PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 12

1 9 5 3

Publicação subsidiada por

Publication subventionnée par   Publication sponsored by

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA e SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Edição de

«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua Serpa Pinto, 17, 4.º-E.
LISBOA (PORTUGAL)

HERMANN & C.ie, Éditeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5eme)

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 12 — fasc. 1 — 1953

SUI FONDAMENTI DELLA TEORIA DEI FUNZIONALI ANALITICI*

DI J. SEBASTIÃO E SILVA
Lisbona

In vari lavori precedenti (v. [25], [26] e [27]) abbiamo proposto una nuova sistemazione della teoria dei funzionali analitici, con lo scopo dominante di subordinarla agli schemi astratti della moderna Analisi funzionale. Abbiamo pensato che, in questo modo, sarebbe stato possibile non solo semplificare notevolmente la trattazione di detta teoria, ma soprattutto renderla più maneggiabile e, quindi, più facilmente sviluppabile.

È ovvio che una siffatta impostazione non potrebbe in nessun modo svalutare l'opera, ormai consacrata, del Prof. L. FANTAPPIÈ, quale creatore della teoria stessa e, anzi, i fatti sono venuti a dimostrare che il nuovo punto di vista ha contribuito a mettere in luce i pregi della teoria — la sua bellezza e la sua vera portata. Parecchi matematici, la cui opera si è svolta in un piano più astratto, hanno qui trovato ora uno splendido campo applicativo, ricco di suggerimenti, di problemi interessanti ed di connessioni feconde con altre teorie di grande interesse e attualità, come, per esempio, la teoria delle distribuzioni di SCHWARTZ (v. [23]).

Ma contemporaneamente si è palesata una volta ancora, in modo eloquente, l'efficacia, il potere semplificatore e la fecondità delle idee e dei metodi dell'Analisi generale. In questo caso, è alla teoria degli spazi vettoriali topologici, più generale di quella degli spazi di BANACH, che bisogna chiedere l'aiuto.

Intanto, bisogna sottolineare che il nostro scopo iniziale non era stato interamente raggiunto nei lavori [25], [26], [27]. Prima di tutto, abbiamo puntato sul concetto di «regione funzionale lineare» di FANTAPPIÈ, avendo osservato come il nucleo della teoria — cioè lo studio locale dei funzionali — si possa sviluppare completamente partendo da quel concetto, senza presupporre l'intero spazio funzionale di FANTAPPIÈ.

* Ricevuto il 3 settembre 1952.

Abbiamo allora introdotto il nostro concetto di «spazio funzionale analitico», che conviene qui richiamare. Rappresentando con Ω il piano-sfera della variabile complessa e con C un sotto-insieme chiuso di Ω, non vuoto e distinto da Ω, la regione lineare (C) di FANTAPPIÈ è la famiglia delle funzioni localmente analitiche, il cui dominio contiene C (e che si annullano nel punto ∞, se questo appartiene a C). Se poi conveniamo di chiamare *equivalenti rispetto a* C due date funzioni $f_1, f_2 \in (C)$, quando esista un'altra funzione $f_3 \in (C)$ della quale f_1, f_2 siano prolungamenti, risulta definita in (C) una partizione in classi di equivalenza; ed è l'insieme di queste classi, munito di naturali nozioni di «somma», di «prodotto per scalari» e di «limite», che abbiamo chiamato *lo spazio funzionale analitico determinato dall'insieme* C, per il quale abbiamo adottata la notazione $\mathfrak{F}[C]$.

In [27] abbiamo studiato la topologia che viene determinata nell'insieme $\mathfrak{F}[C]$ quando si definisce «aderenza di un insieme di punti» nel modo consueto: «Dati un punto $\mathfrak{p}$ e un insieme $\mathfrak{X}$, si dice che $\mathfrak{p}$ appartiene all'*aderenza* di $\mathfrak{X}$ (in simboli, $\mathfrak{p} \in \overline{\mathfrak{X}}$), quando esista per lo meno una successione $(\mathfrak{p}_n)$ di elementi di $\mathfrak{X}$, convergente a $\mathfrak{p}$».

Ma questa definizione presenta subito un inconveniente: non si ha «$\overline{\overline{\mathfrak{X}}} = \overline{\mathfrak{X}}$, qualunque sia $\mathfrak{X} \in \mathfrak{F}[C]$» e perciò la somma $\zeta_1 + \zeta_2$ non riesce una funzione continua della coppia (ζ_1, ζ_2) rispetto alla topologia considerata. Vi sarebbe allora un'altra via da prendere: se conveniamo di dire che un insieme è *chiuso*, quando lo sia rispetto all'operazione di limite, e se definiamo l'aderenza di $\mathfrak{X}$ come il minimo insieme chiuso contenente $\mathfrak{X}$, la condizione «$\overline{\overline{\mathfrak{X}}} = \overline{\mathfrak{X}}$» è senz'altro verificata.

Ma non abbiamo potuto, per circostanze varie, proseguire le nostre ricerche in questo indirizzo. Dobbiamo qui esprimere la nostra viva gratitudine al Prof. G. KÖTHE per gli stimoli e le indicazioni bibliografiche che ci ha amichevolmente concessi, dopo aver letto i nostri lavori. Egli stesso è poi riuscito a superare, nel modo più elegante, le difficoltà che abbiamo trovate, adoperando lo strumento più adatto a questo fine — *la teoria degli spazi vettoriali topologici localmente convessi* — e sfruttando idee contenute in notevoli lavori suoi e di DIEUDONNÉ-SCHWARTZ. Si è compiuto allora un progresso decisivo per raggiungere lo scopo cui abbiamo prima accennato: quello cioè d'inquadrare la teoria dei funzionali analitici nella moderna Analisi funzionale. Il KÖTHE, applicando il suo metodo generale dei limiti induttivi di spazi localmente convessi (estensione di quello corrispondente di DIEUDONNÉ e SCHWARTZ), introduce nell'insieme $\mathfrak{F}[C]$ una topologia τ, che lo rende uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Dalla sua analisi

risulta poi che τ *è precisamente la topologia determinata in* $\mathfrak{F}[C]$ *dalla famiglia degli insiemi che sono chiusi rispetto all'operatore di limite ivi introdotto.* E quindi possiamo affermare, con base in quello che abbiamo stabilito in [27], che *l'insieme* $\mathfrak{F}[C]$, *con la topologia* τ, *è lo spazio quoziente della regione funzionale lineare* (C) *(con la topologia di Fantappiè) per la relazione d'equivalenza definita in* (C) — l'espressione «spazio quoziente» essendo qui adoperata nel senso usuale. Ma bisogna definitivamente rinunciare alla possibilità di una metrica. (Di tutto questo ci occuperemo più minutamente nel § 1).

Il fatto centrale stabilito dal KÖTHE in [21] è questo: che il duale forte dello spazio $\mathfrak{F}[C]$ è isomorfo alla famiglia delle funzioni localmente analitiche di dominio $\Omega - C$, munita della topologia della convergenza uniforme sulle parti chiuse di $\Omega - C$, e che viceversa, il duale forte di questo spazio è isomorfo a $\mathfrak{F}[C]$. È tuttavia da rilevare che una parte importante dei risultati presentati in [21] sono stati ottenuti contemporaneamente e in modo indipendente da C. SILVA DIAS in [8] e da A. GROTHENDIECK (1). In particolare, la topologia τ è stata introdotta, pure in modo indipendente, da L. VAN HOVE in [14].

Il lavoro [8] del SILVA DIAS si svolge secondo un punto di vista un po' diverso da quello di KÖTHE in [22], con larga applicazione della teoria degli spazi vettoriali topologici; esso appare come naturale continuazione di ricerche dell'autore e anche di L. NACHBIN, che nel 1946, movendo da considerazioni diverse dalle nostre, è pervenuto anche lui al concetto di spazio funzionale analitico, quale insieme di classi di funzioni equivalenti, dotato di nozione di limite (vedi [19] e NOTE FINALI, I).

E non bisogna mai dimenticare che il germe di questo nuovo indirizzo di ricerche si trova nelle Note [4] e [5] di CACCIOPPOLI, più volte citate nei nostri lavori precedenti.

Tuttavia, la nuova sistemazione della teoria dei funzionali analitici non si può considerare ancora totale, in quanto riguarda solamente lo studio degli operatori funzionali definiti in sotto-insiemi di regioni lineari. Ora, bisogna pure ammettere l'esistenza di funzionali analitici definiti in regioni dello spazio $\mathfrak{S}$ di FANTAPPIÈ *che non siano contenute in regioni lineari.*

Nel § 2, dedicato specialmente allo studio del prolungamento analitico dei funzionali, cerchiamo di mostrare che la considerazione

(1) Non abbiamo ancora letto il lavoro di GROTHENDIECK su questo argomento. Sappiamo soltanto che esso verrà pubblicato in «J. f. reine u. angew. Math.»

dell'intero spazio $\mathfrak{S}$ non è affatto necessaria per questo studio e che, anzi, la topologia di FANTAPPIÈ si rivela poco maneggiabile anche in questo punto([1]); difatti, il principio dell'unicità del prolungamento analitico a regioni connesse non è più vero, quando il concetto di connessione vien definito in $\mathfrak{S}$ nel modo corrente; ci vogliono certe restrizioni per rendere qui valido quel principio. Invece, la teoria del prolungamento analitico può essere svolta senza grandi ostacoli considerando, in luogo dello spazio $\mathfrak{S}$, la molteplicità degli spazi $\mathfrak{F}[C]$ (con C variabile); i risultati così ottenuti sono, in certo senso, più generali e più suggestivi di quelli conseguiti col metodo precedente. Il fatto centrale in questa analisi è il teorema (10.2), nel quale si congiungono due ordini diversi di considerazioni, che rimanevano indistinti nella trattazione di FANTAPPIÈ, e cioè:

1.° *Lo studio del prolungamento di funzionali lineari continui, da uno spazio* $\mathfrak{F}[C]$ *ad un altro spazio* $\mathfrak{F}[C^*] \supset \mathfrak{F}[C]$ — tipico problema di Analisi funzionale lineare che, in questo caso, si riconduce interamente allo studio del prolungamento analitico di funzioni olomorfe di variabile complessa (le funzioni indicatrici di detti funzionali).

2.° *Lo studio del prolungamento di funzionali analitici fra regioni di uno stesso spazio* $\mathfrak{F}[C]$ — cioè la questione del prolungamento analitico vera e propria, inquadrabile nella teoria generale delle funzioni analitiche in spazi vettoriali localmente convessi e non riducibile allo studio di funzioni olomorfe di variabile complessa.

Si deve intanto sottolineare che i due indirizzi di ricerca cominciano qui a divergere in modo sostanziale, sicché i risultati ottenuti in ciascuno di essi non sempre riescono esprimibili in termini dell'altro.

Nel § 3 riprendiamo la questione della continuità delle operazioni analitiche nel senso di FANTAPPIÈ. Ci voleva un chiarimento completo di questo punto, che avevamo appena sfiorato in [25] e che perciò ha lasciato luogo a qualche dubbio. *In particolare, siamo riusciti a estendere il nostro risultato iniziale al caso in cui il controdominio dell'operazione funzionale è contenuto in uno spazio* $\mathfrak{F}[C]$. La teoria della dualità negli spazi $(\mathscr{F})$ e $(\mathscr{LF})$, bello e poderoso strumento sviluppato da DIEUDONNÉ e SCHWARTZ, ci offre adesso la possibilità di spingere più lontano lo studio generale delle operazioni analitiche in questo campo.

