



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

COMMENTATIONES

ANNO IX

VOL. IX

N. 9

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

SUGLI AUTOMORFISMI DI UN SISTEMA MATEMATICO QUALUNQUE

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCXXXV

SUGLI AUTOMORFISMI DI UN SISTEMA MATEMATICO QUALUNQUE (*)

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA ⁽¹⁾

SVMMARIVM. — Definitis generalibus notionibus systematis mathematici et automorphismi, Auctor tales attingit conclusiones, quae, dilatantes quam maxime fieri potest doctrinas a FELICE KLEIN in «Programmate ERLANGEN» expositas, in hac provincia Galoisianam doctrinam sua vi extendunt; quae conclusiones ceterum, praeter quam quod multa ordinare aptius et clarare possunt in omnibus mathesis partibus, utiliter applicari poterunt in functionalis analysis quaestionibus. Theoremata, quae hic enunciantur, mox alio opere demonstrabantur.

1. PREDICATI DEFINITI IN UN INSIEME. — Dato un insieme U , di elementi a, b , di natura qualunque, chiameremo *complessi* di n elementi di U le disposizioni, con eventuale ripetizione, degli elementi di U , presi ad n ad n . Diremo allora che, nell'insieme U , è *definito* un *predicato* α , *n*-ario o di *ordine* n , quando esista un criterio, mediante il quale, dato un qualsiasi complesso di n elementi di U , si è sempre in grado di affermare se il detto complesso *possiede* o *no* il predicato α , *dovendo verificarsi una, e soltanto una, di queste due ipotesi*.

Per indicare che un dato complesso (c_1, c_2, \dots, c_n) possiede il predicato α , si scriverà $\alpha(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Nel caso che il predicato α sia binario, si può scrivere pure $c_1 \alpha c_2$, invece di $\alpha(c_1, c_2)$ ⁽²⁾.

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 30 luglio 1945.

⁽¹⁾ Borsista dell'«Istituto para a Alta Cultura» di Lisbona, presso il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma.

⁽²⁾ Non bisogna dimenticare che il significato di $c_1 \alpha c_2$ non coincide necessariamente col significato di $c_2 \alpha c_1$.

Se x_1, x_2, \dots, x_n designano elementi *indeterminati* di U , la formula $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ esprimerà una *proposizione condizionale* in x_1, x_2, \dots, x_n *definita* in U , cioè, una proposizione *variabile*, che assume uno, e soltanto uno, dei valori logici «vero» «falso», ogniquale volta le variabili x_1, x_2, \dots, x_n sono sostituite con costanti adeguate, cioè, con simboli rappresentanti elementi determinati di U .

Chiameremo *soluzioni* di un predicato n -ario, α , i complessi di n elementi di U che possiedono il predicato α . Due predicati α, β saranno considerati *identici*, e si scriverà $\alpha = \beta$, se ammettono le stesse soluzioni.

I predicati di ordine superiore al primo saranno chiamati *relazioni*. Allora, «possedere il predicato α » e «verificare la relazione α » saranno espressioni equivalenti.

Esempio. — Se rappresentiamo con N l'insieme dei numeri naturali, e se conveniamo di scrivere abbreviatamente $p \rightarrow q$, col significato di « p è divisore di q », la formula $p \rightarrow q$ esprimerà una proposizione condizionale in p, q , definita in N , ed il simbolo \rightarrow rappresenterà una relazione binaria, definita nello stesso insieme. Analogamente, la formula $p \equiv q \pmod{m}$, col significato ordinario (« p è congruente a q rispetto al modulo m ») esprime una proposizione condizionale in p, q, m , e, se scriviamo più semplicemente $\mu(p, q, m)$, invece di $p \equiv q \pmod{m}$, il simbolo μ rappresenterà una relazione ternaria definita in N . Finalmente, se conveniamo di scrivere $\pi(n)$, collo stesso significato di « n è pari», si avrà l'esempio di un predicato unitario π , definito in N ; rappresentando con P l'insieme (o classe) dei numeri pari, la stessa proposizione può essere espressa sotto la forma $n \in P$, dove il simbolo \in sostituisce, come di solito, le espressioni: «è un elemento di», *appartiene a*» ⁽¹⁾.

2. OPERAZIONI LOGICHE. — Le proposizioni condizionali, definite in un dato insieme U , possono combinarsi tra di loro, per mezzo delle

⁽¹⁾ Uno dei progressi fondamentali della Logica matematica sulla Logica aristotelica, risiede in questo fatto, che, mentre nella Logica aristotelica il giudizio è sempre composto da un solo soggetto e da un predicato unitario, nella Logica matematica, invece, il giudizio può contenere più soggetti e un predicato di ordine superiore al primo.

operazioni logiche, dando origine a nuove proposizioni condizionali, definite ancora in U . Così:

1) La *coniunzione* (o *prodotto logico*) di due proposizioni condizionali p, q , sarà la proposizione $p \wedge q$ (leggere « p e q ») che si verifica per quelle, e soltanto per quelle determinazioni delle variabili, che verificano *simultaneamente*, le proposizioni p, q .

2) La *disgiunzione* (o *somma logica*) di due proposizioni condizionali p, q , sarà la proposizione $p \vee q$ (leggere « p o q »), che si verifica allora, e soltanto allora, che una, per lo meno, delle proposizioni p, q è verificata.

3) La *negazione* di una proposizione p sarà la proposizione $\sim p$ (leggere « non p »), che si verifica per quelle, e soltanto per quelle determinazioni delle variabili, che *non* verificano p .

Queste tre operazioni non sono però indipendenti tra di loro, dato che affermare $p \vee q$ equivale ad affermare $\sim(\sim p \wedge \sim q)$, quali che siano p, q (prima legge di DE MORGAN). D'altra parte, riesce comodo introdurre l'operazione logica derivata \rightarrow (*implicazione materiale*) convenendo di scrivere $p \rightarrow q$, collo stesso significato di $q \vee \sim p$; il simbolo \rightarrow sostituisce così la locuzione « *se ... allora* ».

È facile vedere come le proposizioni $p \vee q, p \wedge q, p \rightarrow q$ siano condizionali nelle stesse variabili in cui lo sono p, q ; analogamente per $\sim p$. Vi sono tuttavia operatori logici (i *quantificatori*) che riducono il numero delle variabili delle proposizioni cui vengono applicati: Per esprimere che una data proposizione $\alpha(x)$, condizionale in una sola variabile x , e definita in U , è verificata per *tutti i valori possibili* di x (elementi di U), si scriverà $\bigcap_x \alpha(x)$; per esprimere che *esiste, almeno, un valore* di x , per il quale è vera la proposizione $\alpha(x)$, si scriverà $\bigcup_x \alpha(x)$. Così, i simboli \bigcap_x, \bigcup_x sostituiranno, rispettivamente, le espressioni: « *Qualunque sia x ...* » e « *Esiste almeno un x tale che* », e si vede come tali operatori (chiamati *quantificatori*), applicati a proposizioni condizionali in una sola variabile, diano origine a *proposizioni categoriche*, cioè a proposizioni con un valore determinato (« *vero* » o « *falso* »). Infatti, la verità delle proposizioni $\bigcap_x \alpha(x), \bigcup_x \alpha(x)$ non dipende più dalla variabile x , la quale, per questo fatto, viene chiamata variabile *apparente*, paragonabile agli indici muti dei sommatore.

Però, i quantificatori possono essere applicati a proposizioni condizionali in più variabili, ed in questo caso è manifesto che il quan-

tificatore, rendendo *apparente* una sola variabile, e lasciando *libere* le rimanenti, dà origine ad una proposizione ancora condizionale. In ogni caso, tuttavia, la formulazione delle proposizioni categoriche di una teoria non è possibile, se non con l'impiego diretto o indiretto dei quantificatori, applicati successivamente, fino all'eliminazione completa delle variabili. Per esempio, la formula $\bigcup_p \bigcap_n [(n=p) \vee (n > p)]$ esprime una nota proposizione della teoria dei numeri naturali.

Osserviamo da ultimo che i quantificatori non sono indipendenti l'uno dall'altro, dato che, invece di $\bigcup_x p$, si può scrivere $\sim \bigcap_x \sim p$, qualunque sia la proposizione p (seconda legge di DE MORGAN).

3. SEMPLIFICAZIONI DI SCRITTURA. — Al fine di alleggerire le espressioni simboliche, ravvicinando il linguaggio della Logica matematica al linguaggio comune, conviene introdurre ancora le convenzioni seguenti:

- 1) Si potrà scrivere $\bigcap_{x,y}$, invece di $\bigcap_x \bigcap_y$; $\bigcup_{x,y,z}$ invece di $\bigcup_x \bigcup_y \bigcup_z$, ecc.
- 2) Anzichè $\bigcap_{x,y,\dots} (p \rightarrow q)$ si scriverà $p \xrightarrow{x,y,\dots} q$ e anzichè $(p \xrightarrow{x,y,\dots} q) \wedge (q \xrightarrow{x,y,\dots} p)$ converrà scrivere $p \longleftrightarrow_{x,y,\dots} q$.

3) Se le variabili x, y, \dots , rese apparenti dal simbolo $\xrightarrow{x,y,\dots}$ sono tutte quelle da cui dipendono p, q , allora la proposizione $p \xrightarrow{x,y,\dots} q$ sarà categorica, e, invece di $p \xrightarrow{x,y,\dots} q$, si potrà scrivere $p \subset q$. Così il simbolo \subset (*implicazione formale*) sostituirà l'espressione « *Se ... allora, necessariamente* »; d'altra parte, la proposizione $p \subset q$ si esprime comunemente, dicendo che « *la p è una condizione sufficiente perchè si verifichi la q* » o che « *la q è una condizione necessaria perchè si verifichi la p* ».

