21.

Si ha, naturalmente, una proposizione analoga per i limiti induttivi. In generale, dati due insiemi filtranti a destra, A_1, A_2 , e due spettri proiettivi $\{S_{\alpha_1} g_{\alpha_1 \beta_1}\}$ (con $\alpha_1, \beta_1 \in A_1$), $\{S_{\alpha_2} g_{\alpha_2 \beta_2}\}$ (con $\alpha_2, \beta_2 \in A_2$), questi si dicono *equivalenti*, quando A_1 e A_2 sono cofinali in uno stesso insieme A filtrante a destra e gli spettri considerati possono *prolungarsi* in uno stesso spettro proiettivo $\{S_\alpha, g_{\alpha\beta}\}$ relativo all'insieme A di indici. (Analogamente si definiscono spettri induttivi equivalenti). Secondo la prop. 1 i limiti proiettivi di due spettri proiettivi equivalenti sono isomorfi. (Conclusione analoga per gli spettri induttivi equivalenti).

Esempi 1°. Abbiamo visto nel primo esempio in a) come lo spazio $\mathcal{S}(D)$ sia isomorfo al limite proiettivo degli spazi $\mathcal{B}(\bar{A})$ per rapporto agli operatori di restrizione. Ma è facile vedere che si può assegnare una successione (A_n) di aperti tali che: $\bar{A}_n \subset A_{n+1}$, per ogni n , e $\bigcup_1^\infty A_n = D$; ora l'insieme degli A_n è manifestamente cofinale nell'insieme di tutti gli aperti A tali che $\bar{A} \subset D$; quindi $\mathcal{S}(D)$ sarà isomorfo al limite proiettivo dei $\mathcal{B}(\bar{A}_n)$ rispetto agli operatori di restrizione. Rileviamo che si può adesso prendere, come nuovo insieme d'indici, l'insieme N dei numeri naturali n .

2°. Analogamente si riconosce che lo spazio $\mathcal{Q}(F)$, indicato nel primo esempio in b), può considerarsi come limite induttivo di una successione di spazi di BANACH $\mathcal{B}(\bar{H}_n)$, essendo gli H_n intorni aperti di F tali che: $H_n \supset \bar{H}_{n+1}$, per ogni n , e $\bigcap_1^\infty H_n = F$.

e) *Alcune proprietà generali dei limiti proiettivi e dei limiti induttivi.* Si hanno dapprima i seguenti criteri di continuità:

PROPOSIZIONE 2. *Sia E uno spazio topologico qualunque (nel senso di BOURBAKI) e sia S il limite proiettivo di una famiglia di spazi localmente convessi S_α per rapporto a certe applicazioni $g_{\alpha\beta}$. Affinchè un'applicazione θ di E in S sia continua, è necessario e sufficiente che, per ogni indice α , $g_\alpha \theta$ sia un'applicazione continua di E in S_α .*

PROPOSIZIONE 3. *Sia S^* uno spazio localmente convesso e sia S il limite induttivo di una famiglia di spazi localmente convessi S_α per rapporto a delle applicazioni $g_{\beta\alpha}$. Affinchè un'applicazione lineare θ di S in S^* sia continua è necessario e sufficiente che, per ogni indice α , θg_α sia un'applicazione continua di S_α in S^* .*

PROPOSIZIONE 4. *Sia S il limite proiettivo di una famiglia di spazi localmente convessi S_α , per rapporto a delle applicazioni $g_{\alpha\beta}$, con $S_\alpha = g_\alpha(S)$, per ogni α , e sia S^* uno spazio normato. Affinchè*

un'applicazione lineare θ di S in S^* sia continua, è necessario e sufficiente che esistano almeno un indice α e un'applicazione lineare continua θ_α di S_α in S^* tali che $\theta = \theta_\alpha g_\alpha$.

Per la dimostrazione delle prop. 2 e 3 vedi [3], p. 19 e 59-63. Quanto alla prop. 4, basta osservare che, se θ è un'applicazione lineare continua di S in S^* , allora, per ogni sfera B di centro 0 in S^* , esistono un indice α e un intorno V_α di 0 in S_α tali che $\theta[g_\alpha^{-1}(V_\alpha)] \subset B$, il che implica $\theta[g_\alpha^{-1}(0)] = 0$ dato che $g_\alpha^{-1}(0)$ è un sotto-spazio lineare di S ; quindi, se poniamo $\theta_\alpha(x_\alpha) = \theta[g_\alpha^{-1}(x_\alpha)]$, per ogni $x_\alpha \in S_\alpha$, θ_α sarà un'applicazione lineare continua di S_α in S^* e si avrà $\theta = \theta_\alpha g_\alpha$.

Ricordiamo ora che si chiama *duale* di uno spazio localmente convesso S , e si designa con S' , lo spazio vettoriale dei funzionali lineari continui su S ; munito della topologia forte, cioè, della topologia della convergenza uniforme sulle parti limitate di S , lo spazio S' è detto il *duale forte* di S . Il valore $u(x)$ che il funzionale u prende nel punto x di S può anche indicarsi col simbolo $\langle u, x \rangle$. Dati due spazi localmente convessi S_1, S_2 e un'applicazione lineare continua θ di S_1 in S_2 , si chiama *trasposta* di θ l'applicazione (lineare fortemente continua) θ' di S'_2 in S'_1 , tale che $\langle \theta'(u), x \rangle = \langle u, \theta(x) \rangle$ per ogni $x \in S_1$. I precedenti criteri di continuità permettono di stabilire i seguenti risultati (per la dimostrazione, v. NOTE FINALI, II):

PROPOSIZIONE 5. *Il duale del limite induttivo di una famiglia di spazi S_α , per rapporto a delle applicazioni $g_{\alpha\beta}$, è algebricamente isomorfo al limite proiettivo dei duali S'_α per rapporto alle applicazioni trasposte $g'_{\beta\alpha}$.*

PROPOSIZIONE 6. *Il duale del limite proiettivo S di una famiglia di spazi S_α per rapporto a delle applicazioni $g_{\beta\alpha}$ è algebricamente isomorfo al limite induttivo dei duali S'_α per rapporto alle applicazioni trasposte $g'_{\alpha\beta}$ nel caso in cui $g_\alpha(S)$ sia denso in S_α , per ogni indice α .*

3. Spazi (M^*) e spazi $(L N^*)$. — Vogliamo ora considerare due casi particolarmente interessanti che si presentano nello studio dei limiti proiettivi e dei limiti induttivi.