([1]) Rileviamo intanto che la topologia definita in $\mathfrak{F}[C]$ è dedotta da quella di FANTAPPIÈ secondo il metodo generale inerente al concetto di spazio quoziente. Così, se vi è un progresso (come crediamo), questo si deve più che altro all'identificazione eseguita nella regione lineare (C).

Infine, nel § 4 si fanno i primi assaggi di uno studio sistematico degli operatori lineari negli spazi funzionali analitici, per quanto riguarda specialmente l'inversione di detti operatori. L'analisi spettrale in questo campo si annunzia assai più complessa dell'analisi corrispondente per le algebre di Banach.

Come applicazione, si riprende il *calcolo simbolico di Fantappiè* nel caso degli operatori definiti in uno spazio funzionale analitico; questo tipo di calcolo operazionale viene formulato in (**19.2**) in un modo che ci sembra del tutto semplice ed espressivo (1). La formula integrale ivi riportata—simile a quella di Cauchy—acquista ora significato anche rispetto alla *topologia della convergenza uniforme degli operatori sulle parti limitate dello spazio funzionale* (precisamente come nel caso degli spazi di Banach) (2). Certo, questa formula è sostanzialmente la stessa che ricorre nela trattazione di FANTAPPIÈ (v. [16] e [17]); ma lì appare sotto *forma implicita*, perché non si era fatta ancora una messa a punto delle questioni topologiche e, in particolare, dei fatti di convergenza (3). Solo nel caso delle matrici finite essa prendeva la *forma esplicita,* che poi è stata estesa da N. DUNFORD e da A. E. TAYLOR al caso degli operatori definiti in spazi di Banach (v. [11], [31] e [18], p. 116-124).

§ 1. LA QUESTIONE TOPOLOGICA

In questo paragrafo si tratta soltanto di fare una precisazione delle nostre considerazioni svolte in [27], tenendo conto dei progressi compiuti in [8] e [22]. Dobbiamo per questo passare di nuovo in rivista alcuni concetti generali di Topologia. Vengono omesse le dimostrazioni, tutte elementari. Il lettore che stia al corrente delle indagini eseguite nel nuovo indirizzo può passare rapidamente su questo paragrafo.

1. Topologie associate ad un operatore di convergenza. Per comodità di esposizione, chiamaremo qui *spazio topologico in senso largo* ogni sistema $[U, \Phi]$, costituito da un insieme U e da un operatore Φ, che faccia corrispondere ad ogni insieme $A \subset U$ un insieme $\Phi(A) \subset U$,

---

(1) Per funzioni di una sola variabile. L'estensione al caso delle funzioni di più variabili non presenta difficoltà concettuali (v. [25] e [26]).

(2) Rileviamo intanto che, contrariamente a ciò che avviene per gli spazi di Banach, quando si tratta di *successioni* di operatori, la convergenza puntuale implica la convergenza uniforme sulle parti limitate di $\mathfrak{F}[C]$!

(3) Si deve per altro rilevare che la nuova giustificazione del calcolo simbolico impiega sostanzialmente gli stessi ragionamenti del FANTAPPIÈ, anche se notevolmente semplificati.

chiamato *l'aderenza* di A, in modo che siano verificate le condizioni: $\bar{\mathrm{I}})\ A \subset \Phi(A)$; $\overline{\mathrm{II}})\ \Phi(A \cup B) \subset \Phi(A) \cup \Phi(B)$; $\overline{\mathrm{III}})\ \Phi(O) = O$. Se inoltre riesce verificata la condizione

$$\overline{\mathrm{IV}})\ \Phi(\Phi(A)) \subset \Phi(A),$$

diremo che $[U, \Phi]$ è uno *spazio topologico in senso normale* o *uno spazio di Kuratowski.*

Sia $[U, \Phi]$ uno spazio topologico in senso largo. Si dice che un sotto-insieme X di U è *chiuso* in questo spazio, se riesce $\Phi(X) = X$. Dato un insieme $A \subset U$, consideriamo allora la totalità degli insiemi chiusi in $[U, \Phi]$, che contengono A; l'intersezione di questi insiemi è ancora un insieme chiuso — il minimo insieme chiuso contenente A — che potremo chiamare la *chiusura* di A; se lo rappresentiamo con $\Psi(A)$, resta così definito, nella famiglia dei sotto-insiemi di U, un operatore Ψ, ed è facile vedere che il sistema $[U, \Psi]$ risulta uno spazio topologico in senso normale. Dunque, per un tale spazio potremo usare il termine «chiusura» come sinonimo di «aderenza».

Ricordiamo d'altronde che un insieme U prende il nome di *spazio* (L^*), quando a ciascuna di certe successioni $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ di elementi di U (dette *successioni convergenti*) si fa corrispondere uno, e soltanto uno, elemento p di U — che si rappresenta con $\lim_n p_n$ — in modo che risultino verificate le condizioni: L_1) se $p = \lim_n p_n$ e $k_1 < k_2 < \cdots$, si ha pure $p = \lim_n p_{k_n}$; L_2) se $p_n = p$, qualunque sia n, allora $\lim_n p_n = p$; L_3) se ogni sotto-successione di (p_n) contiene una successione convergente a p, allora $p = \lim_n p_n$.

Sia $[U, \lim]$ uno spazio (L^*). In genere, si introduce in U una struttura topologica partendo dall'operatore lim, mediante la defnizione:

(1.1) Dati $p \in U$ e $A \subset U$, si dice che p è *aderente* ad A [scriviamo allora $p \in \Phi(A)$], quando esiste almeno una successione (p_n) di elementi di A tale che $p = \lim_n p_n$.

Si ottiene così un sistema $[U, \Phi]$, che è uno spazio topologico in senso largo, ma che può non essere uno spazio topologico in senso normale.

Ma possiamo invece partire dalle definizioni:

(1.2) Si dice che un insieme $X \subset U$ è *chiuso* (rispetto all'operatore *lim*), quando X contiene il limite di ogni successione convergente

di elementi di X. Dato un insieme $A \subset U$, chiameremo *aderenza* di A, e rappresenteremo con $\Psi(A)$, l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti A.

Allora, il sistema $[U, \Psi]$ è già uno spazio topologico in senso normale, ed è facile vedere che, se poniamo per induzione trasfinita su α:

$$\Phi^1(A) = \Phi(A), \ \Phi^\alpha(A) = \bigcup_{\lambda<\alpha} \Phi(\Phi^\lambda(A)),$$

si avrà sempre $\Psi = \Phi^{\omega_1}$ dove ω_1 designa il primo ordinale che non è di seconda classe. D'altra parte, ricordiamo che, quando si adotta la definizione (1.1), il concetto di «limite» può esprimersi mediante il concetto di «aderenza» (derivato dal primo) secondo la definizione:

(1.3) Dire che $p = \lim\limits_n p_n$ equivale a dire che, per ogni sotto-successione (q_n) di (p_n), l'elemento p riesce aderente all'insieme $\{q_n\}$.

Oppure, in termini di «intorno»:

(1.4) Dire che $p = \lim\limits_n p_n$ equivale a dire che, ad ogni intorno V di p, corrisponde un ordine ν tale che $p \in V$ per $n > \nu$.

Ebbene, si riconosce senza difficoltà che:

(1.5) *Anche quando si adottano le definizioni* (1.2), *il concetto di «limite» in uno spazio* (L^*) *può esprimersi in funzione del concetto di «aderenza» secondo la definizione* (1.3) *o secondo la definizione* (1.4).

Abbiamo così due maniere diverse d'introdurre una topologia partendo da un dato concetto di limite di successioni. In generale:

(1.5) Chiameremo *topologia associata ad un dato operatore di limite* ogni topologia dalla quale possa dedursi quest'operatore secondo la definizione (1.3) o, il che è equivalente, secondo la definizione (1.4).

Dunque, la topologia definita in U secondo (1.1) e quella definita secondo (1.2) sono tutt'e due topologie associate all'operatore *lim*; anzi, la prima è la più fina topologia in senso largo, e la seconda la più fina topologia in senso normale, fra tutte quelle associate a detto operatore.

È immediato che:

(1.6) *Non può esistere più di una topologia di spazio metrico associata ad un dato operatore di limite e, se ce n'è una, si può sempre introdurla mediante la definizione* (1.1).

Questo risultato si estende al caso delle topologie che possono essere introdotte mediante famiglie numerabili di intorni (cioè, per le quali riesce verificato il cosiddetto *primo assioma della numerabilità*).

Ricordiamo ancora che, per gli spazi (L^*), la nozione di continuità può essere definita in due modi diversi: *nel senso di Heine* (continuità rispetto alla nozione di limite) e *nel senso di Cauchy* (continuità rispetto alla nozione di aderenza). Siano $S_1=[U_1, \lim]$ e $S_2=[U_2, \lim]$ due spazi (L^*) e sia T una trasformazione definita in un insieme aperto A di S_1 e di controdominio B in S_2; allora, tanto nel caso della definizione (**1**.1) quanto nel caso della definizione (1.2) possiamo dire che:

(**1**.7) *Se* T *è continua sull'insieme* A *nel senso di Heine, lo sarà anche nel senso di Cauchy, e viceversa.*

2. Tre concetti di «spazio riunione». Consideriamo una famiglia di spazi topologici in senso largo, $S_i=[U_i, \Phi_i]$, con $i \in \mathfrak{I}$, essendo $\mathfrak{I}$ un qualunque insieme d'indici, e poniamo $U = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} U_i$. Vogliamo introdurre in U un operatore Φ di aderenza, in modo che il sistema $S=[U, \Phi]$ riesca uno spazio topologico in senso largo (lo spazio riunione degli S_i) per il quale sia vera la proposizione:

(**2**.1) *Se* S^* *è uno spazio topologico in senso largo e* T *una applicazione*[1] *di* S *in* S^*, *condizione necessaria e sufficiente perchè* T *sia continua è che la restrizione di* T *ad ogni insieme* U_i *sia continua rispetto a* Φ_i $(i \in \mathfrak{I})$.

È facile vedere come questo problema sia sempre possibile e determinato. La soluzione è data dalla formula:

$$(\mathbf{2}.2) \qquad \Phi(A) = \bigcup_{i\in\mathfrak{I}} \Phi_i(A \cap U_i), \text{ per ogni } A \subset U;$$

cioè, dire che $p \in \Phi(A)$ equivale a dire che p è aderente ad un sotto-insieme di A in uno almeno degli spazi S_i. Allora, non solo la proposizione (**2**.1) è vera, ma possiamo anche estenderla al caso in cui T è un operatore definito in un sotto-insieme X di U e continuo in singolo punto di X.

Da questa definizione risulta che:

---

(1) Adottiamo qui le convenzioni della scuola Bourbaki, usando l'espressione «applicazione T di S in S*» quando il trasformato di S per mezzo di T non coincide necessariamente con S*, e l'espressione «applicazione T di S su S*» nel caso opposto, cioè quando si ha $T(S) = S^*$.