4) Quando si abbia simultaneamente $p \subset q$, $q \subset p$, si potrà scrivere più semplicemente $p \equiv q$ e si dirà che le proposizioni p, q sono *formalmente equivalenti* ⁽¹⁾.

4. CAMBIAMENTI DI VARIABILI. — Tra le operazioni fondamentali della Logica non bisogna dimenticare i *cambiamenti di variabili*. Prendiamo un esempio: Rappresentiamo con U la classe degli esseri umani, e

⁽¹⁾ Conviene osservare che la differenza tra la scrittura simbolica qui adottata e quelle più note risiede nell'uso dei simboli $\rightarrow, \subset, \equiv, \bigcap_x, \bigcup_x$.

conveniamo scrivere $x \varphi y$, col significato di « x è figlio o figlia di y ». Allora, il simbolo φ rappresenterà una relazione binaria, definita in U . Se inoltre adottiamo l'abbreviatura $x \theta y$, per esprimere che « x è zio o zia di y », si avrà:

$$(x \theta y) \equiv \bigcup_{u, v} [(x \varphi u) \wedge (v \varphi u) \wedge (y \varphi v)]$$

Come si vede, il *nuovo* concetto θ è stato definito a partire dal concetto φ , mediante: 1) due cambiamenti di variabili che trasformano la proposizione condizionale $x \varphi u$, nelle sue *coniugate* $v \varphi u$, $y \varphi v$; 2) due congiunzioni; 3) una doppia quantificazione.

Si ha qui, dunque, l'esempio di una *definizione logica*, in cui non si può fare a meno dei cambiamenti di variabili. Questo stesso esempio fa vedere come un solo predicato φ si possa *concretare* in infinite proposizioni condizionali $x \varphi y$, $x \varphi z$, ..., coniugate tra di loro (coniugate, ma non equivalenti!).

Per comodità di linguaggio, diremo qualche volta « *il predicato* $\alpha(x, y, \dots)$ » invece di « *il predicato* α ».

5. PREDICATI EFFETTIVI. — Partiamo ancora da un esempio concreto: Conveniamo di scrivere $\theta(x, y)$, col significato di $\frac{2x}{y^2+1} > 0$, essendo x, y , variabili reali. Si avrà, allora, $\theta(x, y) \equiv (2x > 0)$ il che mostra che la relazione binaria θ si esprime *immediatamente* in un predicato unitario.

Diremo che un predicato α di grado n è *effettivo*, quando non si possa esprimere *immediatamente* in nessun predicato di ordine inferiore.

6. I PREDICATI E GLI INSIEMI DI COMPLESSI. — Dati n insiemi A_1, A_2, \dots, A_n , chiameremo *prodotto* ⁽¹⁾ di questi insiemi (relativamente all'ordine con cui sono scritti), e rappresenteremo con la formula $A_1 \odot A_2 \odot \dots \odot A_n$, l'insieme di tutti i complessi (a_1, a_2, \dots, a_n) dove a_1, a_2, \dots, a_n rappresentano, rispettivamente, elementi di A_1, A_2, \dots, A_n .

(1) Alcuni autori dicono in questo caso « *prodotto cartesiano* ».

Se tutti questi insiemi coincidono, e si ha $A_1 = A_2 = \dots = A_n = U$, il loro prodotto potrà essere rappresentato col simbolo $U^{(n)}$.

Sia (A) un sotto-insieme di $U^{(n)}$. Chiameremo *proiezione* di (A) secondo l' n -esima *coordinata*, l'insieme di quei complessi $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ che si ottengono sopprimendo l'ultimo elemento a_n ad ogni complesso (a_1, a_2, \dots, a_n) appartenente ad (A).

Ciò posto, osserviamo che ad ogni predicato n -ario, α , definito in U , corrisponde un sotto-insieme di $U^{(n)}$: l'insieme delle soluzioni di α ; e, reciprocamente, ad ogni sotto-insieme (A) di $U^{(n)}$ corrisponde il predicato n -ario: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (A)$. Inoltre, dati due predicati n -arii α, β , definiti in U , se rappresentiamo con (A), (B), rispettivamente, gli insiemi delle soluzioni di α e di β , si avrà che, secondo la detta corrispondenza:

1) La *coniunzione* $\alpha(x_1, \dots, x_n) \wedge \beta(x_1, \dots, x_n)$ si traduce nella *intersezione* $(A) \cap (B)$ (e, analogamente, la *disgiunzione* nella *riunione*).

2) La *negazione* $\sim \alpha(x_1, \dots, x_n)$ corrisponde alla formazione del *complementare* $\sim (A)$.

3) La *quantificazione* $\bigcup_{x_n} \alpha(x_1, \dots, x_n)$, per $n > 1$, si traduce nella *proiezione* secondo l' n -esima *coordinata*.

[Così, per esempio, essendo x, y , variabili reali, la proposizione condizionale $\bigcup_z (x^2 + y^2 + z^2 = 1)$, equivalente a questa altra proposizione $x^2 + y^2 \leq 1$, rappresenta in Geometria analitica un cerchio, proiezione della superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sul piano (x, y)].

4) I *cambiamenti di variabili* si traducono in *cambiamenti di ordine*.

5) L'*implicazione incondizionale* $\alpha(x_1, \dots, x_n) \subset \beta(x_1, \dots, x_n)$ corrisponde all'*inclusione* $(A) \subset (B)$, e l'*equivalenza* $\alpha(x_1, \dots, x_n) \equiv \beta(x_1, \dots, x_n)$, all'*identità* $(A) = (B)$.

Da questi fatti risulta che i predicati n -arii definiti in U possono venir concepiti, dal punto di vista della Logica pura, come sotto-insiemi di $U^{(n)}$. In questo modo, la Logica risulta identificata colla teoria degli insiemi, cioè con una Analisi combinatoria sviluppata ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Se volessimo cercare le ragioni che inducono l'uomo a distinguere tra un *predicato* e l'*insieme* degli individui che possiedono questo predicato, dovremmo uscire da limiti assegnati al presente lavoro. È però da osservare che, quando si sia prefissato l'insieme fondamentale U , la distinzione risiede più che altro nel linguaggio.

7. **ESPLICITAZIONE FORMALE: OPERATORI E FUNZIONI.** — Dato un predicato unitario, α , il quale ammetta una, e soltanto una soluzione, si rappresenterà con $\iota_x \alpha(x)$ questa soluzione. Così, il simbolo ι_x (che rende apparente la variabile x) avrà il valore della locuzione « *quell'elemento x tale che ...* ». Ma tale simbolo potrà anche essere applicato a proposizioni in più variabili. Per esempio, sia U ancora la classe degli esseri umani, e adottiamo le formule $x \phi y$, $\mu(x)$ rispettivamente, come abbreviature di « *x è figlio o figlia di y* », « *x è un maschio* »; allora la formula $\iota_y [(x \phi y) \wedge \mu(y)]$ rappresenterà, non più un elemento determinato di U , ma una variabile, y , *funzione* della variabile indipendente x . Se scriviamo *Pad* x come abbreviatura di $\iota_y [(x \phi y) \wedge \mu(y)]$ diremo che la costante *Pad* rappresenta un operatore unitario (univoco) definito in U .

Più generalmente, sia $\alpha(x_1, \dots, x_n, y)$ una relazione di ordine $n+1$ definita in U , e tale che, per ogni complesso (x_1, \dots, x_n) appartenente ad un certo sotto-insieme (C) di $U^{(n)}$, esista uno, e soltanto uno, elemento y di U , che verifichi la condizione $\alpha(x_1, \dots, x_n, y)$. Allora, se introduciamo una nuova costante, ϕ , mediante l'equivalenza

$$[y = \phi(x_1, \dots, x_n)] \equiv \alpha(x_1, \dots, x_n, y) \wedge [(x_1, \dots, x_n) \in (C)]$$

si vede come ϕ rappresenti una legge, per la quale si fa corrispondere, ad ogni complesso appartenente a (C) , un elemento determinato di U . Diremo allora che ϕ rappresenta un *operatore* (o un'operazione) *n-ario* o di *ordine n* , *univoco*, *definito in (C)* , e che y è una *funzione univoca* di x_1, \dots, x_n , definita in (C) . Si vede quindi come i concetti di operazione e di funzione siano contenuti in quello di relazione. Un operatore univoco, di grado n , non è altro che una particolare relazione di grado $n+1$, messa sotto forma *operatoria* o *esplicita*.

8. **LA TEORIA DEI TIPI.** — Consideriamo un insieme fondamentale U . Oltre i sotto-insiemi A, B, \dots , di U , potranno essere considerati insiemi $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ di sotto-insiemi di U , insiemi di insiemi di sotto-insiemi di U , ecc. Rappresenteremo con $\text{Cls. } U$ l'insieme dei sotto-insiemi di U (inclusi lo stesso insieme U e l'insieme vuoto O). Il simbolo Cls. potrà, naturalmente, essere applicato più volte successive. In generale, gli elementi di $\text{Cls. } U$ saranno chiamati insiemi di *tipo 1*, rispetto ad U ;

gli elementi di $\text{Cls. Cls. } U$, insiemi di *tipo 2* rispetto ad U , e così successivamente. Questa formazione di sempre nuovi enti si potrà ancora spingere nel transfinito: rappresentando con $\text{Cls.}^\omega U$ l'insieme di tutti gli insiemi di tipo *finito*, cioè la riunione $\text{Cls. } U \vee \text{Cls. Cls. } U \vee \text{Cls. Cls. Cls. } U \vee \dots$, si avrà in $\text{Cls.}^\omega U$, l'esempio di un insieme di tipo ω rispetto ad U ; continuando ad applicare il simbolo Cls. e ad effettuare opportune riunioni, si otterranno insiemi di tipi $\omega+1, \omega+2, \dots, 2\omega, \dots$, rispetto ad U .