DEFINIZIONE 1. Chiameremo *spazio (M^*)* ogni spazio localmente convesso esprimibile come limite proiettivo di una successione di

spazi normati S_n , $n = 1, 2, \dots$, per rapporto a delle applicazioni $g_{m,n}$ tali che $g_{n,n+1}$ trasformi la sfera di S_{n+1} in una parte relativamente compatta di S_n , qualunque sia n ⁽⁶⁾.

(Basta, naturalmente, che tale condizione sia verificata per una particolare sfera di S_{n+1} , giacchè le altre sfere si ottengono da questa per mezzo di omotetie e traslazioni, che sono operazioni continue in S_n ; del resto, la stessa condizione risulterà poi verificata per ogni parte limitata di S_{n+1} , $n = 1, 2, \dots$. Ricordiamo che si esprime tale proprietà dicendo che le applicazioni considerate sono *totalmente continue* o *relativamente compatte*).

Esempi 1°. Lo spazio $\mathcal{S}(D)$ considerato nel numero precedente è uno spazio (M^*) . Infatti, come abbiamo visto in *d*), esso è isomorfo al limite proiettivo di una successione di spazi di BANACH, $\mathcal{B}(\bar{A}_n)$, per rapporto agli operatori di restrizione $q_{m,n}$, ed è facile vedere, tenendo conto del teorema di MONTEL, che, per ogni n , $q_{n,n+1}$ trasforma la sfera di $\mathcal{B}(\bar{A}_{n+1})$ in un parte relativamente compatta di $\mathcal{B}(\bar{A}_n)$.

2° Pure lo spazio $\mathcal{D}(Q)$ considerato nel numero precedente, *c*), è uno spazio (M^*) . Per riconoscere questo fatto basta tenere conto del teorema di ASCOLI, sulle famiglie equicontinue di funzioni.

DEFINIZIONE 2. — Diremo che una successione, (S_n) , di spazi normati è *regolare*, quando sono verificate le seguenti condizioni: I) per ogni n si ha $S_n \subset S_{n+1}$ e la topologia di S_{n+1} induce in S_n una topologia meno fine di quella di S_n ; II) la sfera di S_n è relativamente compatta in S_{n+1} , qualunque sia n .

DEFINIZIONE 3. — Chiameremo *spazio* (LN^*) ogni spazio localmente convesso esprimibile come limite induttivo canonico di una successione regolare di spazi normati.

Esempi 1°. Abbiamo visto al n. 2, *d*), che lo spazio $\mathcal{C}(F)$ può considerarsi come il limite induttivo canonico di una successione di spazi di BANACH, $\mathcal{B}(\bar{H}_n)$. Ora, tenendo conto del teorema di MONTEL, si vede subito che questa successione è regolare. Si osservi che il duale forte di $\mathcal{C}(F)$ è isomorfo a $\mathcal{S}(\widehat{\mathbb{C}} \cdot F)$ (vedi [10], [12] o [18]).

⁽⁶⁾ Essendo S uno spazio normato, a un punto di S e δ un numero (> 0) , chiamiamo *sfera di centro a e raggio δ* l'insieme dei punti x di S tali che $\|x - a\| \leq \delta$. L'interno di tale insieme verrà chiamato *sfera aperta di centro a e raggio δ* .

2°. Lo spazio $\mathcal{C}_\omega(Q)$ delle distribuzioni su un intervallo compatto Q di \mathbb{R} è il limite induttivo canonico degli spazi di BANACH $\mathcal{C}_n(Q)$. Adoperando il teorema di ASCOLI, si dimostra che questa successione è regolare. Si osservi ancora che il duale forte di $\mathcal{C}_\omega(Q)$ è isomorfo allo spazio $\mathcal{D}(Q)$.

(Per altri esempi v. [17] e [19]).

Stabiliremo ora alcune proposizioni relative agli spazi (M^*) e agli spazi (LN^*) .

PROPOSIZIONE 7. — *Ogni spazio (M^*) è uno spazio (M) .*

Sia infatti S il limite proiettivo di una successione di spazi normati S_n , per rapporto a delle applicazioni lineari continue $g_{m,n}$, tali che, per ogni $n = 1, 2, \dots$, le parti limitate di S_{n+1} siano trasformate da $g_{n,n+1}$ in parti relativamente compatte di S_n ; e indichiamo con g_n la proiezione di S in S_n . Se, per ogni $x \in S$, rappresentiamo con $p_n(x)$ la norma di $g_n(x)$ in S_n , è evidente che le funzioni p_n formano una famiglia numerabile di semi-norme che definisce la topologia di S . Questo spazio è dunque metrizzabile.

Sia ora H una parte limitata di S , cioè un insieme $H \subset S$ tale che la proiezione $g_n(H)$ riesca limitata in S_n , qualunque sia $n = 1, 2, \dots$. Siccome $g_n(H) = g_{n,n+1} g_{n+1}(H)$, ne segue, per l'ipotesi, che $g_n(H)$ è una parte relativamente compatta di S_n , qualunque sia n ; quindi l'insieme H è relativamente compatto in S , poichè, come è facile verificare, ogni ultrafiltro su H converge in S .

D'altronde si sa che i termini di una successione di CAUCHY formano un insieme limitato; dunque, ogni successione di CAUCHY è convergente in S , il che vuol dire che S è uno spazio completo, quindi uno spazio (F) . Siccome, inoltre, ogni parte limitata di S è relativamente compatta (in S) si conclude che S è uno spazio (M) .