(**2**.3) *Dire che un insieme* X *è chiuso* [*aperto*] *in* S *equivale a dire che* $X \cap U_i$ *è chiuso* [*aperto*] *in* S, *qualunque sia* $i \in \mathfrak{I}$.

Quindi, se introduciamo la condizione che *tutti gli spazi topologici considerati lo siano in senso normale*, il problema è ancora possibile e determinato, ma la soluzione non è più data, in generale, dalla formula (**2**.2), bensì dal concetto d'insieme chiuso definito secondo (**2**.3). Allora, la proposizione (**2**.1) può anche estendersi al caso in cui T è un operatore definito e continuo in un sotto-insieme aperto di U supponendo ora sostituita in (**2**.1) l'espressione «senso largo» con l'altra «senso normale».

Supponiamo finalmente che *tanto il sistema* S_i, *quanto il sistema* S^* *siano spazi vettoriali topologici, localmente convessi,* (1) e che la famiglia $\{S_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ soddisfi le condizioni: 1) dati due spazi S_i, S_j esiste almeno uno spazio S_k contenente $S_i \cup S_j$ $(i, j, k \in \mathfrak{I})$; 2) la somma di due vettori e il prodotto di un vettore per uno scalare non cambiano, quando si passa da un S_i ad un $S_i \supset S_k$. Allora, se si vuole che *anche* S *risulti uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, la cui struttura algebrica sia compatible con quella degli* S_i, *il problema in causa non è sempre possibile; ma, quando possibile, è sempre determinato, essendo la soluzione fornita dal metodo degli involucri assolutamente convessi di* KÖTHE.

Tuttavia, il problema sarà sempre possibile (e la soluzione la stessa) se, in luogo di (**2**.1), vogliamo che sia verificata la condizione:

(**2**.4) *Se* S^* *è uno spazio vettoriale localmente convesso e* T *un'applicazione lineare di* S *in* S^*, *condizione necessaria e sufficiente perchè* T *sia continua è che la restrizione di* T *ad ogni insieme* U_i *sia continua rispetto a* Φ_i $(i \in \mathfrak{I})$.

A proposito di questi concetti viene ancora in mente un'altra questione: Sia $\mathfrak{M}$ un sotto-insieme di $\mathfrak{I}$, soddisfacente la condizione: per ogni $i \in \mathfrak{I}$ vi è almeno un $\mu \in \mathfrak{M}$ tale che $U_i \subset U_\mu$. Si domanda: In quali condizioni possiamo affermare che lo spazio riunione degli S_μ $(\mu \in \mathfrak{M})$ coincide con quello degli spazi S_i $(i \in \mathfrak{I})$, ossia S? Ebbene:

(**2**.5) *Condizione sufficiente perché lo spazio riunione degli* S_μ $(\mu \in \mathfrak{M})$ *coincida con* S, *è che riesca* $\Phi_i(A) \subset \Phi_j(A)$ *ogni qual volta si abbia* $U_i \subset U_j$, *quali che siano* $A \subset U_i$, $i, j \in \mathfrak{I}$.

---

(1) Chamiamo qui *spazio localmente convesso* ogni spazio vettoriale topologico (separato o no, reale o complesso) per il quale esista un sistema fondamentale d'intorni dell'origine costituito da insiemi convessi (v. [10], p. 62).

Se, in particolare, si verifica la condizione: « $\Phi_i(A) = A \cap \Phi_j(A)$ quando $U_i \subset U_j$ », il terzo concetto di «spazio riunione» coincide con quello di «limite induttivo» di DIEUDONNÉ-SCHWARTZ.

Esempio: Sia S uno spazio vettoriale qualunque, senza topologia determinata, e siano S_i $(i \in \mathfrak{I})$ i sotto-spazi vettoriali di S con finite dimensioni, muniti della topologia euclidea. Allora, lo spazio riunione degli S_i, adottando la seconda definizione, è lo spazio S munito della topologia determinata dalla famiglia dei cosiddetti *insiemi finitamente aperti* in S, cioè, degli insiemi che intersecano ogni S_i secondo insiemi aperti in S_i.

NOTA — Il concetto per così dire duale di quello di «spazio riunione» è quello di «spazio intersezione». Riprendiamo la famiglia $\{S_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ nella prima ipotesi e cerchiamo di introdurre in $U_* = \bigcap_{i \in \mathfrak{I}} U_i$ un operatore Φ_* di aderenza, in modo che il sistema $S_* = (U_*, \Phi_*)$ riesca uno spazio topologico in senso largo, per il quale sia vera la proposizione:

Se S' *è uno spazio topologico in senso largo e* T *un'applicazione di* S' *in* S_*, *condizione necessaria e sufficiente perché* T *sia continua rispetto a* S_* *è che lo sia rispetto a ciascuno degli spazi* S_i $(i \in \mathfrak{I})$.

Il problema è sempre possibile e determinato, ma la soluzione non è il concetto definito in [27], p 9, perché allora la condizione $\Psi(A \cup B) = \Psi(A) \cup \Psi(B)$ potrebbe non essere verificata. Il più interessante in questo è che, se vogliamo che tutti gli spazi considerati siano topologici in senso normale, o anche spazi vettoriali localmente convessi, la soluzione è sempre la stessa. Così, avremo un concetto unico di «spazio intersezione» contro i tre di «spazio riunione».

3. Due concetti di spazio quoziente. Consideriamo uno spazio topologico in senso largo, $S = [U, \Phi]$, e supponiamo definita in U una relazione ρ d'equivalenza; si sa che ρ determina una partizione di U in classi d'equivalenza, cioè una famiglia, $\dot{U}$, di sotto-insiemi di U, senza elementi comuni a due a due e la cui riunione è U. Rappresentiamo con $\varkappa$ l'applicazione canonica di U su $\dot{U}$, cioè poniamo:

$$\dot{x} = \varkappa(x), \text{ se e soltanto se } x \in \dot{x}, \text{ con } \dot{x} \in \dot{U}.$$

Proponiamoci ora di introdurre in $\dot{U}$ un operatore $\dot{\Phi}$ in guisa che il sistema $\dot{S} = [\dot{U}, \dot{\Phi}]$ riesca uno spazio topologico in senso largo (lo spazio quoziente di S per ρ) soddisfacente la condizione:

(3.1) *Siano* S^* *uno spazio topologico in senso largo e* T *un'applicazione di* S *in* S^*, *tale che si abbia* $T(x) = T(y)$ *sempre che* $x \rho y$. *Allora, condizione necessaria e sufficiente perché* T *sia continua è che lo*

sia l'applicazione $\dot{\mathrm{T}}$ *di* $\dot{\mathrm{S}}$ *in* S^* *così definita:* $\dot{\mathrm{T}}(\dot{\mathrm{x}}) = \mathrm{T}(\mathrm{x})$, *quando* $\dot{\mathrm{x}} = \varkappa(\mathrm{x})$.

Il problema è sempre possibile e determinato, la soluzione essendo data dalla definizione:

(**3.2**) Si dice che $\dot{a}$ è *aderente* a $\dot{\mathrm{X}}$ in $\dot{\mathrm{S}}$, quando esiste almeno un rappresentante di $\dot{a}$ in S che sia aderente all'insieme dei rappresentanti degli elementi di $\dot{\mathrm{X}}$ in S.

Dalla definizione risulta che:

(**3.3**) *Dire che un insieme* $\dot{\mathrm{X}}$ *è chiuso* [*aperto*] *in* $\dot{\mathrm{S}}$ *equivale a dire che l'insieme dei rappresentanti degli elementi di* $\dot{\mathrm{X}}$ *è chiuso* [*aperto*] *in* S.

Quindi, se introduciamo il requisito supplementare che tutti gli spazi considerati siano spazi topologici in senso normale, il problema è ancora possibile e determinato, essendo la soluzione fornita dal concetto di «insieme chiuso» definito secondo (**3.3**). E si avrà così la definizione usuale di «spazio quoziente».

4. Applicazioni allo spazio funzionale $\mathfrak{F}[\mathrm{C}]$. Consideriamo una regione lineare (C) dello spazio $\mathfrak{S}$ di Fantappiè. Abbiamo richiamato nell'Introduzione come, nell'insieme (C), sia stata da noi definita una relazione di equivalenza. Per indicare che due funzione f_1, $f_2 \in (\mathrm{C})$ sono equivalenti rispetto a C, scriveremo $f_1 \cong f_2$, lasciando sottinteso l'insieme C. Nell'insieme $\mathfrak{F}[\mathrm{C}]$, delle classi d'equivalenza, possiamo poi introdurre una topologia di spazio quoziente, partendo dalla topologia di Fantappiè ristretta a (C). Se adottiamo il criterio (**3.2**), otteniamo una topologia, $\tau^{(0)}$, rispetto alla quale non è verificata la condizione $\overline{\overline{\mathfrak{X}}} = \overline{\mathfrak{X}}$ (v. [27], p. 60-62)(1). Se adottiamo invece il criterio corrispondente a (**3.3**), otteniamo una topologia, $\tau^{(1)}$, per la quale è già verificata detta condizione. Ma, sia nel primo caso che nel secondo, la topologia può essere dedotta da un concetto di convergenza così definito:

(**4.1**) Si dice che una successione (ζ_n) di elementi di $\mathfrak{F}[\mathrm{C}]$ *converge* ad un elemento ζ di $\mathfrak{F}[\mathrm{C}]$, e si scrive $\zeta = \operatorname{Lim}_n \zeta_n$, quando esiste almeno una successione di rappresentanti degli ζ_n in (C), di dominio comune, uniformemente convergenti ad un rappresentante di ζ in (C).

(1) L'abbiamo dimostrato per il caso in cui C è limitato, ma si estende subito all'altro caso. Vedi pure NOTE FINALI, I

Partendo da questo concetto e adottando la definizione (1.1), si ritorna alla topologia $\tau^{(0)}$; adottando invece la definizione (1.2), si ricade nella topologia $\tau^{(1)}$. Comunque, dato che la condizione $\overline{\overline{\mathfrak{X}}}=\overline{\mathfrak{X}}$ non è verificata rispetto alla topologia $\tau^{(0)}$, possiamo subito concludere, applicando (1.6), che

(4.2) *Non esiste topologia di spazio metrico associata all'operatore di convergenza definito secondo* (4.1).

Così, il fatto che $\mathfrak{F}[C]$, con tale definizione di convergenza, non sia uno spazio metrizzabile, è una conseguenza immediata di quanto abbiamo stabilito in [27].

Ma lo spazio $\mathfrak{F}[C]$ può essere pure concepito come riunione di spazi di Banach: Sia A un intorno aperto del piano-sfera e denotiamo con A lo spazio costituito da quegli elementi di $\mathfrak{F}[C]$ rappresentabili da funzioni olomorfe *limitate* in A, e metrizzato con la definizione di norma $\|\varphi\|=\sup\limits_{z\in A}|\varphi(z)|$. Si dimostra che [A] è uno spazio di Banach ed è facile vedere come $\mathfrak{F}[C]$ sia proprio lo spazio riunione di tutti gli spazi [A] così definiti,(1) qualunque sia il punto di vista ammesso: se adottiamo il criterio (2.2), si ottiene la topologia $\tau^{(0)}$; adottando invece il criterio corrispondente a (2.3), si ritorna alla topologia $\tau^{(1)}$.