Ma, secondo quanto si è detto nel n. 6, tali insiemi corrispondono a predicati unitarii. Ora è facile vedere come la gerarchia dei tipi si possa applicare a predicati di ordine qualunque. Sia $\Gamma(\xi, \eta, \dots; x, y \dots)$ una proposizione condizionale in variabili ξ, η, \dots sostituibili con predicati definiti in U (variabili di tipo 1); ed, *eventualmente*, in variabili x, y, \dots sostituibili con elementi di U (variabili fondamentali o di tipo 0). Diremo allora che la costante Γ rappresenta un predicato di *tipo 2* sopra U . Analogamente si definiscono predicati di tipi 3, 4, ..., sopra U , e si potrà ancora proseguire nel transfinito. D'altra parte, gli elementi di U possono venir considerati come *predicati* di tipo 0.

Esempio: Sia, nell'insieme N dei numeri naturali, la condizione

$$[\zeta(x, y) \xrightarrow{x, y} \zeta(x, y + x)] \wedge \bigcap_x \zeta(x, x)$$

che possiamo abbreviare in $\Phi(\zeta)$. È chiaro che Φ rappresenta un predicato unitario di tipo 2 sopra N , il quale conviene a infinite relazioni ζ , binarie, di tipo 1 (per esempio, le relazioni $x \leq y, x \vdash y$ ecc.). Però, se consideriamo il predicato Θ così definito:

$$\Theta(\zeta) \equiv [\zeta(x, y) \xleftrightarrow{x, y} \zeta(x, y + x)] \wedge [\zeta(x, y) \xrightarrow{x, y} x \leq y] \wedge \bigcap_x \zeta(x, x)$$

si vede come Θ ammetta una e una sola soluzione: — la relazione « x è divisore di y », o, abbreviatamente, $x \vdash y$. Potremo allora scrivere

$$[\iota_\zeta \Theta(\zeta)](x, y) \equiv (x \vdash y)$$

Osserviamo inoltre che la classificazione in tipi è applicabile anche agli operatori, dato che, come abbiamo visto, questi non sono che forme particolari di relazioni. Così, per esempio, le *operazioni di integrazione e di derivazione sono di tipo 2 rispetto all'insieme dei numeri reali (o dei numeri complessi); le equazioni funzionali ed in par-*

ticolare le equazioni differenziali, non sono che proposizioni condizionali di tipo 2 sopra lo stesso insieme, ecc. ecc.

Finalmente, le costanti logiche ($=, \wedge, \vee, \sim$ ecc.) si concretano in tante relazioni o operazioni di tipi diversi, a seconda delle relazioni cui vengono applicate. Per esempio, la congiunzione \wedge , applicata a relazioni di tipo 1, funge da operatore di tipo 2, ecc.

Non è però lecito parlare della *totalità* delle relazioni sopra un dato insieme U , altrimenti si andrà incontro al noto paradosso di RUSSELL.

9. LA TEORIA DEI TIPI E IL SIMBOLISMO LOGICO. — Quando si tratti di predicati di tipo finito, si può sempre dedurre il loro tipo dal modo con cui le parentesi si comprendono nelle rispettive espressioni sviluppate. Per esempio, una relazione α dalla forma $\alpha_{x,y,\xi,\eta}(x,y,\xi_{u,v}(z,\eta(u,v)))$ sarà una relazione di tipo 3, se x, y, u, v , rappresentano variabili fondamentali e ξ, η variabili di tipo superiore (rese apparenti quelle scritte in indice); questa relazione α corrisponderà inoltre, secondo una interpretazione analoga a quella del n. 6, ad un sotto-insieme del prodotto cartesiano $U^{(2)} \odot \text{Cls. } (U \odot \text{Cls. } U^{(2)})$, se U rappresenta l'insieme fondamentale.

Se le relazioni si presentano sotto la forma di operatori, le convenzioni saranno naturalmente più complesse, ma il problema si può ancora risolvere completamente per gli operatori di tipo finito.

Quando però si cerca di prolungare nel transfinito il simbolismo logico, sorgono curiose difficoltà, che mettono in piena luce le stesse fondamenta del nostro pensiero. Infatti, lo studio dei numeri transfiniti mostra che, mentre è sempre possibile ampliare un dato formalismo coll'aggiunta di nuove convenzioni, non è però possibile fondare un formalismo rigoroso che racchiuda, definitivamente, tutti i tipi corrispondenti ai numeri ordinali di classe II. In questo fatto, che si collega direttamente al noto paradosso di RICHARD, consiste la difficoltà sostanziale delle teorie della definizione e della dimostrazione, ed in particolare l'impossibilità di attuare il sogno di LEIBNIZ, relativo ad una lingua scientifica universale.

10. I DUE CONCETTI DI DEFINIZIONE LOGICA. — Conveniamo di considerare *fondamentali* le operazioni logiche di: *coniunzione* (\wedge), *negazione* (\sim), *quantificazione* (\cap), *esplicitazione formale* (ι_x) e *cambiamenti di variabili*.

Ciò posto, siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ predicati di tipo qualunque, sopra U , che chiameremo *predicati primitivi*; e sia α un altro predicato sopra U ⁽¹⁾. Diremo che α si può *esprimere logicamente, in senso normale*, nei predicati primitivi $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, quando α possa figurare come ultimo termine di una catena *finita*, i cui primi termini siano predicati primitivi, accresciuti eventualmente dalla relazione logica e da variabili ξ_1, \dots, ξ_p , di tipo superiore a 0; ed i cui termini rimanenti siano predicati dedotti da termini anteriori, mediante una operazione logica fondamentale effettuata una sola volta ⁽²⁾. La proposizione categorica che, sotto la forma di una identità o di una equivalenza, stabilisce il significato del nuovo simbolo α , in funzione logica dei simboli $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, si chiamerà, naturalmente, la *definizione logica* di α .

Così, per esempio, secondo quanto abbiamo visto nel n. 4, il concetto di « *zio(a) di* », si esprime logicamente, in senso normale, nel concetto di « *figlio(a) di* »; e, come abbiamo nel n. 8, il concetto di « *divisore di* » si può esprimere logicamente, in senso normale, nei concetti $+$ e $<$.

Alla locuzione *esprimere logicamente in senso largo*, attribuiremo qui il significato più ristretto compatibile collé condizioni seguenti: 1) Se il predicato α è logicamente esprimibile nei predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, *in senso normale*, lo sarà anche *in senso largo*; 2) Se *tutte* le soluzioni di α sono logicamente esprimibili in senso largo, nei predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, anche α sarà logicamente esprimibile, in senso largo, nei predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$; 3) Se α è logicamente esprimibile, in senso largo, in predicati β_1, β_2, \dots , i quali, a loro volta, siano logicamente esprimibili, in senso largo, nei predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, allora anche α sarà logicamente esprimibile, in senso largo, nei predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. La differenza del

⁽¹⁾ Non si esclude, naturalmente, la possibilità che tra i concetti primitivi vi siano anche elementi $a, b \dots$ di U (predicati di tipo 0), i quali, però, converrà siano messi sotto la forma di predicati unitari di tipo 1, $x = a, x = b \dots$.

⁽²⁾ Per maggiore semplicità e anche maggior nitidezza, si può supporre in più che i predicati primitivi e le variabili introdotte siano tutte di tipo finito, il che non avrà nessuna influenza apprezzabile sui risultati che saranno qui esposti.

nuovo concetto, rispetto al primo, risiede, manifestamente, nella condizione seconda ⁽¹⁾. Sia α , per esempio, un predicato unitario di tipo 1, le cui soluzioni a, b, \dots siano tutte logicamente esprimibili, in senso normale, nei predicati primitivi; allora si avrà, come definizione logica di α :

$$\alpha(x) \equiv (x = a) \vee (x = b) \vee$$

Se le soluzioni a, b, \dots sono in numero finito, è chiaro che non si esce, in questa definizione, dallo schema delle definizioni logiche in senso normale. Ma si potrà dire lo stesso in generale? Più precisamente: Si può affermare che ogni predicato α , che sia logicamente esprimibile nei predicati primitivi, *in senso largo*, lo sarà anche in *senso normale*? Ecco qui un problema delicatissimo, dalla natura dei problemi relativi al principio di ZERMELO, alla non contraddizione dell'Aritmetica, alla risolubilità di ogni problema matematico determinato, ecc., e che si collega colle difficoltà cui abbiamo accennato nel numero precedente ⁽²⁾.