LEMMA. — *Ogni successione regolare di spazi normati è equivalente (come spettro induttivo per rapporto alle applicazioni canoniche) ad una successione di spazi di BANACH tali che la sfera (chiusa) di ciascuno di essi riesce compatta rispetto alla topologia dello spazio successivo.*

Sia infatti S il limite induttivo canonico di una successione regolare di spazi normati $S_1 \subset S_2 \subset \dots$. Rappresentiamo con B_n la sfera di centro 0 e raggio 1 in S_n , con \tilde{B}_n la sua aderenza nello spazio S_{n+1} e con \tilde{S}_n la riunione degli insiemi $k\tilde{B}_n$, $k = 1, 2, \dots$. Osservando che \tilde{B}_n è una parte assolutamente convessa di S_n , è

facile rendersi conto che \tilde{S}_n è un sotto-spazio di S_{n+1} . Se inoltre poniamo

$$q_n(x) = \inf \left\{ \lambda; \frac{1}{\lambda} x \in \tilde{B}_n \right\}, \text{ per ogni } x \in \tilde{S}_n,$$

$q_n(x)$ sarà una *norma* definita in \tilde{S}_n e \tilde{B}_n sarà la sfera chiusa $q_n(x) \leq 1$, dato che \tilde{B}_n è un compatto di S_{n+1} . Quindi, per rapporto alla topologia introdotta dalla norma q_n , \tilde{S}_n è uno spazio normato, la cui sfera chiusa riesce compatta nello spazio \tilde{S}_{n+1} . Finalmente, è facile vedere che i nuovi spazi \tilde{S}_n sono completi e che la successione (\tilde{S}_n) è equivalente alla successione (S_n) iniziale.

TEOREMA 1. *Sia S il limite induttivo canonico di una successione regolare di spazi normati S_1, S_2, \dots . Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme H sia chiuso in S è che l'intersezione $H \cap S_n$ risulti chiusa per rapporto alla topologia di S_n , qualunque sia $n = 1, 2, \dots$*

Per riconoscere che la condizione è necessaria basta osservare che, per definizione di limite induttivo, la topologia di S induce in ogni S_n una topologia meno fine della topologia naturale di S_n . Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente; secondo il lemma, possiamo restringerci al caso in cui la sfera di ogni S_n è proprio compatta in S_{n+1} . Sia H una parte non vuota di S la cui intersezione con ogni S_n risulti chiusa in S_n , e sia x_0 un punto arbitrario di S non appartenente a H ; dobbiamo dunque mostrare che esiste un intorno $V(x_0)$ di x_0 che non interseca H . Indicando con p un ordine tale che $x_0 \in S_p$ e $H \cap S_p \neq \emptyset$, basterà mostrare che è possibile costruire una successione di insiemi assolutamente convessi U_p, U_{p+1}, \dots soddisfacenti le condizioni: 1) $x_0 + U_n$ è un intorno di x_0 in S_n disgiunto da H e compatto in S_{n+1} , per ogni $n \geq p$; 2) $U_k \subset U_n$, per $p \leq k \leq n$. Infatti, costruita una tale successione, l'insieme $x_0 + \bigcup_p^\infty U_n$ sarà manifestamente un intorno di x_0 che non interseca H .

Ora, l'insieme U_p può essere una sfera qualunque di centro 0 in S_p tale che l'insieme $x_0 + U_p$ riesca disgiunto da H ; supponiamo già costruiti insiemi assolutamente convessi U_p, U_{p+1}, \dots , fino all'ordine $\nu \geq p$, soddisfacenti le condizioni sopradette. Poichè l'insieme $x_0 + U_\nu$ è compatto in $S_{\nu+1}$, mentre $H \cap S_{\nu+1}$ è chiuso in $S_{\nu+1}$, la distanza $\delta_{\nu+1}$ fra questi due insiemi, misurata nello spazio

metrico S_{r+1} , deve essere > 0 , altrimenti $x_0 + U_r$ e H non sarebbero disgiunti. Rappresentiamo con V_{r+1} la sfera chiusa di centro 0 e raggio $\delta_{r+1}/2$ in S_{r+1} e poniamo U_{r+1} uguale all'involucro assolutamente convesso di U_r e V_{r+1} ; si avrà da una parte $U_r \subset U_{r+1} \subset U_r + V_{r+1}$ sicchè $x_0 + U_{r+1}$ non interseca H ; d'altra parte, essendo U_r e V_{r+1} compatti in S_{r+2} , lo stesso avverrà per l'involucro assolutamente convesso di questi insiemi, cioè per U_{r+1} . Le condizioni 1), 2) sono dunque verificate per $p \leq n \leq r+1$, e così il teorema è dimostrato.

COROLLARIO 1. *Sia S il limite induttivo canonico di una successione regolare di spazi normati S_1, S_2, \dots e sia E uno spazio topologico qualunque. Perchè un'applicazione φ di S in E sia continua è necessario e sufficiente che la restrizione di φ a S_n risulti continua per rapporto alla topologia di S_n , qualunque sia $n = 1, 2, \dots$*

Sia infatti φ un'applicazione di S in E soddisfacente questa condizione e sia C una parte chiusa arbitraria di E . Poichè la restrizione di φ a S_n è continua in questo spazio, l'intersezione $\varphi^{-1}(C) \cap S_n$ è chiusa in S_n qualunque sia n , quindi l'insieme $\varphi^{-1}(C)$ è chiuso in S ; ne risulta che φ è continua. (Che la condizione è necessaria, è evidente).

COROLLARIO 2. — *Ogni spazio $(L N^*)$ è separato.*

Dire che uno spazio localmente convesso è separato equivale a dire che ogni suo punto costituisce un insieme chiuso. Ora questo è manifestamente vero, applicando il teorema.