Ma possiamo anche definire lo spazio riunione secondo il criterio di Köthe cui abbiamo accennato al n. 2: si avrà così una nuova topologia, $\tau^{(2)}$, in $\mathfrak{F}[C]$. Peraltro, il Köthe dimostra in [22] che, *se un insieme* $\mathfrak{X}$ *di elementi di* $\mathfrak{F}[C]$ *è chiuso rispetto all'operatore* Lim *definito secondo* (4.1), *sarà chiuso anche rispetto alla topologia* $\tau^{(2)}$. Siccome, d'altra parte, la topologia $\tau^{(1)}$ è più fina della topologia $\tau^{(2)}$, possiamo concludere che $\tau^{(1)}=\tau^{(2)}$. In particolare, si ha il fatto che abbiamo messo in rilievo nell'Introduzione:

(4.3) *Lo spazio quoziente (nel senso usuale) della regione lineare* (C) *per la relazione* «$\cong$» *è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso (separato), cioè lo spazio funzionale* $\mathfrak{F}[C]$ *munito della topologia* $\tau^{(1)}=\tau^{(2)}$.

Da questo momento in poi, quando parleremo dello spazio funzionale $\mathfrak{F}[C]$, quale spazio vettoriale topologico, *si dovrà intendere che la topologia ivi adottata è* $\tau^{(1)}$.

---

(1) Preferiamo questa rappresentazione dello spazio $\mathfrak{F}[C]$ adottata dal Silva Dias in [8], a quella che avevamo usata in [26] e [27].

Nota — Lo spazio delle funzioni olomorfe nell'insieme aperto $D = \Omega - C$, con la topologia della convergenza uniforme sugli insiemi aperti A tali $\bar{A} \subset D$, non è altro che lo spazio intersezione degli spazi di Banach $[A]$, oppure degli spazi $\mathfrak{F}[\bar{A}]$ muniti della topologia $\tau^{(0)}$ o $\tau^{(1)}$. Si è dimostrato in [8] e [22] che detto spazio è isomorfo al duale forte di $\mathfrak{F}[C]$: lo rappresenteremo con $\mathfrak{G}[D]$. Possiamo anche affermare che lo spazio $\mathfrak{F}[C]$ è lo spazio riunione degli spazi $\mathfrak{G}[\bar{A}]$, essendo A un intorno aperto di C.

§ 2. PROLUNGAMENTO ANALITICO DEGLI OPERATORI FUNZIONALI

Per giungere ad una visione chiara nel confronto che abbiamo intrapreso fra il nuovo punto di vista e quello precedente, nella teoria dei funzionali analitici, non possiamo fare a meno di richiamare, anche in questo paragrafo, qualche nozione di Analisi generale; lo facciamo nei nn. 5, 6 e in parte del n. 8. (I §§ 3, 4 sono indipendenti da questo).

5. Il concetto di connessione in generale (¹). Sia S uno spazio topologico in senso normale. Ricordiamo le definizioni:

(**5.1**) Due insiemi X, Y in S si dicono *collegati* quando esiste un punto dell'uno che è aderente all' altro. Un insieme H in S si dice *connesso*, quando, comunque si decomponga H in due insiemi non vuoti X, Y $(H = X \cup Y)$, questi risultino sempre collegati.

Chiameremo *catena finita di insiemi* ogni successione finita di insiemi dei quali ogni due consecutivi siano collegati. Si possono allora stabilire le proposizioni:

(**5.2**) *Se tutti gli insiemi di una catena finita sono connessi, anche la loro riunione è un insieme connesso.*

(**5.3**) *Perché un insieme* H *sia connesso, è necessario e sufficiente che, per ogni coppia di punti* p, q *di* H, *esista almeno un insieme* M *connesso, contenuto in* H *e contenente* p, q.

Chiameremo *base di insiemi aperti* in S una qualsiasi famiglia $\mathfrak{B}$ di insiemi aperti in S tale che ogni insieme aperto in S si possa ottenere come riunione d'insiemi appartenenti a $\mathfrak{B}$.

(¹) Su questo punto, v. per esempio [1], [3] e [28].

(**5.4**) *Sia* $\mathfrak{B}$ *una base d'insiemi aperti di* S. *Condizione necessaria e sufficiente perché un insieme aperto* A *in* S *sia connesso è che, dati comunque due punti* p, q *di* A, *riesca sempre possibile passare da* p *a* q *mediante una catena finita d'insiemi connessi appartenenti a* $\mathfrak{B}$ *e contenuti in* A.

(Si osservi che due insiemi aperti sono connessi se, e soltanto se, hanno almeno un punto comune).

Ricordiamo d'altra parte il concetto di «linea continua»: Ogni funzione $p=f(t)$, con $o \leqq t \leqq 1$, $p \in \mathrm{S}$, continua nell' intervallo $[0,1]$, si dice *rappresentazione parametrica di una linea continua di* S; due tali funzioni $f(t)$, $g(u)$ vengono considerate rappresentazioni della *stessa* linea continua, qualora si abbia $f(t) \equiv g(\gamma(t))$, essendo γ un'applicazione bicontinua dell'intervallo [0,1] su sé stesso. Poiché i punti di una linea continua formano sempre un insieme connesso, si ha subito da (**5.3**):

(**5.5**) *Sia* H *un insieme di punti di* S. *Se esiste un punto* a *di* H *che possa essere congiunto con qualsiasi altro punto* x *di* H *mediante una linea continua,* $\mathrm{f_x(t)}$ $[\mathrm{f_x(0)=a}, \mathrm{f_x(1)=x}]$, *allora* H *è connesso.*

Rileviamo subito che la reciproca di questa proposizione non è vera, nemmeno negli spazi euclidei. Però, se premettiamo l'ipotesi che l'insieme H sia aperto, la reciproca della proposizione (**5.5**) è già vera in detti spazi.

6. La connessione negli spazi localmente convessi. Sia ora S uno spazio vettoriale topologico localmente convesso (reale o complesso). L'esempio più semplice di una linea continua in S è quello di *segmento rettilineo*: dati due punti a, b di S, il segmento rettilineo di estremi a, b è l'insieme dei punti $a + t(b-a)$, con t variabile su $[0,1]$. Ricordiamo che un insieme H di S si dice *convesso* quando contiene ogni segmento rettilineo di estremi in H. L'insieme H si dice *assolutamente convesso* quando, dati comunque $a, b \in \mathrm{H}$, si ha ancora $\lambda a + \mu b \in \mathrm{H}$, dacché $|\lambda| + |\mu| \leqq 1$.

Tenendo conto di (**5.5**), si vede subito che *in* S *ogni insieme convesso è connesso.*

Dato che, per ipotesi, lo spazio S è localmente convesso, vi sarà in S un sistema fondamentale, $\mathfrak{B}$, d'intorni dell'origine, costituito da insiemi aperti e (assolutamente) convessi, quindi connessi; e lo stesso per ogni punto a di S, che avrà la famiglia $a + \mathfrak{B}$ per sistema fondamentale d'intorni. Chiameremo allora semplicemente *intorni*, nello

spazio S, gli insiemi appartenenti a tutti questi sistemi $a + \mathfrak{B}$ quando a percorre S; gli intorni costituiscono in S una base d'insiemi aperti di questo spazio, tutti quanti connessi. Dunque, da (**5.4**) si ha subito:

(**6.1**) *Condizione necessaria e sufficiente perchè in* S *un insieme aperto* A *sia connesso è che, dati comunque due punti* p, p *di* A, *riesca sempre possibile passare da* p *a* q *mediante una catena finita d'intorni contenuti in* A.

Dicesi *poligonale* in S ogni linea continua di S costituita da un numero finito di segmenti rettilinei.

Da (**6.1**) e dal fatto che gli intorni sono insiemi convessi, si desume che:

(**6.2**) *Condizione necessaria e sufficiente perché in* S *un insieme aperto* A *sia connesso è che, fissati comunque due punti* p, q *in* A, *esista sempre in* A *una poligonale congiungente i punti* p, q.

Si trova così che, negli spazi vettoriali topologici localmente convessi, la reciproca della proposizione (**5.5**) è valida, sotto l'ipotesi che l'insieme A sia aperto.

7. La connessione nello spazio $\mathfrak{S}$ di Fantappiè. Il FANTAPPIÈ definisce il concetto di connessione nel suo spazio $\mathfrak{S}$, in modo diverso da quello abituale, e solo per gli insiemi aperti: Un insieme H aperto in $\mathfrak{S}$ è detto allora *connesso*, quando due punti di H possano sempre congiungersi mediante una linea continua di $\mathfrak{S}$, costituita da un numero finito di archi di linea analitica (1).

Questo concetto di «insieme aperto connesso» è probabilmente più ristretto di quello abituale.

Cerchiamo intanto di vedere come si presenta nello spazio $\mathfrak{S}$ il concetto usuale di connessione.

(**7.1**) Date due funzioni $f_1, f_2 \in \mathfrak{S}$, i cui domini D_1, D_2 abbiano elementi comuni, chiameremo *pseudosegmento di estremi* f_1, f_2, l'insieme costituito dai punti f_1, f_2 e dai punti f tali che $f = f_1^* + t(f_2^* - f_1^*)$, con $0 \leqq t \leqq 1$, ove f_1^*, f_2^* rappresentano, rispettivamente, le restrizioni di f_1, f_2 al dominio $D^* = D_1 \cap D_2$.

Tenendo conto di (**5.2**), si riconosce che:

(**7.2**) *Ogni pseudosegmento di* $\mathfrak{S}$ *è un insieme connesso.*

(1) Vedi [13], n. 13, p. 23-24.

Basta osservare che, nella definizione precedente, i punti $f=f_1^*+$ $+t(f_2^*-f_1^*)$, con $0 \leq t \leq 1$, costituiscono una linea continua di S, mentre f_1^* è aderente a $\{f_1\}$ e f_2^* è aderente a $\{f_2\}$.

Ciò premesso, si dimostra senza difficoltà che:

(**7**.3) *Nello spazio* $\mathfrak{S}$ *ogni intorno è insieme connesso*(1).

Da questo e da (**5**.3) si desume subito che la proposizione (**6**.1) sussiste per lo spazio $\mathfrak{S}$.

8. Il prolungamento analitico negli spazi localmente convessi. Siano R, S due spazi localmente convessi e *separati*. Consideriamo una funzione $F(x)$, definita in un insieme aperto D di R e avente i valori in S. Ricordiamo che la funzione $F(x)$ si dice *analitica secondo Gâteaux* (*G-analitica*) *nell'insieme* D, quando, dati comunque $a \in D$, $h \in R$, il valore di $F(a+th)$, essendo t una variabile complessa, risulta una funzione analitica di t in un intorno del punto $t=0$ (dipendente da a e da h). È valido allora il principio del prolungamento analitico, che possiamo formulare in questo modo:

(**8**.1) *Siano* $F_1(x), F_2(x)$ *funzioni aventi i valori in* S *e analitiche in un insieme* D, *aperto e connesso in* R. *Se queste funzioni coincidono in un intorno* V_0 *di un punto* x_0 *qualsiasi di* D, *essendo* $V_0 \subset D$, *si ha pure* $F_1(x)=F_2(x)$ *per ogni* $x \in D$.