Se le soluzioni di α sono infinite, il termine «*esprimibile*» si riferisce, naturalmente, ad una possibilità puramente *ideale* di definizione, data l'incapacità della nostra mente di eseguire un'infinità di operazioni indipendenti; invece di «*logicamente esprimibile nei concetti primitivi*», sarebbe quindi preferibile, per esempio, l'uso dell'espressione «*logicamente determinato rispetto ai concetti primitivi*». Non è detto però che alla questione posta si debba rispondere negativamente, *almeno nel caso in cui tutti gli elementi fondamentali siano logicamente esprimibili, in senso normale, nei predicati primitivi*. Sarà lecito, per esempio, nel caso dei numeri interi, affermare l'esistenza di insiemi o di successioni, che non obbediscano a nessuna legge finitista di formazione; che sfuggano, cioè, ad ogni possibilità di definizione *effettiva*? Come si sa,

⁽¹⁾ In altri termini, questa condizione esprime semplicemente il fatto che ogni predicato è univocamente determinato dagli elementi cui conviene.

⁽²⁾ Per esempio, si dimostra facilmente che, in una qualsiasi classe di numeri ordinali, ogni elemento è logicamente esprimibile, in senso largo, nella relazione primitiva $<$; ma non sembra altrettanto facile dimostrare che ogni numero ordinale sia logicamente esprimibile, in senso normale, nella relazione $<$.

questa domanda ha suscitato non poche discussioni tra matematici di diverse tendenze ⁽¹⁾.

Ma non è neanche da escludere la possibilità che un predicato α , logicamente esprimibile, in senso normale, in certi predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, sia logicamente esprimibile in senso largo, ma non in senso normale, in certi altri predicati β_1, β_2, \dots ; ed è proprio questo dubbio che rende veramente interessante il secondo dei due concetti introdotti.

11. PREDICATI DI ORDINE INFINITO. — Nel linguaggio matematico, possono presentarsi anche predicati di ordine infinito. Così, per esempio, se conveniamo scrivere $\gamma(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$, per indicare che una data successione numerabile $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ di numeri reali è una successione convergente, diremo che la costante γ rappresenta *un predicato di ordine ω , definito nell'insieme R dei numeri reali*. Analogamente, diremo che il simbolo $\lim_{n \rightarrow \infty}$, col significato comune, rappresenta *un operatore di ordine ω , definito in quel sotto-insieme di $R^{(\omega)}$, formato da tutte le successioni convergenti*.

Sebbene i predicati di ordine infinito si possano sempre ricondurre a predicati unitari di tipo superiore, può tuttavia riuscire comodo, in certi argomenti, la considerazione di questo genere di predicati.

In ciò che segue, per designare un complesso (a_1, a_2, \dots) , finito o infinito, useremo qualche volta la notazione abbreviata \bar{a}_i , dove l'indice i rappresenterà una variabile sopra una data classe di numeri ordinali, o, più generalmente, sopra un insieme R , qualunque, che chiameremo *l'insieme delle posizioni cui è riferito il complesso \bar{a}_i* . D'altra parte, rappresenteremo col la notazione $\{a_i\}$ *l'insieme degli elementi a_i , astraendo, naturalmente, dall'ordine e dalle ripetizioni riguardanti il complesso \bar{a}_i* .

Alle relazioni di ordine infinito si può applicare, *mutatis mutandis*, quanto abbiamo detto sui processi di definizione logica.

⁽¹⁾ Il concetto, qui precisato, di «*esprimere logicamente in senso normale*», corrisponde, sensibilmente, al concetto boreliano di «*definire con un numero finito di parole*», ampliato col «*nominabile*» di LEHESGUE. È da osservare che la scuola intuizionista di BROWER non ammette che un concetto strettissimo di definizioni logiche, nel quale, però, sono comprese le definizioni ricorrenti, così profondamente studiate dalla scuola hilbertiana (vedi bibliografia).

12. IL CONCETTO DI SISTEMA MATEMATICO. — Dato un insieme U , e fissato su di U un insieme \mathcal{P} di predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, diremo che l'insieme U , con i predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, presi come primitivi, costituisce un *sistema matematico* $[U, \alpha_1, \alpha_2, \dots]$, e diremo altresì che due sistemi matematici $[U, \alpha_1, \alpha_2, \dots]$ e $[U, \beta_1, \beta_2, \dots]$ sono *identici*, cioè, in simboli $[U, \alpha_1, \alpha_2, \dots] = [U, \beta_1, \beta_2, \dots]$, se, e soltanto se, sono verificate le due condizioni: 1) i predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sono logicamente esprimibili (pure in senso largo), nei predicati β_1, β_2, \dots ; 2) i predicati β_1, β_2, \dots sono logicamente esprimibili (pure in senso largo), nei predicati $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. I predicati primitivi potranno anche presentarsi sotto la forma di operatori o di insiemi. Invece della notazione $[U, \alpha_1, \alpha_2, \dots]$, si potrà usare anche quest'altra, più condensata: $[U; \mathcal{P}]$, ma non bisogna allora perdere di vista che, secondo le convenzioni anteriori, i due sistemi $[U; \mathcal{P}]$, $[U, \mathcal{P}]$ possono essere distinti.

Invece di « *sistema matematico* », si potrà dire semplicemente « *sistema* », qualora non vi sia pericolo di confusione.

Esempi. — Rappresentiamo con P l'insieme di punti dello spazio ordinario, concepiti come terne ordinate di punti reali, e conveniamo di scrivere $Rt(x, y, z)$, $Tr(x, y, z)$, $Eg(x, y, u, v)$, rispettivamente, coi significati di « x, y, z , sono allineati », « y è situato tra x e z », « la distanza di x da y è uguale alla distanza di u da v », essendo x, y, u, v , naturalmente variabili su di P ⁽¹⁾. Conveniamo inoltre di scrivere $u = Sm(x, y, z)$, per esprimere lo stesso fatto che, in linguaggio vettoriale, si traduce con la formula $u = z + (x - z) + (y - z)$; e scriviamo $y = \lim_n x_n$ col significato usuale. Allora è facile vedere come si abbia $[P, Rt, Tr] = [P, Sm, \lim_n]$, ma $[P, Rt, Tr] \neq [P, Rt, Tr, Eg]$, dato che il predicato Eg non è logicamente esprimibile, neanche in senso largo, nei predicati Rt, Tr ⁽²⁾. Osserviamo finalmente che i sistemi $[P, Rt, Tr]$, $[P, Rt, Tr, Eg]$ non sono altri che, rispettivamente, lo *spazio affine ordinario* e lo *spazio euclideo ordinario*. —

Quantunque nessuna restrizione sia stata imposta sull'ordine e sul tipo dei predicati primitivi \mathcal{P} , il fatto è che, praticamente, non si presentano mai sistemi nei quali i predicati presi come primitivi

⁽¹⁾ HILBERT usa Gr (da *Gerade*) invece di Rt , e Zw (da *zwischen*) invece di Tr .

⁽²⁾ Si ha anche $[P, Rt, Tr] = [P, Tr]$ e perfino $[P, Tr, Eg] = [P, Eg]$.

siano di tipo superiore a 2 o di ordine superiore ad ω . D'altra parte, come vedremo più innanzi, si ha che *qualunque sistema è definibile mediante un numero finito di predicati di ordine finito e di tipo non superiore a 2*. I sistemi topologici sono caratterizzati da un predicato primitivo di tipo 2, generalmente dalla forma $x \in X'$ (« x è un punto di accumulazione di X »), il quale, in tutti gli spazi usuali, eccettuata la retta topologica, è insostituibile con predicati di tipo inferiore. Nei sistemi algebrici, invece, i predicati primitivi sono generalmente di tipo 1 e si presentano sotto la forma di operazioni⁽¹⁾.

13. IL CONCETTO DI AUTOMORFISMO. — Dato un insieme fondamentale U , sia θ una *trasformazione biunivoca* dell'insieme U in sè stesso, cioè un operatore, che, ad ogni elemento x di U , faccia corrispondere un elemento determinato $\theta(x)$ di U , in modo che, dato un qualsiasi elemento y di U , esista sempre uno, e soltanto uno, elemento x di U , soddisfacente alla condizione $y = \theta(x)$. Allora, dato un complesso (a_1, a_2, \dots) di elementi di U , chiameremo *immagine* di questo complesso, *per mezzo di θ* , il complesso $(\theta(a_1), \theta(a_2), \dots)$; dato un predicato α definito in U , chiameremo *immagine di α per mezzo di θ* , e rappresenteremo con $\theta(\alpha)$, il predicato le cui soluzioni sono le immagini, per mezzo di θ , delle soluzioni di α ; e finalmente, diremo che la trasformazione θ *conserva* (o *lascia invariante*) il predicato α , se, e soltanto se, è verificata la condizione $\alpha(x_1, \dots, x_n) \equiv \alpha(\theta(x_1), \dots, \theta(x_n))$, cioè, la condizione $\theta(\alpha) = \alpha$.

Sia adesso α un predicato di tipo 2 sopra U . Allora, come sappiamo, le soluzioni di α saranno complessi costituiti da predicati definiti in U ed, eventualmente, da elementi di U . Chiameremo ancora *immagine di α per mezzo di θ* , e rappresenteremo con $\theta(\alpha)$, il predicato che ha per soluzioni le immagini, per mezzo di θ , delle soluzioni di α ; e diremo che la trasformazione θ *conserva* il predicato α ,

⁽¹⁾ È da osservare che i gruppi, i corpi, ecc. corrispondono ad un concetto di sistema matematico, più stretto di quello qui precisato. Vi si scorge una differenza simile a quella che corre tra « *retta* » e « *retta orientata* ». Per tale concetto si potrebbe introdurre l'espressione « *sistema qualificato* ».

se, e soltanto se, $\theta(\alpha)=\alpha$. E analogamente per i predicati di tipo superiore.