TEOREMA 2. *Sia S il limite induttivo canonico di una successione regolare di spazi normati S_1, S_2, \dots . Perchè un insieme H sia limitato in S , è necessario e sufficiente che esista un intero n tale che H sia contenuto in S_n e limitato rispetto alla topologia di questo spazio.*

La condizione è manifestamente sufficiente: se H è limitato in uno spazio S_n , ogni intorno U di 0 in S_n assorbe H e lo stesso quindi avverrà per ogni intorno V di 0 in S , giacchè $V \cap S_n$ deve essere un intorno di 0 in S_n . Supponiamo ora reciprocamente che H sia limitato per rapporto alla topologia di S e dimostriamo che H deve essere limitato in uno almeno degli spazi S_n . A questo scopo denotiamo in genere con $\|x\|_n$ la norma di un elemento x in S_n ; dato che S_{n+1} induce in S_n una topologia meno fine di quella di

S_n , si possono sempre scegliere le norme in modo che $\|x\|_n \geq \|x\|_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. In questa ipotesi, poniamo:

$C_n =$ sfera aperta di centro 0 e raggio n in S_n .

Ora, l'insieme H è contenuto in uno almeno dei C_n . Infatti, se così non fosse, si potrebbe estrarre da H una successione di punti x_1, x_2, \dots tale che $x_n \notin C_n$ e, ragionando come nella dimostrazione del teorema 1, si potrebbe stabilire l'esistenza di un intorno U di 0 in S , tale che $\frac{1}{n} x_n \notin U$, per $n = 1, 2, \dots$. Allora, qualunque fosse lo scalare λ , si avrebbe $x_n \notin \lambda U$, per $n > \lambda$, il che contraddice l'ipotesi che H sia limitato in S . Dunque, essendo contenuto in uno dei C_n , l'insieme H è limitato nel rispettivo spazio S_n .

COROLLARIO 1. *Sia S il limite induttivo canonico di una successione regolare di spazi normati S_1, S_2, \dots e sia (x_n) una successione di punti di S . Perchè si abbia $\lim x_n = 0$ in S , è necessario e sufficiente che esista un intero p , tale che $x_n \in S_p$ per ogni n e si abbia $\lim x_n = 0$ rispetto alla topologia di S_p .*

La condizione è manifestamente sufficiente. Supponiamo, reciprocamente, che sia $\lim x_n = 0$ in S . Essendo (x_n) una successione di CAUCHY in S , l'insieme degli x_n è limitato in S , cioè, esiste un intero r tale che quell'insieme sia limitato in S_r — quindi relativamente compatto in S_{r+1} . Allora la successione (x_n) ha un valore di aderenza in S_{r+1} , il quale non può essere che 0, cioè $\lim x_n = 0$ in S_{r+1} .

COROLLARIO 2. *Uno spazio $(L N^*)$ di dimensione infinita non è mai metrizzabile.*

Sia infatti S il limite induttivo canonico di una successione regolare di spazi normati S_1, S_2, \dots e supponiamo che S sia metrizzabile. Esiste allora in S un sistema fondamentale d'intorni dell'origine costituito da una infinità numerabile d'insiemi, $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$. Ora, uno almeno dei V_n è limitato in S ; altrimenti esisterebbe, per ogni n , un $x_n \in V_n$ tale che $x_n \notin C_n$ (dove C_n ha lo stesso significato che nella dimostrazione del teorema) e si avrebbe così una successione (x_n) convergente allo zero e non limitata in S , il che è impossibile. Sia dunque V_p un intorno appartenente a quel sistema e limitato in S ; allora esiste un intero r tale che V_p sia limitato in S_r , quindi relativamente compatto in S_{r+1} .

Siccome V_p è anche un intorno di 0 in S_{r+1} , ne segue che S_{r+1} , ha dimensione finita e quindi $S_{r+1} = S_{r+2} = \dots = S$, dato che V_p deve generare lo spazio S .

COROLLARIO 3. — *In uno spazio (LN^*) ogni insieme limitato è relativamente compatto.*

Infatti, se S è il limite induttivo canonico di una successione regolare di spazi normati S_1, S_2, \dots , ogni parte limitata H di S è limitata in uno almeno degli spazi S_n , quindi relativamente compatta nello spazio successivo. Siccome la topologia di S è separata e induce in ogni spazio S_n una topologia meno fine di quella di S_n , ne segue che un tale insieme H è relativamente compatto in S .

Possiamo ora stabilire l'importante proposizione seguente:

TEOREMA 3. *Ogni spazio (LN^*) è riflessivo.*

Per la dimostrazione basta applicare i noti criteri generali (vedi prop. 3 in [7] e teorema 4 in [4]). Sia S uno spazio (LN^*) . Essendo separato ed esprimibile come limite induttivo di spazi normati, S è uno spazio «tonnelé» ([4], p. 6). D'altra parte, secondo il corollario precedente, ogni parte limitata di S è relativamente compatta. Questi due fatti bastano per potere affermare che S è riflessivo.

La dimostrazione si potrebbe fare anche direttamente, con gli elementi che verranno introdotti nel numero seguente.

4. Rapporti tra spazi (M^*) e spazi (LN^*) . — Per studiare i rapporti tra queste due categorie di spazi, attraverso il passaggio al duale, partiremo dal seguente

LEMMA. *Siano S_1, S_2 due spazi normati e sia q un'applicazione lineare totalmente continua ⁽⁷⁾ di S_1 in S_2 . Allora la trasposta q' di q è un'applicazione totalmente continua di S_2' in S_1' (per rapporto alle topologie forti) mentre la bitrasposta q'' di q determina un'applicazione (totalmente) continua del biduale forte S_1'' di S_1 in S_2 .*

Dimostrazione. Ricordiamo che la trasposta di q è l'applicazione lineare q' di S_2' in S_1' soddisfacente la condizione

$$\langle q'(v), x \rangle = \langle v, q(x) \rangle, \text{ per ogni } v \in S_2' \text{ e ogni } x \in S_1.$$

⁽⁷⁾ Cioè, che trasformi la sfera di S_1 in una parte relativamente compatta di S_2 .