Conviene dare qui una dimostrazione di questo teorema, supponendolo già dimostrato per il caso in cui S è la retta complessa, **K**(2). Osserviamo dapprima che, in conseguenza dell'ipotesi, il punto x_0 può essere congiunto ad ogni punto a di D mediante una catena finita, $V_0, V_1, \cdots, V_n$, d'intorni contenuti in D, che possiamo sempre supporre convessi e aperti. Ragioniamo per induzione: per ipotesi le funzioni $F_1(x), F_2(x)$ coincidono su V_0; vogliamo dimostrare che, se coincidono su V_i, coincideranno pure su V_{i+1} $(i=0, 1, \cdots, n-1)$. Difatti, gli insiemi V_i, V_{i+1}, avranno almeno un punto comune, x_i, il quale può essere congiunto ad ogni altro punto $\bar{x}$ di V_{i+1}, mediante un segmento rettilineo: $x = x_i + t(\bar{x} - x_i)$, $t \in [0, 1]$. Ora, se poniamo $f_1(t) = F_1[x_i + t(\bar{x} - x_i)]$, $f_2(t) = F_2[x_i + t(\bar{x} - x_i)]$, si avrà che $f_1(t), f_2(t)$ sono funzioni della variabile complessa t, coi valori

(1) Il termine «intorno» è qui adoperato con lo stesso significato che gli viene attribuito nella trattazione di FANTAPPIÈ.

(2) Vedi NOTE FINALI, II.

in S e analitiche in ogni punto t di $[0,1]$. Dunque, se $F_1(x) = F_2(x)$ per ogni $x \in V_i$, vi sarà di certo([1]) un intorno del punto $t=0$, nella retta complessa, sul quale riesca $f_1(t) = f_2(t)$. Si avrà quindi $f_1(t) = f_2(t)$ per ogni $t \in [0,1]$, onde $F_1(\bar{x}) = F_2(\bar{x})$. Siccome $\bar{x}$ è un punto arbitrario di V_{i+1}, il teorema resta dimostrato.

Consideriamo ora in R due insieme aperti D, D^* con $D \subset D^*$, essendo D^* connesso, e sia $F(x)$ una funzione di dominio D coi valori in S e G-analitica in D. Da (**8**.1) risulta che *non può esistere più di una funzione* $F^*(x)$ *di dominio* D^*, *ivi* G-*analitica, la cui restrizione a* D *sia la* $F(x)$. Orbene, se una siffatta funzione $F^*(x)$ esiste, questa si dirà il *prolungamento analitico* della $F(x)$ a D.

L'operazione inversa del prolungamento è, naturalmente, la restrizione, ed è immediato che, se $F(x)$ è una funzione G-analitica in D, la restrizione di $F(x)$ a qualsivoglia sotto-insieme aperto D_* di D è ancora una funzione G-analitica in D_*.

Ciò detto, è naturale introdurre questa definizione:

(**8**.2) Siano D, D^* insiemi aperti e connessi in R, e consideriamo due funzioni $F(x), F^*(x)$ di domini D, D^* rispettivamente, e di controdomini contenuti in S, G-analitiche nei rispettivi domini. Diremo che la $F^*(x)$ è una *continuazione analitica* della $F(x)$, quando si possa passare dalla $F(x)$ alla $F^*(x)$ mediante un numero finito di prolungamenti analitici e restrizioni, eseguiti alternativamente lungo una catena d'insiemi aperti connessi.

Naturalmente, ciascuno di questi insiemi dopo il primo sarà contenuto nel precedente, oppure lo conterrà. E la continuazione analitica dipenderà in genere dalla catena che si sceglie, ma sarà ben determinata per ogni catena scelta.

La definizione (**8** 2) può estendersi al caso in cui gli insiemi D, D^* sono aperti, ma *non necessariamente connessi*. Consideriamo in primo luogo *il caso in cui si ha* $D \subset D^*$, *in modo che ogni componente di* D^* *contenga almeno una componente di* D; allora, data una funzione $F(x)$ di dominio D ed ivi G-analitica, se esiste una funzione $F^*(x)$ di dominio D^* ed ivi G-analitica, questa sarà unica e si chiamerà il *prolungamento analitico* della $F(x)$ a D^*. Ciò premesso, si può estendere agevolmente la definizione (**8**.2) al caso ora considerato.

([1]) Interviene qui il fatto che, essendo R uno *spazio vettoriale topologico complesso*, esisterà, per ogni intorno V dell'origine e ogni $h \in R$, almeno un $\delta < 0$ tale che si abbia $th \in V$ per $|t| < \delta$.

9. Il prolungamento analitico nello spazio $\mathfrak{S}$ di Fantappiè. Il concetto di analiticità nel senso Gâteaux può essere tradotto, in modo naturale, quando il primo spazio considerato è lo spazio $\mathfrak{S}$ di Fantappiè e il secondo è una spazio vettoriale complesso, localmente convesso, S:

(**9.**1) Una funzione $\Phi(\zeta)$ (operatore funzionale) definita in una regione[1] $\mathfrak{D}$ dello spazio $\mathfrak{S}$ e avente i valori in S, si dirà *G-analitica* in $\mathfrak{D}$, quando siano verificate le condizioni:

1.ª Date $f, g \in \mathfrak{D}$, se f è prolungamento di g, si ha $\Phi(f) = \Phi(g)$.

2.ª Comunque si prendano $f \in \mathfrak{D}$, $h \in \mathfrak{S}$, purché f, h abbiano lo stesso dominio di esistenza, il valore di $\Phi(f + th)$, essendo t una variabile complessa, è una funzione analitica di t in un intorno del punto $t = 0$.

Si riconosce subito che, se la $\Phi(\zeta)$ è analitica in D nel senso di Fantappiè, lo sarà pure nel senso di Gâteaux. Ma si domanda:

La proposizione (**8.**1) *è vera nel caso presente, cioè, sostituendo* R *con* $\mathfrak{S}$?

Ebbene, la risposta è negativa. Un contro-esempio molto semplice è questo: Sia C un cerchio e Γ la circonferenza di C. La regione lineare (Γ) è un insieme connesso in $\mathfrak{S}$ (nel senso usuale) e si ha d'altronde $(C) \subset (\Gamma)$. Consideriamo ora un funzionale lineare analitico, T, definito in (C). È facile vedere che vi sono infiniti funzionali lineari, analitici nel senso di Fantappiè, definiti in (Γ), i quali coincidono con T su (C).

Viene ancora fatto di domandare se la (**8.**1) diventa vera, quando si sostituisce il concetto usuale di connessione con quello di Fantappiè e il concetto di funzione analitica nel senso di Gâteaux con quello di funzione analitica nel senso di Fantappiè. Ebbene, pare che la questione non sia ancora completamente chiarita, altrimenti non si potrebbe spiegare perché il Carafa abbia stabilito in [6] la proposizione del n. 2, la quale sembra una rettifica al risultato introdotto dal Fantappiè in [13], n. 16, p. 29. Ed è pure da rilevare quanto le indagini svolte in questo indirizzo si presentino complicate.

10. Il prolungamento analitico tra spazi $\mathfrak{F}[C]$ con C variabile. Abbiamo già rilevato che, per ogni insieme C nelle condizioni precisate, lo spazio $\mathfrak{F}[C]$, con la topologia $\tau^{(1)}$ indicata al n. 4, è uno spazio

(1) Chiamiamo qui «regione», con Fantappiè, ogni insieme aperto non vuoto.

vettoriale topologico, *separato*, localmente convesso; possiamo quindi applicarvi quanto si è detto ai nn. 6, 8, e così la questione del prolungamento analitico entro un dato spazio $\mathfrak{F}[C]$ è automaticamente compresa nelo studio che vi abbiamo fatto; e si deve pure osservare come, in questo caso, i risultati ottenuti siano più forti di quelli raggiunti col metodo di Fantappiè, per quanto riguarda le regioni lineari dello spazio $\mathfrak{S}$.

In questo numero denoteremo con S uno spazio di Banach complesso o un secondo spazio funzionale analitico. Per comodità, in ciò che segue, chiameremo *spazi* ($\mathscr{B}$) gli spazi di Banach (complessi).

Osserviamo ora che, se $C \supset C^*$, si ha $\mathfrak{F}[C] \subset \mathfrak{F}[C^*]$. Ma un insieme $\mathfrak{A}$ aperto in $\mathfrak{F}[C]$ può non essere aperto in $\mathfrak{F}[C^*]$. Vale però la proposizione:

(**10**.1) *Supponiamo che* $C \subset C^*$ *in modo che ogni componente di* $\Omega - C^*$ *contenga almeno una componente di* $\Omega - C$. *Allora, data un'applicazione lineare continua,* Θ, *di* $\mathfrak{F}[C]$ *in* S, *condizione necessaria e sufficiente perché la* Θ *sia prolungabile in un'applicazione lineare continua,* Θ^*, *di* $\mathfrak{F}[C^*]$ *in* S, *è che la funzione indicatrice di* Θ,

$$\theta(\lambda) = \Theta_z\left(\frac{1}{\lambda - z}\right), \quad \lambda \in \Omega - C,$$

sia prolungabile in una funzione localmente analitica $\theta^*(\lambda)$, *di dominio* $\Omega - C^*$; *in tale ipotesi, la trasformazione* Θ^* *è univocamente determinata dalla* $\theta(\lambda)$, *funzione indicatrice di* Θ.

Questo risultato è una conseguenza di quanto si è stabilito in [26] nn. 20, 21, 24 e 37. In particolare, si osservi come *l'unicità del prolungamento delle trasformazioni lineari continue, nelle condizioni indicate, sia una conseguenza dell' unicità del prolungamento analitico delle funzioni di variabile complessa* (coi valori in S). D'altronde, la proposizione (**10**.1) mostra che, quando è verificata l'ipotesi relativa agli insiemi C, C^*, l'insieme $\mathfrak{F}[C]$ è denso nello spazio $\mathfrak{F}[C^*]$ (per il teorema di Hahn-Banach). [1]

Un caso particolare in cui si verifica l'ipotesi della (**10**.1) è quello in cui si ha $C \supset C^*$, essendo C^* *semplicemente connesso.*

La proposizione (**10**.1) si può enunciare in modo più generale,

---

(1) Questi rapporti fra il prolungamento di trasformazioni lineari e il prolungamento analitico di funzioni di variabile complessa sono stati già messi in rilievo dal Köthe in [23]. Non bisogna dimenticare che, *dal punto di vista topologico,* $\mathfrak{F}[C]$ *non è un sotto-spazio di* $\mathfrak{F}[C^*]$ *(se* $C \neq C^*$*).*

considerando al posto di Θ una funzione multilineare continua, coi valori in S,

$$\Theta(\varphi_1, \cdots, \varphi_n), \quad \text{con } \varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \mathfrak{F}[C];$$

la rispettiva funzione indicatrice sarà

$$\theta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Theta_z\left(\frac{1}{\lambda_1 - z}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n - z}\right) \quad (\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Omega - C).$$

Pure in questo caso l'unicità del prolungamento di Θ, quale operatore multilineare continuo, nelle condizioni predette, è una diretta conseguenza dell'unicità del prolungamento analitico della funzione indicatrice.