Ciò posto, chiameremo *automorfismi* di un sistema $[U; \mathcal{P}]$ quelle trasformazioni biunivoche dell'insieme U in sè stesso che lasciano invarianti i predicati primitivi \mathcal{P} .

Si vede immediatamente come il *prodotto* di due automorfismi sia ancora un automorfismo, e come la trasformazione *inversa* di un automorfismo sia anche un automorfismo; ciò significa che *l'insieme degli automorfismi di un sistema matematico costituisce un gruppo, per rapporto al prodotto usuale di trasformazioni*.

Esempi. — Gli automorfismi di uno spazio topologico sono le *trasformazioni biunivoche e bicontinue dello spazio* in sè stesso. Gli automorfismi del sistema $[P, Rt, Tr]$ sono le *affinità spaziali*. Gli automorfismi del sistema $[P, Rt, Tr, Eg]$ sono le *similitudini spaziali*. Il gruppo delle similitudini è un sottogruppo proprio del gruppo delle affinità. In generale, come vedremo più innanzi, *l'aggiunta di un predicato primitivo riduce o conserva il gruppo degli automorfismi, secondo che altera o no il sistema considerato*.

14. ELEMENTI INDISCERNIBILI. SISTEMI DEFORMABILI. — Un sistema matematico si dirà *deformabile* o *indeformabile*, secondo che ammetta o no un automorfismo diverso dalla identità. Per esempio, il sistema $[N, suc]$ dove N rappresenta l'insieme dei numeri naturali, e *suc*, l'operatore unitario « *il successore di* », è un sistema indeformabile, e lo stesso si può dire dei sistemi $[N, <]$, $[N, +]$, dato che si ha $[N, suc] = [N, <] = [N, +]$; ma non si può dire altrettanto del sistema $[N, \times]$ il quale è, certamente, deformabile. Analogamente, i sistemi $[R, <]$, $[R, +, <]$, $[R, \times, <]$, dove R rappresenta l'insieme dei numeri reali, sono deformabili; ma il sistema $[R, +, \times, <]$ è indeformabile ⁽¹⁾.

Condizione sufficiente perchè un sistema sia indeformabile è che tutti i suoi elementi siano logicamente esprimibili (in qualunque senso) nei predicati primitivi. Sarà questa condizione anche necessaria? Si

⁽¹⁾ Osserviamo che si ha $[R, +, 1, <] = [R, +, \times, <]$, ma non $[R, +, 1] = [R, +, \times]$. Si ha invece $[R, +, \times] = [R, +, \times, <]$, dato che $(x > y) \equiv \bigcup_z (z \times z = y - x)$.

tratta qui di un problema, il quale si presenta come caso particolare di quest'altro, che sarà studiato più innanzi: In un sistema qualsiasi, ogni predicato logicamente esprimibile nei predicati primitivi rimane invariante per tutti gli automorfismi del sistema; ebbene, si domanda: È vera anche la reciproca?

A proposito di tale problema riesce interessante mettere in evidenza certi concetti. In un dato sistema matematico, due predicati α, β (dello stesso tipo ed ordine) si diranno *discernibili*, se, e soltanto se, esiste almeno un predicato Γ , unitario, logicamente esprimibile nei predicati primitivi, il quale convenga ad uno dei predicati α, β ma non convenga all'altro. In un dato sistema matematico, un predicato si dirà *isolabile*, se, e soltanto se, è discernibile, mediante i predicati primitivi, da ogni altro predicato sullo stesso insieme fondamentale. In corrispondenza ai due concetti di « *logicamente esprimibile* », vi saranno, naturalmente, due concetti di « *predicati discernibili* » e due altri di « *predicato isolabile* ». D'altronde, questi concetti si applicheranno, in particolare, agli elementi dell'insieme fondamentale (predicati di tipo 0); e possono ancora estendersi a complessi di predicati.

Come vedremo più innanzi, l'esistenza di almeno due predicati α, β , distinti, ma indiscernibili mediante i predicati primitivi, equivale all'esistenza di almeno un automorfismo (distinto dall'identità) che trasformi l'uno nell'altro; equivale dunque alla deformabilità del sistema. Tale fatto non equivale però alla permutabilità dei due predicati. Infatti, due predicati α, β , si diranno *permutabili* o *ambigui* in un sistema matematico, se, e soltanto se, esiste almeno un automorfismo θ tale che $\theta(\alpha) = \beta, \theta(\beta) = \alpha$; e una condizione necessaria e sufficiente perchè due predicati siano permutabili è che i complessi $(\alpha, \beta), (\beta, \alpha)$ siano indiscernibili nel sistema considerato. Per esempio, nel sistema $[R, <]$, due elementi distinti sono indiscernibili, eppure non sono mai permutabili; in Geometria euclidea ordinaria, cioè, nel sistema $[P, Tr, Eg]$, due insiemi simili sono sempre indiscernibili, ma soltanto due insiemi simmetrici per rapporto ad un punto, ad una retta o ad un piano sono permutabili ⁽¹⁾; nel corpo dei numeri complessi, tutte le coppie

⁽¹⁾ Non bisogna dimenticare che la Geometria dello spazio fisico ordinario sarebbe, più propriamente, la Geometria metrica euclidea, caratterizzata dal gruppo delle congruenze. In questo caso, le figure indiscernibili sono le figure congruenti. Ne riparleremo più innanzi.

di elementi indiscernibili (i numeri coniugati) sono anche coppie di elementi ambigui; nel corpo $Ra(\sqrt{5})$ si trovano, invece, certe coppie di elementi indiscernibili che non sono ambigui, ecc. ecc.

15. LE DUE SPECIE DI ISOMORFISMI TRA SOTTO-INSIEMI DI UN SISTEMA. —

Dato un insieme fondamentale U , sia C un sottoinsieme di U ed α un predicato sopra U . Rappresentiamo d'altra parte con α^* il predicato che ha per soluzioni: 1) quelle soluzioni di α che sono costituite da soli elementi di C — se α è di tipo 1; 2) quelle soluzioni di α che sono costituite da soli predicati definiti in C e, eventualmente, da elementi di C — se α è di tipo 2; e così successivamente e transfinitamente. Allora diremo che α^* non è altro che il predicato α , *relativizzato* a C .

Ciò detto, prendiamo un sistema $[U; \mathcal{P}]$. Dati due sotto-insiemi C_1, C_2 di U e una trasformazione biunivoca θ di C_1 in C_2 , diremo che:

a) θ è un *ipoisomorfismo* di C_1 in C_2 (rispetto ai predicati \mathcal{P}), se, e soltanto se, conserva tutti i predicati primitivi, \mathcal{P} , relativizzati a C_1 .

b) θ è un *iperisomorfismo* di C_1 in C_2 , se, e soltanto se, conserva qualunque predicato logicamente esprimibile nei predicati \mathcal{P} e relativizzato a C_1 .

I due insiemi C_1, C_2 si diranno *ipoisomorfi* (*iperisomorfi*), quando esista almeno una trasformazione biunivoca di C_1 in C_2 che sia un ipoisomorfismo (un iperisomorfismo).

Per esempio, nel piano topologico di origine cartesiana, una parabola è iperisomorfa ad una retta; ma un segmento di retta cui siano stati soppressi gli estremi non è più iperisomorfo ad una retta, pur essendole ipoisomorfo (cioè omeomorfo, come si suol dire in questo caso). Come vedremo, il concetto di « *insiemi iperisomorfi* » coincide col concetto di « *insiemi indiscernibili* ».

16. BASI LOGICHE. INSIEMI LOGICAMENTE CHIUSI. PREDICATI IRRIDUCIBILI. — Dato un sistema $[U; \mathcal{P}]$ siano E un sotto-insieme di U ed α un predicato sopra U (anche di tipo 0). Allora: a) diremo che α è *determinato in* E (rispetto al sistema considerato), quando sia logi-

camente esprimibile nei predicati \mathcal{P} , ampliati eventualmente con elementi di E ; b) chiameremo insieme *logicamente generato dagli elementi di E* o *chiusura logica di E* (nel sistema $[U; \mathcal{P}]$), l'insieme F di tutti gli elementi di U che sono determinati in E ; c) chiameremo insieme *logicamente chiusi* nel sistema considerato quelli che coincidono con la rispettiva chiusura logica; d) chiameremo *base logica di E* (sempre nel sistema considerato) ogni sotto-insieme di E , nel quale tutti gli elementi di E siano determinati. Più generalmente, chiameremo *base logica di un insieme E , rispetto ad un suo sotto-insieme A* , o, più condensamente, *base logica di E/A* , ogni insieme che sia una base logica di E , quando ai predicati primitivi siano stati aggiunti gli elementi di A . Possiamo finalmente considerare basi logiche costituite da predicati: questo concetto si stabilisce in modo analogo al precedente.

In corrispondenza ai due concetti di « *logicamente esprimibile* » vi saranno due concetti di « *predicato determinato in un insieme* », due altri di « *chiusura logica* », ecc.