La prima parte della proposizione è un noto teorema di SOHAU-
DER. Per la dimostrazione vedi per esempio [1], pp. 100-101 (th. 4)
(la dimostrazione è fatta ivi per gli spazi normati completi, ma si
estende senz'altro al caso degli spazi normati arbitrari).

Per stabilire la seconda parte della proposizione, dobbiamo ri-
correre al teorema di MACKEY-ARENS [14]. Lo spazio S_2 è isomorfo
al duale dello spazio S'_2 se questo vien munito della topologia τ_k
della convergenza uniforme sulle parti convesse e debolmente com-
patte di S_2 . Ma, se B_1 è una sfera di centro 0 in S_1 , $\varrho(B_1)$ è,
per l'ipotesi, una parte convessa e fortemente (quindi debolmente)
relativamente compatta di S_2 . Ne risulta che ϱ' è un'applicazione
continua di $S'_2[\tau_k]$ in $S'_1[\tau_l]$, dove τ_l rappresenta la topologia forte.
Infatti prendiamo l'intorno B_1^0 di 0 in $S'_1[\tau_l]$. Se rappresentiamo
con V il polare di $\varrho(B_1)$, V sarà un'intorno di 0 in $S'_2[\tau_k]$ e
si avrà

$$\sup |\langle V, \varrho(B_1) \rangle| = \sup |\langle \varrho'(V), B_1 \rangle| \leq 1$$

il che vuol dire che $\varrho'(V) \subset B_1^0$.

Quindi, la bitrasposta ϱ'' determina un'applicazione lineare con-
tinua del biduale forte S''_1 di S_1 nello spazio S_2 munito della topo-
logia τ_{kl} della convergenza uniforme sulle parti limitate di $S'_2[\tau_k]$.
Ma, essendo la topologia τ_k meno fine di τ_l (v. th. 3 e prop. 9
in [7], le parti di S'_2 limitate per rapporto a τ_l sono ancora limitate
per rapporto a τ_k e, pertanto, τ_{kl} è più fine della topologia τ_u indotta
in S_2 dal biduale forte di S_2 . Quindi ϱ'' determina un'applicazione
lineare continua del biduale forte di S_1 in S_2 .

NOTE — I. Convien ricordare che si ha, a meno di un iso-
morfismo algebrico:

$$S_1 \subset S''_1, \quad S_2 \subset S''_2.$$

Inoltre, la topologia forte (cioè biforte) di S''_2 induce in S_1 la topo-
logia naturale di questo spazio, e altrettanto per S''_1, S_2 .

II. Se $S_1 \subset S_2$, essendo ϱ l'applicazione canonica di S_1 in S_2 ,
la trasposta ϱ' è l'operatore che, ad ogni funzionale lineare continuo
 v su S_2 ($v \in S'_2$), fa corrispondere la restrizione u del funzionale v a
a S_1 ($u \in S'_1$). In particolare, se l'insieme S_1 è denso in S_2 , ϱ' è un'ap-
plicazione biunivoca di S'_2 in S'_1 , dato che, per un elemento u di
 S'_1 , non può esistere più di un elemento v di S'_2 che sia prolun-
gamento di u , cioè tale che $u = \varrho'(v)$ (può anche non esistere al-
cuno, giacchè la topologia di S_2 induce in S_1 una topologia meno
fine di quella di S_1).

Piu generalmente, se ϱ è un'applicazione lineare continua di S_1 in S_2 tale che $\varrho(S_1)$ sia denso in S_2 , la trasposta ϱ' è un'applicazione biunivoca di S'_2 in S'_1 . Per convincersi di questo fatto, basta osservare che ϱ' fa corrispondere ad ogni elemento v di S'_2 un elemento di S'_1 determinato dalla restrizione di v a $\varrho(S_1)$, poichè $\langle \varrho'(v), x \rangle = \langle v, \varrho(x) \rangle$ per ogni

TEOREMA 4. *Il duale forte di uno spazio $(L N^*)$ è uno spazio (M^*) .*

Dimostrazione. Sia S il limite induttivo canonico di una successione regolare di spazi normati S_1, S_2, \dots . Indicando con $I_{m,n}$ ($m \leq n$) l'applicazione canonica di S_m in S_n , la trasposta $I'_{m,n}$ è l'operatore che, ad ogni elemento v di S'_n , fa corrispondere la restrizione u di v a S'_m (v. nota precedente). D'altronde, il duale S' di S è algebricamente isomorfo al limite proiettivo degli S'_n , per rapporto agli $I'_{m,n}$ (v. prop. 5). Ma questo isomorfismo è anche topologico, per rapporto alle topologie forti di S' e di ogni S'_n . Infatti, per il teorema 2, ogni parte limitata B di S è limitata in uno degli S_n e viceversa; quindi, un sistema fondamentale d'intorni dell'origine in S' , per la topologia forte, è quello costituito dagli insiemi della forma $\overline{I_n}^{-1}(B_n^0)$, dove B_n designa una parte limitata di S_n , e B_n^0 il polare di B_n in S'_n , $n = 1, 2, \dots$; ma, per ogni n , gli insiemi B_n^0 formano appunto un sistema fondamentale di intorni di 0 in S'_n forte; sicchè le immagini reciproche $\overline{I_n}^{-1}(B_n^0)$, per $n = 1, 2, \dots$, formano un sistema fondamentale di intorni di 0 del limite proiettivo degli S'_n per rapporto agli $I'_{m,n}$. Finalmente, il lemma ci consente di affermare che questo limite proiettivo è uno spazio (M^*) .