Possiamo ora stabilire il seguente risultato fondamentale:

(**10.2**) Teorema. *Supponiamo che* $C \supset C^*$ *in modo che ogni componente di* $\Omega - C^*$ *contenga almeno una componente di* $\Omega - C$. *Siano d'altronde* $\mathfrak{D}$ *un insieme aperto in* $\mathfrak{F}[C]$ *e* $\mathfrak{D}^*$ *un insieme aperto e connesso in* $\mathfrak{F}[C^*]$, *essendo* $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}^*$. *Allora, se* $F(\varphi)$ *è una funzione di dominio* $\mathfrak{D}$ *e di valori in* S, *analitica nel senso di Fantappiè in* $\mathfrak{D}$, *non può esistere più di una funzione* $F^*(\varphi)$ *di dominio* $\mathfrak{D}^*$ *e di valori in* S, *che sia analitica nel senso di Fantappiè in* $\mathfrak{D}^*$ *e tale che* $F^*(\varphi) = F(\varphi)$ *su* $\mathfrak{D}$.

Dimostrazione. Ricordiamo dapprima che, essendo la $F(\varphi)$ analitica in $\mathfrak{D}$ nel senso di Fantappiè, si ha per ogni $\varphi_0 \in \mathfrak{D}$ lo sviluppo in serie

$$F(\varphi) = F(\varphi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n F(\varphi_0; \varphi - \varphi_0, \cdots, \varphi - \varphi_0),$$

valido in un intorno $\mathfrak{V}(\varphi_0)$ di φ_0, essendo $\delta^n F(\varphi_0; \eta_1, \cdots, \eta_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ funzioni di valori in S, lineari e continue in ciascuno degli n argomenti $\eta_1, \cdots, \eta_n$, variabili su $\mathfrak{F}[C]$. Ora, se la $F(\varphi)$ è prolungabile in una funzione $F^*(\varphi)$, di dominio $\mathfrak{D}^*$, analitica nel senso di Fantappiè in $\mathfrak{D}^*$, si avrà pure, per ogni $\varphi_0 \in \mathfrak{D}$,

$$F^*(\varphi) = F^*(\varphi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n F^*(\varphi_0; \varphi - \varphi_0, \cdots, \varphi - \varphi_0),$$

in un intorno $V^*(\varphi_0)$ del punto φ_0 nello spazio $\mathfrak{F}[C^*]$, essendo manifestamente

$$\delta^n F^*(\varphi_0; \eta_1, \cdots, \eta_n) = \delta^n F(\varphi_0; \eta_1, \cdots, \eta_n) \quad (n = 1, 2 \cdots),$$

per $\eta_1, \cdots, \eta_n \in \mathfrak{F}[C]$. Quindi, tenuto conto della proposizione (**10.1**),

si riconosce subito che le funzioni $\delta^n F^*(\varphi_0; \eta_1, \cdots, \eta_n)$ di $\eta_1, \cdots, \eta_n$ restano univocamente determinate dalla funzione $F(\varphi)$ per ogni $\varphi_0 \in \mathfrak{D}$ Così, quali che siano $\varphi_0 \in \mathfrak{D}$, $\eta \in \mathfrak{F}[C^*]$, ed essendo t una variabile complessa, si avrà uno sviluppo in serie

$$F^*(\varphi_0 + t\eta) = p_0 + t p_1 + \cdots + t^n p_n + \cdots,$$

valido per $|t|$ minore di un certo $\varepsilon(\varphi_0, \eta) > 0$ e i cui coefficienti $p_0, p_1 \cdots$ sono univocamente determinati dalla $F(\varphi)$ per ogni coppia (φ_0, η) considerata. Allora, ragionando come nella dimostrazione di (**8**.1), si arriva senza difficoltà alla tesi del teorema.

Ricordiamo ancora che, per ogni elemento φ_0 di $\mathfrak{D}$, le funzioni $\delta^n F(\varphi_0; \eta_1, \cdots, \eta_n)$, lineari continue in $\eta_1, \cdots, \eta_n$, hanno per indicatrici le funzioni di $t_1, \cdots, t_n$ così definite:

$$f_n(\varphi_0; t_1, \cdots, t_n) = \frac{\partial_n}{\partial \varepsilon_1, \cdots \partial \varepsilon_n} F^z\left[\varphi_0(z) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{t_i - z}\right]\Bigg|_{\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 0},$$

$$\text{per } (t_1, \cdots, t_n) \in (\Omega - C)^n.$$

Allora, è facile vedere che la (**10**.2) può completarsi, aggiungendovi:

Perché una siffatta funzione $F^*(\varphi)$ *esista, è necessario che, per ogni* $\varphi_0 \in \mathfrak{D}$, *le funzioni* $f_n(\varphi_0, t_1, \cdots, t_n)$ *siano prolungabili analiticamente all'insieme* $(\Omega - C^*)^n$.

Quando la $F^*(\varphi)$ esiste, nelle condizioni indicate, diremo che essa è il prolungamento analitico della $F(\varphi)$ al dominio $\mathfrak{D}^*$ di $\mathfrak{F}[C^*]$.

Sia ancora $F(\varphi)$ una funzione di valori in S, analitica nel senso di Fantappiè in un insieme $\mathfrak{D}$ aperto in $\mathfrak{F}[C]$, e consideriamo un altro spazio $\mathfrak{F}[C_*] \subset \mathfrak{F}[C]$. Dato un insieme $\mathfrak{D}_*$ aperto in $\mathfrak{F}[C_*]$, e contenuto in $\mathfrak{D}$, è facile vedere come la restrizione de $F(\varphi)$ a $\mathfrak{D}_*$ sia ancora analitica nel senso di Fantappiè.

In tali condizioni, la restrizione è l'operazione inversa del prolungamento analitico. Possiamo quindi introdurre naturalmente questa definizione:

(**10**.3) Consideriamo due spazi funzionali analitici $\mathfrak{F}[C], \mathfrak{F}[C^*]$, quali si vogliano, e due insiemi, $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*$, aperti e connessi rispettivamente in $\mathfrak{F}[C]$ e $\mathfrak{F}[C^*]$. Date due funzioni $F(\varphi)$, $F^*(\varphi)$ di valori in S', definite e analitiche rispettivamente in $\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{D}^*$, diremo che la $F^*(\varphi)$ è una *continuazione analitica* della $F(\varphi)$, quando si possa passare dalla $F(\varphi)$ alla $F^*(\varphi)$ mediante un numero finito di prolungamenti analitici e restrizioni, eseguiti alternativamente nelle condizioni su precisate. (Si seguirà dunque una successione di spazi funzionali analitici, ciascuno dei quali, dopo il primo, conterrà o sarà contenuto nel precedente).

Si ha così un concetto di continuazione analitica che sembra più potente di quello di FANTAPPIÈ — nella misura in cui i due indirizzi siano paragonabili.

Consideriamo ora in particolare il caso in cui le funzioni $F(\varphi)$, $F^*(\varphi)$, designate nella definizione (**10**.3), sono operatori *lineari continui*. Allora, possiamo supporre $\mathfrak{D} = \mathfrak{F}[C]$, $\mathfrak{D}^* = \mathfrak{F}[C^*]$ ed è facile vedere che:

(**10**.4) *Condizione necessaria e sufficiente perché, in tale ipotesi, la* $F^*(\varphi)$ *sia una continuazione analitica della* $F(\varphi)$ *è che la funzione indicatrice della* $F^*(\varphi)$ *sia pure una continuazione analitica della funzione indicatrice della* $F(\varphi)$.

Questo risultato si estende senz'altro al caso degli operatori polinomiali continui e si ha così una proposizione corrispondente a quella stabilita dal CARAFA in [6], n. 3, ma in certo senso più generale.

Esempi: *a*) Denotiamo con R_α il segmento rettilineo di Ω congiungente i punti $0, \infty$ e formante l'angolo α col semi-asse positivo $(0 \leqq \alpha < 2\pi)$. Rappresentiamo inoltre con $\lambda_0(z)$ il ramo della funzione $\log(-z)$, di dominio $\Omega - R_0$, che prende sul semi-asse negativo valori reali. Allora, $\lambda_0(z)$ è la funzione indicatrice di un funzionale lineare continuo, Λ_0, definito in $\mathfrak{F}[R_0]$. Fissato $\bar{\alpha} \neq 0$, si può ottenere una continuazione analitica di Λ_0 a $\mathfrak{F}[R_{\bar{\alpha}}]$ in infiniti modi diversi; uno di questi modi consisterà nell'adoperare l'insieme $A_{\bar{\alpha}}$ dei punti di Ω generato da R_α quando α cresce da 0 ad $\bar{\alpha}$, e considerare, in primo luogo, la restrizione Λ_0^*, di Λ_0 a $\mathfrak{F}[A_{\bar{\alpha}}]$, e, in seguito, il prolungamento analitico di Λ_0^* a $\mathfrak{F}[R_{\bar{\alpha}}]$.

b) Rappresentiamo con Γ la circonferenza di centro nell'origine e di raggio 1. Rappresentiamo inoltre con $\theta(z)$ la funzione localmente analitica di dominio $\Omega - \Gamma$ che coincide con $\sqrt{z-1}$ all'interno di Γ e con z^{-1} all'esterno di Γ. Allora, $\theta(z)$ è la funzione indicatrice di un funzionale lineare continuo, Θ, definito in $\mathfrak{F}[\Gamma]$. Se rappresentiamo con $\mathfrak{L}$ una curva semplice, chiusa, non passante per ∞, è facile vedere che esiste una continuazione analitica (e solo una) del funzionale Θ a $\mathfrak{F}[\mathfrak{L}]$, se, e soltanto se, il punto 0 non rimane all'esterno di $\mathfrak{L}$ e il punto 1 non rimane all'interno di $\mathfrak{L}$.

§ 3. CONTINUITÀ DELLE OPERAZIONI ANALITICHE NEL SENSO DI FANTAPPIÈ

11. Il concetto generale di analiticità nel senso di Fantappiè. Abbiamo visto in [26] come il concetto di funzionale analitico di Fantappiè si possa estendere naturalmente al caso delle funzioni di dominio

e di controdominio contenuti in spazi di Banach complessi. Conviene qui ricordare la definizione che abbiamo data in [26]:

(11.1) Siano R, S spazi ($\mathfrak{B}$) e $F(x)$ una funzione coi valori in S, definita (univocamente) in un insieme D aperto in R. Si dice che la $F(x)$ *è analitica nel senso di Fantappiè* in D (o semplicemente *analitica in* D), se, per ogni funzione $g(t)$ della variabile complessa t, avente i valori in D e analitica in un dominio Δ di Ω, anche $F(g(t))$ risulta una funzione analitica in Δ, coi valori in S.

(Più intuitivamente, si può dire che la F è analitica nell senso di Fantappiè in D, quando ogni linea analitica di R contenuta in D è trasformata da F in una linea analitica di S).

È immediato che, se la $F(x)$ è analitica in D nel senso di Fantappiè, lo sarà pure nel senso di Gâteaux. Ma la reciproca non è vera, come si riconosce subito nel caso semplice degli operatori lineari.

Si vede inoltre che la definizione (11.1) si adatta immediatamente al caso degli spazi vettoriali topologici con scalari complessi; in particolare al caso degli spazi funzionali analitici, $\mathfrak{F}[C]$.