Esempi. — Negli spazi geometrici, tanto affini che euclidei, gli insiemi logicamente chiusi sono le varietà lineari; nei corpi di numeri algebrici, gli insiemi logicamente chiusi sono i sotto-corpi, ecc. ecc. È da osservare che, in generale, l'insieme vuoto non è logicamente chiuso nei sistemi algebrici, ma lo è nei sistemi geometrici e topologici. —

Ed ora possiamo introdurre uno dei concetti più importanti di questo soggetto, e che generalizza il noto concetto di « *equazione irriducibile in un dato corpo* ». Riprendiamo il sistema $[U; \mathcal{P}]$, e siano di nuovo: E , un sottoinsieme di U ; α , un predicato sopra U . Diremo che il predicato α è *irriducibile* nell'insieme E , quando siano verificate le due condizioni seguenti: 1) α è determinato in E ; 2) non esiste nessun predicato β , determinato in E , che ammetta una parte, e soltanto una parte, delle soluzioni di α .

Sia allora $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ un complesso di predicati sopra U , e conveniamo di scrivere $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots)$ per indicare che « *il complesso (ξ_1, ξ_2, \dots) è indiscernibile, in senso largo, dal complesso $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ mediante i predicati \mathcal{P} , accresciuti dagli elementi di E* ». Allora si potrà riconoscere che il predicato Γ è non solo determinato in E (almeno in senso largo), ma è *precisamente quel predicato irriducibile in E , che ammette*

il complesso $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ come soluzione. In parole comuni: *Il predicato Γ rappresenta il massimo che si possa dire a proposito di quel complesso, quando, a tale scopo, si usino i soli concetti \mathcal{P} , ampliati con la conoscenza degli elementi di E .*

Per esempio in Geometria affine, il predicato irriducibile che ammette una data circonferenza come soluzione, è il *genere ellisse*; in Geometria euclidea, invece, il predicato irriducibile che ammette la stessa soluzione è la *specie circonferenza* (tutt'e due predicati di tipo 2 sopra \mathcal{P})⁽¹⁾.

16. IL PRIMO TEOREMA FONDAMENTALE. CRITERIO D'IRRIDUCIBILITÀ. — Consideriamo ancora il sistema $[U; \mathcal{P}]$, e siano: A un sottoinsieme di U ; $\{a_i\}$ una base logica di U/A . Questa base può essere finita o infinita, e, per comodità, si considera già ordinata in un complesso \bar{a}_i . Sia d'altra parte ρ il predicato irriducibile in A che ammette il complesso \bar{a}_i come soluzione. Allora si avrà che:

Gli automorfismi del sistema $[U; \mathcal{P}]$, che lasciano fissi gli elementi di A , sono tutte quelle trasformazioni biunivoche θ dell'insieme U in sè stesso che si ottengono, sostituendo il complesso \bar{a}_i con una soluzione \bar{b}_i , qualunque del predicato ρ , e facendo corrispondere ad ogni elemento x di U quell'elemento $\theta(x)$ di U che si esprime in \bar{b}_i nello stesso modo con cui x si esprime in \bar{a}_i (2).

In ogni caso concreto, si cercherà naturalmente, per il predicato irriducibile ρ , una definizione in senso normale, o meglio, in senso costruttivo, il che non è detto che sia sempre possibile. Dai due teoremi fondamentali si deduce il seguente *criterio generale d'irriducibilità*, facilmente applicabile in molti casi della pratica:

Supponiamo che si conosca un processo di rappresentazione *biunivoca* (o *canonica*) degli elementi di U nella base logica $\{a_i\}$; cioè, che si conosca una famiglia \mathcal{R} di operatori univochi η , determinati in A

(1) È manifesto che il concetto di « predicato irriducibile » generalizza quel concetto di « corpo di figure » che è stato introdotto nella classificazione delle geometrie, fatta mediante la teoria dei gruppi.

(2) Questo teorema sembra quasi evidente, eppure la sua dimostrazione è tutt'altro che immediata. Osserviamo intanto che non vi interviene il principio di ZERMELO.

e messi in corrispondenza biunivoca con gli elementi di U , in modo tale che, dato un qualsiasi elemento x di U , si abbia $x = \eta(\bar{a}_i)$, essendo η l'operatore corrispondente a x ⁽¹⁾. Allora una condizione necessaria e sufficiente perchè ρ sia irriducibile in A è che, qualunque sia il predicato α di tipo 1, primitivo o della forma $x = a$, con $a \in A$, il predicato Γ tale che

$$\bigcup [\alpha(\eta_1(\bar{x}_i), \eta_2(\bar{x}_i), \dots) \wedge \rho(\bar{x}_i)] \equiv \Gamma(\eta_1, \eta_2, \dots)$$

sia determinato in A , cioè, indipendente dalla base $\{a_i\}$. E analogamente per gli eventuali predicati primitivi di tipo superiore ⁽²⁾.

Esempi. — Uno degli esempi più importanti da citare in proposito, ma che qui mi astengo dallo sviluppare, sarebbe quello delle estensioni algebriche dei corpi. A titolo di chiarimento presenterò soltanto i seguenti casi:

a) Consideriamo lo spazio affine $[P, Rt, Tr]$, e sia A un sottoinsieme di P , costituito da due punti, p, q . La chiusura logica di A è, in senso largo, la retta \overline{pq} . Scriviamo $\sec(x, y, u, v)$ come abbreviatura di $\bigcup [Rt(x, y, z) \wedge Rt(u, v, z)]$; una base logica minima di P/A in senso largo sarà costituita da due punti a, b , tali che

$$\sim \sec(p, q, a, b) \wedge \sim \sec(p, a, q, b) \wedge \sim \sec(p, b, q, a),$$

cioè, tali che non siano *complanari* con i punti p, q . Allora, se conveniamo di indicare questa condizione colla formula $\rho(a, b)$, si avrà in ρ il predicato irriducibile in A che ammette (a, b) come soluzione. Ogni elemento x di P si può mettere sotto la forma $x = \varphi(a, b)$ essendo φ un operatore risultante da sovrapposizioni, in numero finito o infinito degli operatori Sm, \lim (n. 12), e da sostituzioni di variabili con elementi di A ; quindi, un operatore determinato in A . Anzi, si perviene in questo modo ad una rappresentazione biunivoca degli elementi di P . E dopo questo è facile vedere come si possano determinare gli automorfismi dello spazio, che lasciano fissi gli elementi p, q .

⁽¹⁾ Una siffatta rappresentazione esisterà sempre, almeno nel senso zermeliano.

⁽²⁾ Si considerano inclusi anche i predicati logici primitivi.

Se ora aggiungiamo ai concetti primitivi Rt, Tr, il concetto di congruenza Eg, passando così alla Geometria euclidea, la condizione perchè la coppia (a, b) costituisca una base logica di P/A è ancora la stessa, ma il predicato irriducibile in A, che ammette (a, b) come soluzione, si restringe, e non è più simmetrico in generale. Gli automorfismi del sistema che lasciano fissi gli elementi p, q , sono adesso le rotazioni intorno alla retta \overline{pq} e le simmetrie rispetto ai piani che passano per \overline{pq} .

Un altro esempio interessante da esaminare è il corrispondente ai due precedenti, in Geometria proiettiva⁽¹⁾.

b) Prendiamo il sistema $[N^*, \times]$ dove N^* rappresenta l'insieme dei numeri naturali coll'aggiunta dello 0. La chiusura logica dell'insieme vuoto è, in questo sistema, costituita dai soli numeri 0, 1. D'altra parte, è facile vedere come i numeri primi costituiscano una base logica minima, sebbene infinita, del sistema considerato⁽²⁾. Ogni numero è univocamente rappresentabile mediante la sua decomposizione in fattori primi. Allora, se scriviamo $\pi(p_1, p_2, \dots)$, per indicare che « p_1, p_2, \dots sono i numeri primi senza omissioni, nè ripetizioni », si vede facilmente come π sia il predicato irriducibile (nell'insieme vuoto) che ammette il complesso $(2, 3, 5, \dots)$ come soluzione. Allora gli automorfismi del sistema considerato saranno le trasformazioni θ che, ad ogni numero a dalla forma $p_1^{n_1} \times \dots \times p_k^{n_k}$, dove p_1, \dots, p_k rappresentano numeri primi, fa corrispondere il numero $\theta(a) = [\theta(p_1)]^{n_1} \times \dots \times [\theta(p_k)]^{n_k}$ essendo $(\theta(2), \theta(3), \dots)$ una qualsiasi permutazione della successione dei numeri primi.

Un esempio anche molto interessante ed istruttivo è quello del sistema $[R, \times, <]$. Una base logica di questo sistema può essere costituita da qualsiasi numero reale diverso da 0, 1 e -1 . Gli automorfismi sono tutte le trasformazioni θ dalla forma $\theta(x) \equiv \frac{x}{|x|} \cdot |x|^c$ con c reale, diverso da 0. —

⁽¹⁾ In generale, tutti i risultati ottenuti dal KLEIN e dal POINCARÉ nella sistemazione delle geometrie mediante il concetto di gruppo si possono citare qui come esempi.

⁽²⁾ Un altro sistema che ammette una base infinita minima è lo spazio hilbertiano. Invece, il corpo dei numeri algebrici non ammette nessuna base minima. Finalmente, i sistemi $[R, +]$, $[R, \times]$ ammettono basi minime con la potenza del continuo, se si accetta il principio di ZERMELO.

Osserviamo ora che *il primo teorema fondamentale si estende senz'altro al caso in cui si tratti di basi logiche costituite da predicati* e che proprio sotto questa forma generale interviene nello stabilimento dei risultati ulteriori. D'altra parte, come vedremo, si ha sempre la possibilità di trovare una base logica finita costituita da predicati di tipo 1.