TEOREMA 5. *Il duale forte di uno spazio (M^*) è uno spazio $(L N^*)$.*

Dimostrazione. Sia S il limite proiettivo di una successione (S_n) di spazi normati per rapporto a delle applicazioni lineari continue $g_{m,n}$ ($m \leq n$) tali che $g_{n,n+1}$ trasformi la sfera di S_{n+1} in una parte relativamente compatta di S_n . Poniamo per ogni n :

$\widehat{S_n} =$ aderenza di $g_n(S)$ in S_n , con la topologia indottavi da quella di S_n .

Allora $g_n(S)$ è denso in $\widehat{S_n}$, qualunque sia n , e S è ancora il limite proiettivo degli $\widehat{S_n}$, per rapporto alle applicazioni $\widehat{g_{m,n}}$, restrizioni di ogni $g_{m,n}$ a $\widehat{S_n}$. Possiamo quindi supporre già $\widehat{S_n} = S_n$ per ogni n . Dunque, secondo la prop. 6, il duale S' di S è al-

gebricamente isomorfo al limite induttivo degli S'_n , per rapporto agli operatori $g'_{n,m}$; inoltre, per ogni n e ogni $m \leq n$, $g'_{n,m}$ è un'applicazione lineare *biunivoca* ⁽⁷⁾ di S'_m in S'_n (vedi nota II al lemma), sicchè possiamo identificare S'_m con un sotto-spazio lineare di S'_n . È ora facile vedere, applicando il lemma, che gli spazi S'_n , con la topologia forte, costituiscono una successione *regolare* di spazi normati; denotiamo con \tilde{S} il limite induttivo canonico di questi spazi. Secondo la dimostrazione precedente, il duale forte di \tilde{S} è il limite proiettivo degli S'' forti, per rapporto alle applicazioni $g''_{m,n}$. Ma siccome ogni $g''_{m,n}$ determina un'applicazione lineare continua di S''_n in S''_m (secondo il lemma) e d'altra parte si ha $S_n \subset S''_n$, per ogni n , si conclude (v. prop. 1) che il duale forte di \tilde{S} è isomorfo a S . Ora \tilde{S} è uno spazio riflessivo (v. teorema 3), quindi il duale forte di S è isomorfo a \tilde{S} , che è, per costruzione, uno spazio (LN^*) .

Possiamo aggiungere:

PROPOSIZIONE 7. *Ogni spazio (LN^*) è completo.*

Basta applicare la prop. 7 di [7], osservando che uno spazio (LN) è il duale forte di uno spazio (F) . Si potrebbe anche applicare direttamente il criterio generale di KÖTHE [11].

5. Spazi (\bar{L}) e spazi (\bar{L}_o) . — I fondatori della topologia generale hanno inizialmente introdotto concetti che poi, con lo sviluppo della teoria, sono caduti un po' in disuso. Uno di questi è il concetto di spazio (L) , introdotto dal FRÉCHET. Il KURATOWSKI [13] aveva già osservato che tale concetto è troppo generale e l'aveva sostituito con quello di spazio (L^*) .

Un insieme S prende il nome di *spazio (L^*)* quando, a ciascuna di certe successioni (x_n) , $n = 1, 2, \dots$, (dette *successioni convergenti*) si fa corrispondere uno, ed uno solo, elemento x_0 di S — che si chiama il limite di (x_n) e si denota con $\lim x_n$ — in modo che risultino verificate le seguenti condizioni: *L 1)* se $x_n = c$, qualunque sia n , allora $\lim x_n = c$; *L 2)* se $\lim x_n = x_0$, ogni sottosuccessione di (x_n) ha per limite x_0 ; *L 3)* se ogni sotto-successione di (x_n) contiene almeno una successione convergente, allora (x_n) è convergente.

⁽⁷⁾ Poichè $g_n(S)$ è denso in S_n per ogni n , dev'essere anche $g_{m,n}(S_n)$ denso in S_m per ogni coppia m, n .

Poi, essendo S uno spazio (L^*) , si soleva introdurre in S una topologia mediante questa definizione: « Si dice che un punto p di S è *aderente* ad un insieme $A \subset S$, e si scrive $p \in \bar{A}$, quando esiste almeno una successione (a_n) di punti di A tale che $p = \lim a_n$ ». La condizione $L\ 3)$ (che è appunto quella introdotta dal KURATOWSKI) permette allora di definire in ogni caso il concetto di limite in termini topologici, nel modo consueto: « Si ha $\lim x_n = x_0$, quando, ad ogni intorno V di x_0 , corrisponde un ordine ν , tale che $x_n \in V$ per $n > \nu$ ». Ma in generale quella definizione di punto aderente non garantisce la condizione $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, che di solito si richiede. Possiamo allora prendere un'altra strada e definire direttamente « insieme chiuso », invece di « punto aderente »:

« Si dice che un insieme H di punti di S è *chiuso*, se contiene il limite di ogni successione convergente di punti di H ».

L'aderenza (o *chiusura*) di un insieme A si definirà adesso come il minimo insieme chiuso \bar{A} contenente A .

Ebbene, chiameremo *spazio* (\bar{L}) ogni spazio topologico S la cui struttura topologica può essere definita, secondo la definizione precedente, a partire da un concetto di limite soddisfacente le condizioni $L\ 1)$, $L\ 2)$, $L\ 3)$. In uno spazio (\bar{L}) il concetto di limite iniziale può anche venir definito in termini di intorno nel modo consueto. Inoltre, è facile vedere che:

Se S è uno spazio (\bar{L}) e E uno spazio topologico qualunque, condizione necessaria e sufficiente perchè un'applicazione θ di S in E sia continua è che riesca $\lim_n \theta(x_n) = \theta(\lim_n x_n)$, per ogni successione convergente (x_n) in S .

Reciprocamente, uno spazio topologico S per il quale sia vera questa proposizione (con E arbitrario) è uno spazio (\bar{L}) .