12. Continuità delle operazioni analitiche di dominio e di controdominio contenuti in spazi di Banach[1]. Siano R, S spazi ($\mathfrak{B}$). Si ha dapprima la proposizione:

(12.1) *Condizione necessaria e sufficiente perché un'applicazione lineare* Θ *di* R *in* S *sia continua, è che* Θ *sia analitica nel senso di Fantappiè* (*in* R).

Si vede subito che la condizione è necessaria. Per dimostrare la sufficienza, adotteremo un'idea contenuta nella Nota [5] di CACCIOPPOLI e modificata più tardi dal TEICHMÜLLER[2].

Sia Θ un'applicazione lineare di R in S, analitica nel senso di Fantappiè, e supponiamo che Θ non sia continua, che cioè esista una successione $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ di elementi di R, convergente ad un elemento a di R, alla quale corrisponda una successione $\Theta(x_1)$, $\Theta(x_2), \cdots, \Theta(x_n), \cdots$ che non converga a $\Theta(a)$ in S. Allora, esisteranno un numero $\varepsilon > 0$ e una sotto-successione (x_n^*) della (x_n), tali che:

$$(1) \qquad \|\Theta(x_n^*) - \Theta(a)\| > \varepsilon \quad , \qquad \text{qualunque sia } n = 1, 2, \cdots;$$

---

[1] Sulle possibili estensioni dei risultati contenuti in questo numero, vedi NOTE FINALI, III e IV.

[2] L'idea di CACCIOPPOLI è nata, a sua volta, da un ragionamento di FANTAPPIÈ v. [13], n. 25, pag. 39).

ma la (x_n^*) è una successione di Cauchy (dato che si ha ancora $\lim x_n^* = a$) e quindi, per ogni numero naturale p, vi sarà un altro numero naturale k_p tale che

$$\|x_m^* - x_n^*\| < \frac{1}{p!} \quad , \quad \text{per} \quad m, n \geq k_p . \tag{2}$$

Poniamo allora $\bar{x}_1 = x_{k_1}^*, \cdots, \bar{x}_n = x_{k_n}, \cdots$ e consideriamo la serie di potenze della variabile complessa t:

$$\bar{x}_1 + t(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \cdots + t^n(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) + \cdots$$

Per la (2) questa serie ha raggio di convergenza infinito e definisce pertanto una funzione *intera*, $f(t)$, di valori in R. Siccome la Θ è analitica nel senso di Fantappiè (per ipotesi), anche $\Theta(f(t))$ sarà una funzione analitica *intera* di t (coi valori in S), il che vuol dire che esiste una successione (u_n) di elementi di S tali che $\Theta(f(t)) = \sum_1^\infty t_n \mathrm{u}_n$, per $t \neq \infty$. Ma, tenuto conto della linearità di Θ, verrà successivamente:

$$\Theta(f(t)) = \Theta(\bar{x}_1) + t\,\Theta \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}(\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n)$$

$$= \Theta(\bar{x}_1) + t\,\Theta(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + t^2\,\Theta \sum_{n=2}^{\infty} t^{n-2}(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) = \cdots ,$$

per ogni $t \neq \infty$. Dunque, possiamo identificare la serie $\sum_1^\infty t_n \mathrm{u}_n$ con la serie[1]

$$\Theta(\bar{x}_1) + t\,\Theta(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \cdots + t^n\,\Theta(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) + \cdots .$$

Ora $f(1) = \bar{x}_1 + (\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + \cdots + (\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n) + \cdots = \lim \bar{x}_n = a$;

quindi $\Theta(a) = \Theta(f(1)) = \Theta(\bar{x}_1) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Theta(\bar{x}_{n+1}) - \Theta(\bar{x}_n)]$ e così

$$\lim_n \Theta(\bar{x}_n) = (a),$$

risultato incompatibile con la (1), poiché $(\bar{x}_n)$ è una sotto-successione di (x_n^*). La trasformazione Θ è dunque continua, q. e. d.

Ciò premesso, possiamo stabilire la proposizione più generale:

---

(1) Il principio delle identità si estende senz'altro alle serie di coefficienti situati in uno spazio di Banach complesso.

(**12.2**) *Sia* F(x) *una funzione di valori in* S, *definita in un insieme* D *aperto in* R. *Se la* F(x) *è analitica nel senso di Fantappiè in* D, *la* F(x) *è continua in* D.

Supponiamo che la $F(x)$ sia analitica in D (nel senso di Fantappiè). Ponendo

$$F_n(a, h) = \frac{d^n}{d t_n} F(a + th)|_{t=0}, \quad \text{per} \quad a \in D, \quad h \in S, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

dove t è una variabile complessa, possiamo scrivere

$$F(a + th) = F(a) + t F_1(a, h) + \cdots + t^n F_n(a, h) + \cdots,$$

per $|t|$ minore di un certo $\rho(a, h) > 0$. Considerando a fisso in D, poniamo ora

$$\Theta(h) = F_1(a, h);$$

si sa che Θ è un'applicazione lineare di R in S. D'altronde, mettendo al posto di h una qualsiasi funzione $f(\lambda)$ della variabile complessa λ, di valori in S e analitica in un dominio Δ di Ω, si riconosce che $F[a + tf(\lambda)]$ è una funzione analitica [1] della coppia (t, λ) in un dominio di Ω^2 contenente $\{0\} \times \Delta$; e siccome $F_1[a, f(\lambda)] = \frac{d}{dt} F[a + tf(\lambda)]\Big|_{t=0}$ ne segue che $F_1(a, h)$ è analitica rispetto ad h. Dunque, la trasformazione Θ è non solo lineare, ma pure *analitica* e quindi *continua*, per il teorema (**12**.1) Ora, *secondo un teorema di Zorn*, stabilito in [35], quando la prima variazione $F_1(a, h)$, della $F(x)$ in a, è continua rispetto ad h qualunque sia $a \in D$, la $F(x)$ è continua in D. E così il teorema risulta dimostrato.

13. Caso delle operazioni analitiche il cui dominio è contenuto in uno spazio $\mathfrak{F}[C]$. Consideriamo ora uno spazio funzionale analitico, $\mathfrak{F}[C]$, e uno spazio di Banach, S. Si ha ancora la proposizione:

(**13.**1) *Sia* $F(\varphi)$ *una funzione definita in un insieme* $\mathfrak{D}$ *aperto in* $\mathfrak{F}[C]$ *e avente i valori in* S. *Se la* $F(\varphi)$ *è analitica in* $\mathfrak{D}$ *nel senso di Fantappiè, allora la* $F(\varphi)$ *è continua in* $\mathfrak{D}$.

Dimostrazione. Abbiamo visto al n. 4 come $\mathfrak{F}[C]$, munito della topologia $\tau^{(1)}$, sia lo spazio riunione degli spazi [A], dove A rappresenta un qualsiasi intorno aperto di C. Ora, essendo $\mathfrak{D}$ per ipo-

---

[1] Per il teorema di Hartogs, generalizzato da Zorn alle funzioni di più variabili complesse, di controdominio contenuto in uno spazio di Banach complesso.

tesi un insieme aperto in $\mathfrak{F}[C]$, anche l'insieme $\mathfrak{D} \cap [A]$ sarà aperto nello spazio $[A]$, qualunque sia A.

Supponiamo che $F(\varphi)$ sia analitica in $\mathfrak{D}$ nel senso di Fantappiè. Allora, anche la restrizione di $F(\varphi)$ ad ogni insieme $\mathfrak{D} \cap [A]$ è analitica in questo insieme, dato che ogni funzione $f(t)$ della variabile complessa, avente i valori in $\mathfrak{D} \cap [A]$ e analitica rispetto alla topologia di $[A]$, rappresenta una funzione di t, coi valori in $\mathfrak{D}$, analitica rispetto alla topologia di $\mathfrak{F}[C]$. Dunque, per il teorema (12.2), la restrizione di $F(\varphi)$ all'insieme $\mathfrak{D} \cap [A]$ è continua in questo insieme rispetto alla topologia di $[A]$, qualunque sia A, e quindi la $F(\varphi)$ è continua (1) in $\mathfrak{D}$ rispetto alla topologia di $\mathfrak{F}[C]$, q. e. d.

Vien fatto di domandare se questo teorema rimane vero, quando al posto di S si consideri un secondo spazio funzionale analitico $\mathfrak{F}[C]$. Questa domanda l'abbiamo fatta già in [26], p. 109, ma soltanto ora siamo in grado di darne una risposta.

14. Caso delle operazioni analitiche di controdominio contenuto in uno spazio $\mathfrak{F}[C]$. Dobbiamo qui premettere qualche nozione della teoria degli spazi vettoriali topologici.

In uno spazio vettoriale topologico un insieme H si dice *limitato*, quando, per ogni intorno V dell'origine, esiste un numero $\lambda > 0$ tale che $H \subset \lambda V$.

Si chiamano *spazi* $(\mathcal{F})$ o *spazi di Fréchet* (secondo DIEUDONNÉ-SCHWARTZ) quegli spazi *localmente convessi* che riescono metrizzabili e completi. Uno spazio $(\mathcal{F})$ si dice poi *spazio* $(\mathcal{M})$ o *di Montel*, quando ogni sua parte limitata e chiusa è pure compatta (rispetto alla topologia naturale dello spazio) (2).

Per esempio, essendo D un aperto di Ω, con $D \neq 0$ e $D \neq \Omega$, lo spazio $\mathfrak{G}[D]$ delle funzioni olomorfe in D (e che si annullano nel punto ∞, se $\infty \in D$), con la topologia della convergenza uniforme sulle parti chiuse di D, é uno spazio $(\mathcal{M})$, dato che gli insiemi relativamente compatti (3) in $\mathfrak{G}[D]$ non sono altro che le famiglie normali di funzioni, secondo MONTEL.

Si chiama *duale* di uno spazio localmente convesso, S, l'insieme

---

(1) Vedi nn. 3 e 4.

(2) Ogni spazio $(\mathcal{B})$ è uno spazio $(\mathcal{F})$. Ma solo quando ha un numero finito di dimensioni, uno spazio $(\mathcal{B})$ è uno spazio $(\mathcal{M})$ (v. BANACH [2], p. 81).

(3) Sui concetti di «insieme compatto» e di «insieme relativamente compatto», v. [3], p. 59-61. La metrica in $\mathfrak{G}[D]$ può essere definita in modo simile a quello adottato da FRÉCHET nel caso particolare dello spazio delle funzioni intere.

$S' = \Lambda_c(S, \mathbf{K})$ dei funzionali lineari continui su S (di controdominio nel corpo complesso $\mathbf{K}$). Si dicono *topologia debole* e *topologia forte* in S', rispettivamente, la topologia della convergenza semplice in S e la topologia della convergenza uniforme sulle parti limitate di S. Il *duale debole* [risp. *forte*] di S è l'insieme S' munito della topologia debole [risp. forte].

Si è dimostrato in [7] e [22] che il duale forte di $\mathfrak{F}[C]$ è isomorfo (in senso algebrico e topologico) allo spazio $\mathfrak{S}[D]$, con $D = \Omega - C$, e che, viceversa, il duale forte di $\mathfrak{S}[D]$ è isomorfo allo spazio $\mathfrak{F}[C]$.

Dunque, identificando spazi isomorfi, possiamo affermare che:

(**14**.1) *Lo spazio* $\mathfrak{F}[C]$ *con la topologia* $\tau^{(1)}$ *è il duale forte di uno spazio* $(\mathcal{M})$.