Esempi. — Riprendiamo il sistema $[R, \times, <]$. Una base logica di tale sistema può essere costituita dall'operatore $+$, il quale soddisfa alle seguenti proprietà:

$$[1] \quad (x + y) + z \equiv x + (y + z) \qquad [4] \quad x < y \cdot \subset \cdot x + u < y + u$$

$$[2] \quad x + y \equiv y + x \qquad [5] \quad \bigcap_{x, z} \bigcup_y (x + y = z)$$

$$[3] \quad x \times (y + z) \equiv x \times y + x \times z$$

Ma queste proprietà rappresentano il *massimo* che si possa dire sull'addizione, usando i soli concetti di \times e $<$; cioè, se al posto di $+$ mettiamo una variabile operatoria φ , e se rappresentiamo con $\Gamma(\varphi)$ la congiunzione di tali proprietà, avremo in Γ il predicato irriducibile che ammette $+$ come soluzione. Le soluzioni di Γ , ovvero, le operazioni *binarie, univoche, associative, commutative, distributive rispetto alla moltiplicazione, monotone ed invertibili*, saranno allora tutte le operazioni φ date dall'espressione $x \varphi y \equiv \theta(\theta^{-1}(x) + \theta^{-1}(y))$ dove θ rappresenta un operatore della forma indicata nell'esempio precedente (cioè, un automorfismo). Si vede intanto come il concetto di addizione non costituisca una base logica *comoda* per la determinazione degli automorfismi del sistema $[P, \times, <]$; ma nondimeno si è risolto un problema interessante.

Ugualmente suggestivo il caso corrispondente nel sistema $[N^*, \times]$ dove la base logica infinita $\{2, 3, 5, \dots\}$ può essere sostituita con la base finita $\{+\}$. Questi due esempi bastano per dare un'idea di quanto feconda potrebbe riuscire in Analisi funzionale il punto di vista qui introdotto, oltre quanto finora si è fatto nel campo dell'integrazione logica delle equazioni differenziali.

18. IL SECONDO TEOREMA FONDAMENTALE. — Questo teorema si enuncia nel modo seguente: *Dati un sistema $[U; \mathcal{P}]$ ed un predicato α sopra U , condizione necessaria e sufficiente perchè α sia logicamente esprimibile, in senso largo, nei predicati \mathcal{P} , è che rimanga invariante per tutti gli automorfismi del sistema ⁽¹⁾.*

La dimostrazione si basa sull'ipotesi seguente: Dato un sistema $[U; \mathcal{P}]$, è sempre possibile determinare una base logica di U , costituita da un numero *finito* di predicati di tipo 1. Perchè tale ipotesi si potesse considerare legittima, basterebbe ammettere il principio di ZERMELO. Questo però non è necessario. Infatti non vi sono insiemi infiniti, tra quelli considerati in Matematica, che non si possano mettere in corrispondenza biunivoca con insiemi costruiti, in ultima analisi, a partire dai numeri interi o, più generalmente, a partire da una classe di numeri ordinali; e, in tali condizioni, esistono sempre, naturalmente, predicati di tipo 1, in numero finito, che rendono logicamente individuabili, almeno in senso largo, tutti gli elementi dell'insieme.

In particolare, si può dire che, se il predicato α , che rimane invariante per tutti gli automorfismi del sistema considerato, è logicamente esprimibile, in senso normale, nei predicati di base β_1, \dots, β_n , e se, inoltre, il predicato irriducibile che ammette il complesso $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ come soluzione è logicamente esprimibile, in senso normale, nei predicati \mathcal{P} , lo stesso si potrà dire rispetto al predicato α .

Conseguenze immediata di questo teorema: I) *Qualunque sistema matematico è univocamente determinato dal suo gruppo di automorfismi; cioè, due sistemi sono identici se, e soltanto se, coincidono i rispettivi gruppi di automorfismi.* II) *In qualunque sistema $[U; \mathcal{P}]$, la chiusura logica di ogni sotto-insieme A di U è costituita da quegli elementi di U che rimangono fissi per tutti gli automorfismi del sistema che lasciano fissi gli elementi di A .*

Il secondo di questi corollari generalizza una ben nota proposizione della teoria di GALOIS. La reciproca sarebbe questa: Ad ogni

⁽¹⁾ Questa teorema è di solito ammesso, *intuitivamente*, in campi particolari (geometrici, topologici, ecc.), ma senza dubbio la questione richiedeva un'analisi rigorosa.

sotto-gruppo \mathfrak{H} del gruppo degli automorfismi corrisponde un insieme V logicamente chiuso nel sistema, in modo che il gruppo degli automorfismi che lasciano fissi gli elementi di V sia precisamente il gruppo \mathfrak{H} . Questa, però, è la sola proposizione fondamentale della teoria di GALOIS che non si riesce a generalizzare qui. Vedremo nell'ultimo numero quale è la proposizione che la sostituisce nel caso generale.

19. DETERMINAZIONE DEGLI IPERISOMORFISMI DI UN INSIEME. GRUPPO DI GALOIS DI UN INSIEME NORMALE. — Dato un sistema $[U; \mathfrak{P}]$, siano: A un sotto-insieme di U , B un sotto-insieme di A e $\{a_i\}$ una base logica di A/B . Sia d'altra parte ρ il predicato irriducibile in B che ammette \bar{a}_i come soluzione. Allora è facile vedere come gli iperisomorfismi di A che lasciano fissi gli elementi di B si possano ottenere in modo analogo a quello indicato, nel primo teorema fondamentale, per gli automorfismi del sistema. Se, in particolare, A è logicamente chiuso nel sistema, e se tutte le soluzioni di ρ appartengono ad A , si può anche dire che le immagini di A , per mezzo di quegli iperisomorfismi, coincidono tutte con A ; ed in tale ipotesi questo insieme si dirà *normale rispetto a B* , nel sistema considerato. Allora, sarà naturale chiamare *gruppo di Galois* di A/B il gruppo degli iperautomorfismi di A che lasciano fissi gli elementi di B . Dalla definizione risulta che, se A è normale rispetto a B ed α è un predicato irriducibile in B , che ammetta una soluzione in A , allora tutte le soluzioni di α saranno contenute in A .

Si può ancora dimostrare che: *Ogni iperisomorfismo tra due sotto-insiemi di un sistema è prolungabile in un automorfismo del sistema.* Quindi: *Le coppie di insiemi iperisomorfi in un sistema non sono altro che le coppie di insiemi indiscernibili in tale sistema.*

Si dimostra inoltre che: *Dati un sistema $[U; \mathfrak{P}]$, un sotto-insieme A di U ed un sotto-insieme B di A , se θ rappresenta una delle trasformazioni del gruppo di Galois di U/B , e \mathfrak{H} il gruppo di Galois di U/A , allora $\theta \mathfrak{H} \theta^{-1}$ sarà il gruppo di Galois di U rispetto a $\theta(A)$.* Quindi: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un sotto-insieme A di U sia normale rispetto ad un suo sotto-insieme B è che il gruppo di Galois di U/A sia un sotto-gruppo invariante del gruppo di Galois di U/B .*

Inoltre: *Dati un sistema $[U; \mathfrak{P}]$ e tre sotto-insiemi di U , $C \subset B \subset A$, tali che A sia normale rispetto a B e B normale rispetto a C , e rappresentando con \mathfrak{G} , \mathfrak{G}' , \mathfrak{H} rispettivamente, i gruppi di Galois di A/C , A/B , B/C , allora si avrà $\mathfrak{H} \cong \mathfrak{G}/\mathfrak{G}'$.*

Questi risultati vanno ancora esaminati dal punto di vista dei due concetti di definizione logica, e si possono estendere, mediante un concetto adeguato di *famiglie normali di predicati*.

20. GRUPPO DI GALOIS DI UN PREDICATO. DECOMPOSIZIONE DI UN PREDICATO IN UNA SOMMA LOGICA DI PREDICATI IRRIDUCIBILI. – Dati un sistema $[U; \mathfrak{P}]$ e un sotto-insieme A di U , siano α un predicato di tipo 1, determinato in A , e V la chiusura logica dell'insieme A , ampliato con tutti gli elementi che compongono le soluzioni di α . Allora è facile vedere come V sia normale rispetto ad A ; in tali condizioni sarà naturale dire che il gruppo di Galois di V/A è anche il *gruppo di Galois* del predicato α rispetto ad A , il quale può venire adesso concepito come gruppo di trasformazioni sulle soluzioni di α .