Gli spazi metrizzabili sono esempi triviali di spazi (\bar{L}) , nei quali la definizione di « punto aderente » in termini di « limite » può essere data nel modo classico. Il teorema 1 ci conduce subito alla

PROPOSIZIONE 8. *Ogni spazio $(L\ N^*)$ è uno spazio (\bar{L}) .*

Ma si presentano, anche nelle applicazioni, molti casi di spazi topologici che non sono spazi (\bar{L}) ; allora il concetto di limite di una successione non basta per definire la struttura topologica e bisogna adoperare il concetto di limite di un *filtro*, più generale del primo. Tuttavia, i filtri sono meno intuitivi e meno maneggevoli delle successioni — il che fa desiderare di poter estendere l'uso

delle successioni un po' oltre il campo degli spazi (\bar{L}) , sotto condizioni speciali. Una siffatta estensione può avere importanza pratica anche per la teoria delle distribuzioni. Per raggiungere tale scopo, siamo pervenuti al concetto di «spazio (\bar{L}_c) »:

DEFINIZIONE 4. Sia S uno spazio localmente convesso separato. Si dice che S è uno spazio (\bar{L}_c) , quando risulti aperto in S ogni insieme convesso H che non contenga il limite di nessuna successione convergente (x_n) di punti del suo complementare.

Naturalmente, la topologia di uno spazio (\bar{L}_c) è determinata dalla conoscenza dei limiti delle successioni convergenti in tale spazio, poichè gli insiemi convessi aperti contenenti l'origine costituiscono un sistema fondamentale d'intorni di 0 per tale topologia. Si ha inoltre:

PROPOSIZIONE 9. Sia S uno spazio (\bar{L}_c) e sia S^* uno spazio localmente convesso qualunque. Affinchè un'applicazione lineare θ di S in S^* sia continua, è necessario e sufficiente che si abbia $\lim_n \theta(x_n) = \theta(\lim_n x_n)$, per ogni successione (x_n) convergente in S .

La necessità della condizione è immediata. Per vedere che la condizione è sufficiente, basta osservare che, se essa è verificata, un insieme A convesso e aperto in S^* non può contenere il limite di una successione convergente di punti del complementare e che pertanto $\theta^{-1}(A)$ è convesso e aperto in A .

Ma si ha pure la reciproca:

PROPOSIZIONE 10. Sia S uno spazio localmente convesso tale che, dato un altro spazio localmente convesso S^* , un'applicazione lineare θ di S in S^* sia continua non appena si abbia $\lim_n \theta(x_n) = \theta(\lim_n x_n)$ per ogni successione (x_n) convergente in S . Allora S è uno spazio (\bar{L}_c) .

Per la dimostrazione, basta prendere come secondo spazio, S^* , l'insieme dei punti di S munito della topologia τ^* , per la quale un sistema fondamentale d'intorni di 0 è formato da quegli insiemi convessi contenenti 0, che non contengono il limite di nessuna successione di punti del complementare. È facile vedere che la nozione di convergenza è la stessa in S e S^* e che, pertanto, in virtù dell'ipotesi, l'applicazione identica I di S su S^* è continua (e quindi bicontinua).

Si può anche dire che S è uno spazio (\bar{L}_c) quando la topologia di S è la più fine tra le topologie di spazio localmente convesso su S che danno la stessa nozione di limite per le successioni.

Possiamo ora stabilire le due proposizioni seguenti :

TEOREMA 6. *Ogni limite induttivo canonico di spazi (\bar{L}_c) è ancora uno spazio (\bar{L}) .*

Sia infatti S il limite induttivo canonico di una famiglia $\{S_\alpha\}$ di spazi (LN^*) . Allora, se H è una parte convessa di S che non contiene il limite di nessuna successione di punti del suo complementare, lo stesso avverrà per $H \cap S_\alpha$, per rapporto alla topologia di S_α ; quindi $H \cap S_\alpha$ è aperto nello spazio S_α , qualunque sia α , il che implica, secondo una proprietà nota, che H è aperto in S .

TEOREMA 7. *Sia S il limite proiettivo di una successione (S_n) di spazi (\bar{L}_c) , per rapporto a delle applicazioni $g_{m,n}$ ($m \leq n$). Supponiamo che, per ogni intero n e per ogni successione $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_p^{(n)}, \dots$ convergente allo zero in S_n , esista una successione (x_p) convergente allo zero in S , tale che $x_p^{(n)} = g_n(x_p)$, qualunque sia p . Allora, anche S è uno spazio (\bar{L}_c) .*

Dimostrazione. Sia S^* un secondo spazio localmente convesso separato. La topologia τ^* di S può essere definita da una famiglia $\{p_\lambda\}_{\lambda \in L}$ di semi-norme; rappresentiamo con V_λ , per ogni λ , il sotto-spazio degli $x \in S^*$ tali che $p_\lambda(x) = 0$, con S_λ^* lo spazio normato S^*/V_λ e con φ_λ l'applicazione canonica di S^* in S_λ^* ; allora, condizione necessaria e sufficiente perchè un'applicazione lineare θ di S in S^* sia continua è che $\varphi_\lambda \theta$ sia un'applicazione continua di S in S_λ^* , per ogni λ (v. [3], pp. 19-20).

Ciò posto, sia θ un'applicazione lineare di S in S^* tale che $\lim_n \theta(x_n) = \theta(\lim_n x_n)$, per ogni successione (x_n) convergente in S . Se riusciamo a dimostrare che θ è continua il teorema è dimostrato (v. prop. 9). Consideriamo un indice λ qualunque e sia B_λ una sfera di centro 0 in S_λ^* ; poniamo $\theta_\lambda = \varphi_\lambda \theta$. Esiste allora un intero ν (dipendente da λ) tale che $\theta_\lambda(g_\nu^{-1}(0)) \subset B_\lambda$. Infatti, se così non fosse, esisterebbe una successione (x_n) di punti di S tale che $g_n(x_n) = 0$, con $\theta_\lambda(x_n) \notin B_\lambda$; ma si avrebbe allora $\lim_n x_n = 0$ in S , quindi $\lim_n \theta(x_n) = 0$ in S^* e $\lim_n \theta_\lambda(x_n) = 0$ in S_λ^* , il che contraddice il fatto che sia $\theta_\lambda(x_n) \notin B_\lambda$ per ogni n . Siccome $\theta_\lambda(g_\nu^{-1}(0))$ è un sotto-spazio lineare di S_λ^* , mentre B_λ è una sfera, si ha per forza $\theta_\lambda(g_\nu^{-1}(0)) = 0$; quindi, se poniamo $\theta_{\lambda\nu}(x) = \theta_\lambda[g_\nu^{-1}(x)]$ per ogni $x \in S_\nu$, si conclude, tenuto conto dell'ipotesi, che $\theta_{\lambda\nu}$ è un'applicazione con-

tinua di S_ν in S_λ^* e che pertanto θ è un'applicazione continua di S in S^* , giacchè $\varphi_\lambda \theta = \theta_\lambda = \theta_{\lambda\nu} g_\nu$, per ogni λ .

Questo risultato si applica in particolare allo spazio $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ delle distribuzioni di SCHWARTZ su \mathbb{R}^n , il quale è isomorfo al limite proiettivo di un'infinità numerabile di spazi (\bar{L}_a) , soddisfacenti la condizione espressa in questo teorema e quindi uno spazio (\bar{L}_c) .

NOTE FINALI. I. L'essenziale dei nostri risultati contenuti nei §§ 3 e 4 di [16] si estende senz'altro al caso in cui gli spazi considerati siano degli spazi (LN^*) . Intendiamo sviluppare opportunamente questo punto di vista.

II. La dimostrazione della prop. 5 si può condurre in questo modo: Sia S il limite induttivo degli S_α per rapporto ai $g_{\beta\alpha}$. Si riconosce che gli spazi S'_α formano uno spettro proiettivo per rapporto ai $g'_{\alpha\beta}$, osservando che si ha $g'_{\alpha\beta} g'_{\beta\gamma} = (g_{\gamma\beta} g_{\beta\alpha})' = g'_{\alpha\gamma}$ per $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Sia u un elemento arbitrario di S' ; se poniamo $\langle u_\alpha, x_\alpha \rangle = \langle u, g_\alpha(x_\alpha) \rangle$, per ogni $x_\alpha \in S_\alpha$ e ogni $\alpha \in A$, u_α sarà, in virtù della prop. 3, un elemento di S'_α ; inoltre, per $\alpha \leq \beta$, si avrà $g_\alpha(x_\alpha) = g_\beta(x_\beta)$ e

$$\begin{aligned} \langle g'_{\alpha\beta}(u_\beta), x_\alpha \rangle &= \langle u_\beta, g_{\beta\alpha}(x_\alpha) \rangle = \langle u_\beta, x_\beta \rangle = \\ &= \langle u, g_\beta(x_\beta) \rangle = \langle u_\alpha, x_\alpha \rangle \end{aligned}$$

e quindi $g'_{\alpha\beta}(u_\beta) = u_\alpha$; siccome, d'altra parte, si ha $u_\alpha = g'_\alpha(u)$, essendo g'_α un'applicazione lineare di S' in S'_α , possiamo identificare u con l'elemento (u_α) del limite proiettivo degli S'_α per rapporto ai $g'_{\alpha\beta}$.

Sia reciprocamente $u = (u_\alpha)$ un elemento arbitrario di questo limite proiettivo. È facile vedere che si definisce un funzionale lineare continuo su S , ponendo $\langle u, g_\alpha(x_\alpha) \rangle = \langle u_\alpha, x_\alpha \rangle$, per ogni $x_\alpha \in S_\alpha$ e ogni $\alpha \in A$.

Quanto alla prop. 6 si può dimostrarla in modo analogo, tenendo conto della prop. 4.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw (1932).
- [2] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, capitoli I-II, Act. Scient. Ind., n. 858-1142, Hermann, Paris (1934).
- [3] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, capitoli I-II, Act. Scient. Ind., n. 1189, Hermann, Paris, 1953.
- [4] N. BOURBAKI, *Sur certains espaces vectoriels topologiques*, Ann. Inst. Fourier Grenoble vol. 2 (1950).
- [5] J. DIEUDONNÉ, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*, Ann. École Norm. (3), vol. 59 (1942), pp. 107-139.
- [6] J. DIEUDONNÉ, *Recent developments in the theory of locally convex vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 59 (1953), pp. 495-512.
- [7] J. DIEUDONNÉ e L. SCHWARTZ, *La dualité dans les espaces (F) et (LF)* , Ann. Inst. Fourier Grenoble, vol. 1 (1949), pp. 61-101 (1950).
- [8] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces (F) et (DF)* (Da pubblicare in Summ Bras. Math.).
- [9] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* (Da pubblicare in Memoirs of the Amer. Math. Soc.).
- [10] A. GROTHENDIECK, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, J. Reine Angew. Math.
- [11] G. KÖTHE, *Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalconvexer Räume*, Math. Zeit, vol. 52 (1950), pp. 627-630.
- [12] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*, J. Reine Angew. Math., vol. 191 (1953), pp. 29-49.
- [13] C. KURATOWSKI, *Topologie I*, monografia matematiche, Warsaw (1935).
- [14] G. MACKEY, *On convex topological linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 60 (1946), pp. 519-537.
- [15] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, vol. I, Act. Scient. Ind., n. 1091, Hermann, Paris (1950).
- [16] J. S. E SILVA, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, Port. Math., vol. 12 (1953), pp. 1-46.
- [17] J. S. E SILVA, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions* (Da pubblicare in Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa).
- [18] C. DA SILVA DIAS, *Espaços vectoriais topológicos e sua aplicação na teoria dos espaços funcionais analíticos*, Tesi, Università di Sao Paulo (1951).
- [19] H.-G. TILLMANN, *Dualität in der Potentialtheorie* (Da pubblicare in Port. Math.).

(Entrata in redazione il 2 agosto 1954).