Fra altre, si può stabilire la seguente generalizzazione di un noto risultato della teoria di Galois: *Dati un sistema $[U; \mathfrak{P}]$ ed un sotto-insieme A di U , ogni predicato di tipo 1, determinato in A , è univocamente decomponibile in una disgiunzione di predicati irriducibili in A , ciascuno dei quali ha come soluzioni gli elementi di una delle cellule di transitività determinate sull'insieme delle soluzioni di α , dal suo gruppo di Galois rispetto ad A .*

21. L'ORGANIZZAZIONE DI UN SISTEMA DEDOTTA DAL GRUPPO DEGLI AUTOMORFISMI. SISTEMI AUTONOMI E SISTEMI DI WIENER. – Consideriamo il problema seguente: *Dato un gruppo \mathfrak{G} di trasformazioni biunivoche di un insieme U in sè stesso, determinare una famiglia \mathfrak{P} di predicati sopra U in modo che il gruppo degli automorfismi di $[U; \mathfrak{P}]$ sia precisamente \mathfrak{G} ⁽¹⁾. Il problema è sempre risolubile, dacchè si ammetta l'ipo-*

⁽¹⁾ Caso particolare di questo, è il problema della determinazione di una geometria, partendo da un dato gruppo di Lie.

tesi formulata nel n. 17. In effetti, sia $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ una famiglia finita di predicati di tipo 1, nei quali tutti gli elementi di U siano logicamente esprimibili, anche in senso largo, e rappresentiamo con Γ il predicato (di tipo 2) che ha per soluzioni tutti i complessi in cui è trasformato il complesso $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, da tutte le trasformazioni del gruppo \mathcal{G} ; allora, il sistema cercato sarà manifestamente il sistema $[U, \Gamma]$. Bisogna inoltre osservare che il problema è anche determinato, in questo senso che uno stesso gruppo non può dare origine a più sistemi distinti. Converrà soltanto cercar di ridurre i predicati primitivi a un numero minimo di predicati di tipo ed ordine minimi. Tuttavia, si presentano casi in cui non è possibile ridurre tutti i predicati al tipo 1: così avviene, per esempio, con gli spazi topologici cartesiani a più dimensioni, i cui gruppi di automorfismi sono ω -transitivi, cioè, tali che, dati due complessi di n elementi fondamentali, esiste sempre un automorfismo che trasforma l'uno nell'altro (sono quindi indiscernibili), mentre lo stesso fatto non si verifica tra due complessi numerabili. *Ma è già rilevante il fatto che qualunque sistema sia definibile con numero finito di predicati di tipo non superiore a 2.*

In particolare, dati un sistema $[U; \mathcal{P}]$ e un sottogruppo \mathcal{H} del suo gruppo di automorfismi, esisterà sempre una famiglia di predicati di tipo non superiore a 2, che, aggiunti ai predicati primitivi \mathcal{P} , riducano ad \mathcal{H} il gruppo degli automorfismi del sistema. Questa è la proposizione che sostituisce quell'altra, della teoria di GALOIS, cui abbiamo accennato nel n. 18.

Cercando ora di risolvere il problema anteriore in modo più stretto, si ottiene il seguente risultato: *Dato un gruppo \mathcal{G} di trasformazioni biunivoche di un insieme U in se stesso, condizione necessaria e sufficiente perchè \mathcal{G} sia il gruppo degli automorfismi del sistema $[U, \mathcal{G}]$ è che non sia sottogruppo invariante di nessun gruppo distinto da \mathcal{G} .* Chiameremo *autonomi* i sistemi che soddisfano a questa condizione. Una famiglia importante di sistemi autonomi è quella dei sistemi topologici che chiameremo di WIENER: *Sistema di Wiener* sarà qualunque sistema matematico $[U; \mathcal{P}]$ che coincida col sistema topologico $[U, \mathfrak{f}]$, dove \mathfrak{f} rappresenta la famiglia degli insiemi logicamente chiusi nel sistema $[U; \mathcal{P}]$. Determinare una condizione necessaria e sufficiente cui debba soddisfare il gruppo \mathcal{G} , perchè il sistema $[U, \mathcal{G}]$ sia un sistema di WIENER, ecco il punto sostanziale del problema di WIENER,

enunciato qui in nuovi termini⁽¹⁾. Una condizione necessaria è quella che riguarda i sistemi autonomi; condizione che avevo già trovata, per via diversa, in un mio lavoro sul problema di WIENER⁽²⁾. Ma tale condizione non è sufficiente.

Esempi. – Ogni spazio geometrico affine è un sistema di WIENER, in cui la famiglia degli insiemi logicamente chiusi è costituita dalle varietà lineari. Invece, gli spazi euclidei sono sistemi autonomi, ma non sono sistemi di WIENER, dato che, in loro, la famiglia degli insiemi logicamente chiusi è ancora costituita dalle varietà lineari. Finalmente, gli spazi metrici euclidei non sono più sistemi autonomi, dato che il gruppo delle congruenze è sempre un sotto-gruppo invariante del gruppo delle similitudini.

⁽¹⁾ FRÉCHET, *Les espaces abstraits*, pagg. 196-201. N. WIENER, *Limit in terms of continuous transformations*, (Bull. Soc. Math. France, t. 150, 1922, pagg. 51-62).

⁽²⁾ *Les ensembles fermés et le problème de Wiener*, (Portugaliae Math., vol. 3, 1942, pagg. 124-131).

BIBLIOGRAFIA

I. - SUI FONDAMENTI DELLA MATEMATICA IN GENERALE

- BERNAYS P., *Sur le platonisme dans les mathématiques*, « Ens. math. », t. 34 (1935), pagg. 52-69.
- *Quelques points essentiels de la metamathématique*, Ibid., pagg. 70-96.
- HILBERT D. und ACKERMANN W., *Grundzüge der theoretischen Logik*. Springer. Berlino, 1928.
- HILBERT D. und BERNAYS P., *Grundlagen der Mathematik*, Berlino, Springer, 1934.
- LEWIS and LANGFORD, *Symbolic Logic*, 1932.
- LUKASIEWICZ und TARSKI, *Untersuchungen über den Aussagenkalkül*, « C. R. Soc. et Lettres de Varsovie », cl. III, 1930, pagg. 30-50.
- PEANO G., *Le formulaire de mathématique*, Parigi, 1901 ed ed. succ.
- *Arithmetices principia novo methodo exposita*, Augustae Taurinorum, 1889.
- WITEHEAD and RUSSELL, *Principia mathematica*, Cambridge, 1^a ed., 1910; 2^a ed. 1925-1927.

II. - SUI PROCESSI DI DEFINIZIONE LOGICA

- ACKERMANN W., *Zum Hilbertschen aufbau der reellen Zahlen*, « Math. Ann. », t. 99 (1928), pagg. 118-135.
- BOREL E., *Leçons sur la Théorie des fonctions*, 3^a ed. con appendici, Paris, Gauthiers-Villars, 1928.
- CHURCH A., *The constructive second number class*, « Bull. Ann. Math. Soc. », vol. 44, 1938, pag. 224.
- CHURCH A. and KEENE S. C., *Formal definitions in the theory of ordinal numbers*. « Fundamenta Mathematicae », vol. 28 (1937), pag. 11.
- HILBERT D., *Über das Unendliche*, « Math. Ann. », t. 95 (1925), pagg. 161-190.
- *Über den Zahlbegriff*, « Jahresber. Deutsch. Math. Verein », t. 8 (1900).

- KLEENE S. C., *General rekursive functions of natural numbers*, « Math. Ann. », vol. 112 (1935-1936), pagg. 727-742.
- *On definability and recursiveness*, « Duke math. », vol. 2 (1937), pagg. 153-163.
- LEBESGUE H., *Sur les fonctions représentables analytiquement*, « Journal de Mathématiques », 1905, pagg. 139-219.
- LUSIN N., *Leçons sur les ensembles analytiques*, Paris, Gauthiers-Villars, 1930.
- VON NEUMANN J., *Über die Definition durch transfinite induktion*, « Math. Ann. », t. 99 (1928), pagg. 373-391.
- PETER R., *Über die Zusammenhang der Begriffe der rekursiven Funktionen*, « Math. Ann. », t. 110 (1934), pag. 612.
- *Konstruktion nicht rekursiver Funktionen*, « Math. Ann. », t. III (1935), pag. 43.
- TURING A. M., *Computability and definability*, J. Symb. Log., vol. 42 (1936-37), pagg. 153-163.

III. — SUI FONDAMENTI DELLA GEOMETRIA

- CARTAN E., *La Géométrie et la théorie des groupes*, Encyclopédie Française, I, 88-12.
- ENRIQUES F., *Principes de la Géométrie*, « Encyclopédie des sc. math. », t. III, pag. 1.
- HILBERT D., *Grundlagen der Geometrie*, 7 ed. con appendici, Berlino, e Lipsia Teubner, 1930.
- KLEIN F., *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlino, Springer, 1921, t. I.
- PASCH u. DEHN, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Berlino, Springer, 1926.
- PEANO G., *I principii della Geometria logicamente esposti*, Torino, 1889.
- POINCARÉ H., *La science et l'hypothèse*, Parigi, Flammarion, 1903.
- VEBLEN O., *A system of axioms for Geometry*, « Trans. of the Amer. Math. Soc. », t. 5 (1904), pagg. 343-384.
- VERONESE G., *Fondamenti di Geometria*, Padova, 1891.

IV. - SULLA TOPOLOGIA ASTRATTA

ALEXANDROFF P. und HOPF H., *Topologie*, Berlin, Springer, 1935.

FRECHET M., *Les espaces abstraits*, Paris, Gauthiers-Villars, 1928.

KURATOWSKI, *Topologie I*, Monografia matematyczna, Warszawa, Lwow, 1933.

PONTRJAGIN, *Topological groups*.

WIENER N., *Limit in terms of continuous transformations*, « Bull. Soc. Math. France, t. 155 (1922), pagg. 51-62.

V. - SULL'ALGEBRA ASTRATTA

BIRKHOFF G. and MACLANE, *A survey of modern Algebra*.

DEURING M., *Algebren*, (Ergebnisse der Mathematik, Band IV, Heft I), V, 143, Seiten, 1935.

VAN DER WAERDEN B. L., *Moderne Algebra*, 2 vol., 2 ed. 1937, Berlino, Springer.

— *Gruppen von linearen Transformationen* (Ergebnisse der Mathematik), Band. IV, Heft. 2, III, 91, Seiten, 1937.