D'altronde, in [10], p. 80, si dimostra che:

(**14**.2) *Se* S *è uno spazio* $(\mathcal{M})$ *o il duale di uno spazio* $(\mathcal{M})$, *ogni successione debolmente convergente in* S *è pure fortemente convergente (allo stesso limite).*

Possiamo ora stabilire la seguente proposizione (¹):

(**14**.3) Teorema. *Sia* R *uno spazio* $(\mathcal{B})$ *o uno spazio funzionale analitico e sia* S *uno spazio funzionale analitico. Ogni funzione* F(z) *di valori in* S, *analitica nel senso di Fantappiè in un aperto* D *di* R, *è continua in* D.

Dimostrazione. Se $F(x)$ è analitica in D, allora, qualunque sia l'elemento L di S' (funzionale lineare continuo su S), anche $L[F(x)]$ sarà una funzione di x, analitica nel senso di Fantappiè in D. Dato che il controdominio della $L[F(x)]$ è contenuto in $\mathbf{K}$, ne segue per la (**12**.2) o per la (**13**.1) che la funzione $L[F(x)]$ di x è continua in D. Così, qualunque sia la successione convergente (x_n) estratta da D e tale che $\lim\limits_n x_n \in D$, si avrà

$$\lim_n L[F(x_n)] = L[F \lim_n x_n], \quad \text{per ogni } L \in S',$$

a quindi, per le (**14**.1) e (**14**.2), si avrà, *rispetto alla topologia naturale* di S:

$$\lim_n F(x_n) = F(\lim_n x_n),$$

il che dimostra il teorema.

(¹) Sulle possibilitá di estensione di questo teorema, v. NOTTE FINALI, III e IV.

Nota. Nello spazio $\mathfrak{S}$ di Fantappiè si ha ancora il risultato:

Ogni funzionale $F(\zeta)$ *(di valori numerici) analitico in una regione* $\mathfrak{R}$ *dello spazio* $\mathfrak{S}$, *è continuo in* $\mathfrak{R}$.

Questa proposizione è una conseguenza della (**13.1**); ma possiamo darne una dimostrazione più diretta basandoci sul teorema (**12.2**).

Supponiamo che il funzionale $F(\zeta)$ sia analitico in $\mathfrak{R}$ e prendiamo un punto ζ_0 qualsiasi di $\mathfrak{R}$; vogliamo dimostrare che $F(\zeta)$ è continuo in ζ_0. Denotiamo allora con D il dominio della funzione ζ_0. Essendo $\mathfrak{R}$ aperto in $\mathfrak{S}$, esiste almeno in intorno $\mathfrak{V}$ di ζ_0 contenuto in $\mathfrak{R}$: supponiamo che $\mathfrak{V}$ sia l'intorno (C, σ) di ζ_0, definito da un insieme chiuso C contenuto in D e da un numero $\sigma > 0$. Rappresentando ora con A un quasiasi insieme aperto tale che $C \subset A$, $\bar{A} \subset D$, si riconosce subito che l'insieme $\mathfrak{W} = \mathfrak{V} \cap [A]$ è aperto nello spazio di Banach $[A]$. Sia poi $\Gamma(t)$ una funzione della variabile complessa t, coi valori in $\mathfrak{W}$, analitica in un dominio Δ di Ω, rispetto alla topologia di $[A]$; per ogni $t_0 \in \Delta$, il valore di $\Gamma(t)$ sarà dunque una determinata funzione $\gamma(z, t_0)$ di z appartenente a $[A]$, ed è facile vedere come la funzione $\gamma(z, t)$ delle due variabili z, t (con $z \in A$, $t \in \Delta$) rappresenti una linea analitica di $\mathfrak{S}$ contenuta in $\mathfrak{V}$. Allora, se denotiamo con $\dot{F}(\zeta)$ la restrizione di $F(\zeta)$ a $\mathfrak{W}$, ne risulta che $\dot{F}(\zeta)$ è un funzionale analitico, e perciò continuo, nell'insieme $\mathfrak{W}$, rispetto alla topologia di $[A]$ (teorema (**12.2**)). Dunque, se rappresentiamo con $\dot{\zeta}_0$ la restrizione di ζ_0 ad A, verrà $\dot{F}(\dot{\zeta}_0) = \dot{F}(\zeta_0)$ e quindi possiamo dire che, ad ogni $\delta > 0$, corrisponde un $\varepsilon > 0$, tale che

$$\|\varphi - \dot{\zeta}_0\| < \varepsilon \text{ in } [A] \text{ implica } |\dot{F}(\varphi) - \dot{F}(\zeta_0)| < \delta .$$

Ora, in tali condizioni è manifesto che, se ζ appartiene all'intorno $(\bar{A}, \varepsilon)$ di ζ_0, si avrà necessariamente $|F(\zeta) - F(\zeta_0)| < \delta$. E così resta dimostrato il teorema.

15. Concetti di analiticità equivalenti a quello di Fantappiè. Si conoscono parecchi modi di caratterizzare le funzioni F-analitiche (cioè analitiche nel senso di Fréchet), quando si tratta di funzioni di dominio e di controdominio *contenuti in uno spazio di Banach complesso* (v. [18], [34] e [35]). In primo luogo, vogliamo richiamare questo risultato di Hille: *La classe delle funzioni* F-*analitiche in un insieme aperto* D *coincide con la classe delle funzioni* G-*analitiche localmente limitate in* D. Da qui viene subito che:

Le funzioni F-*analitiche nell'aperto* D *non sono altro che le funzioni* G-*analitiche e continue in* D.

Con la (**12.2**) abbiamo dato una nuova caratterizzazione delle funzioni F-analitiche. Difatti, *ogni funzione analitica nel senso di Fantappiè è anche analitica nel senso di Fréchet*; reciprocamente, è facile vedere che *ogni funzione analitica nel senso di Fréchet è anche analitica nel senso di Fantappiè.* Questo nel caso in cui le funzioni hanno dominio e controdominio contenuti in spazi $(\mathcal{B})$.

In [26] abbiamo indicato un modo di estendere il concetto di analiticità nel senso di Fréchet al caso in cui le funzioni hanno il

dominio contenuto in uno spazio $\mathfrak{F}[C]$ e il controdominio contenuto in uno spazio di Banach o in un altro spazio $\mathfrak{F}[C^*]$.

È facile vedere che, anche in questo caso i concetti di analiticità nel senso di Fréchet e nel senso di Fantappiè riescono equivalenti.

Però, quando si tratta di funzioni di dominio e di controdominio contenuti in spazi funzionali analitici, l'anzidetto di Hille non sussiste — a meno che si dia all'espressione «localmente limitata» un significato diverso da quello usuale.

Si ha invece la proposizione:

(**15**.1) TEOREMA. [1] *Sia* R *uno spazio* ($\mathscr{B}$) *o uno spazio funzionale analitico e sia* S *uno spazio funzionale analitico. Ogni funzione* F(x) *di valori in* S, *che sia* G-*analitica e continua in un aperto* D *di* R, *è analitica nel senso di Fantappiè in* D.

Questo risultato è da ravvicinare al teorema (**14**.3). Per la dimostrazione, basta tener conto della (**14**.3), del risultato corrispondente a (**15**.1) per gli spazi ($\mathscr{B}$) e di quanto si è detto ai nn. 2 e 4. [2]

16. Funzioni continue di controdominio in uno spazio funzionale $\mathfrak{F}[C]$. Vogliamo ora far vedere come lo studio delle funzioni continue di controdominio contenuto in uno spazio funzionale analitico si riduce in genere allo studio di apposite funzioni continue di dominio e di controdominio contenuti in spazi ($\mathscr{B}$). A questo scopo giovano particolarmente le seguenti proposizioni dimostrate in [10], p. 77 (la seconda è corollario della prima):

(**16**.1) *Se* S *è il duale forte di uno spazio* ($\mathscr{F}$), *esiste una successione* (C_n) *di parti limitate di* S, *tali che ogni parte limitata di* S *è contenuta in uno almeno dei* C_n.

(**16**.2) *Se* S *è il duale debole di uno spazio* ($\mathscr{F}$), *ogni filtro* $\mathfrak{C}$ *su* S, *che ammette una base numerabile ed è un filtro di Cauchy* [3], *risulta limitato in* S *(cioè uno almeno degli insiemi appartenenti ad* $\mathfrak{C}$ *è limitato).*

Si badi inoltre che ([10], teorema 3, p. 76):

---

(1) Sulle possibilità di estendere questo teorema v. NOTE FINALI, III e V.

(2) A. E. TAYLOR chiama «funzioni analitiche» precisamente le funzioni *G-analitiche continue* (v. [29] e [30]).

(3) Sui concetti di «filtro», «base di filtro» e «filtro di Cauchy», vedi [3], p. 20-41 e 97-107.

Nel duale di uno spazio ($\mathcal{F}$) *ogni insieme debolmente limitato è anche fortemente limitato.* (La reciproca è immediata).

Da (**16.2**) si ricava subito la proposizione:

(**16.3**) *Siano* R *uno spazio topologico soddisfacente il primo assioma della numerabilità*[1] *e* S *il duale forte di uno spazio* ($\mathcal{F}$). *Allora, ogni funzione* F(x) *di controdominio in* S, *definita e continua in un aperto* D *di* R, *è localmente limitata in* D (*cioè limitata in un intorno di ogni punto di* D).

Ora lo spazio $\mathfrak{F}[C]$ è, appunto, il duale forte di uno spazio ($\mathcal{F}$). Ricordiamo inoltre che lo spazio $\mathfrak{F}[C]$ può esprimersi come riunione di un'infinità *numerabile*[2] di spazi di Banach $[A_n]$, essendo gli A_n intorni aperti di C, tali che $A_n \supset \bar{A}_{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcap_0^\infty \bar{A}_n = C$. Diremo allora che gli spazi $[A_n]$ costituiscono una *successione definitrice* dello spazio $\mathfrak{F}[C]$. D'altronde, il Köthe ha dimostrato in [22] che:

(**16.4**) *Nello spazio* $\mathfrak{F}[C]$ *un insieme* $\mathfrak{X}$ *è limitato, se, e soltanto se, esiste almeno un intorno aperto* A *di* C *tale che l'insime* $\mathfrak{X}$ *riesca limitato in* [A], *cioè, tale che vi sia un numero* $K > 0$ *soddisfacente la condizione:* $|\varphi(z)| \leqq K$, *per ogni* $z \in A$ *e ogni* $\varphi \in \mathfrak{X}$.

Così, nello spazio $\mathfrak{F}[C]$, gli insiemi C_n cui si riferisce la (**16.1**) possono essere scelti nel modo seguente:

$$C_n = \text{sfera di centro } \mathbf{0} \text{ e raggio } n \text{ in } [A_n].$$

Dunque, tenendo conto del teorema di Montel sulle famiglie limitate di funzioni analitiche, è facile dedurre da (**16.3**) quest'altro risultato:

(**16.5**) Teorema. *Sia* R *uno spazio topologico soddisfacente il primo assioma della numerabilità e sia* F(x) *una funzione di controdominio in* $\mathfrak{F}[C]$, *definita e continua in un aperto* D *di* R. *Per ogni punto a di* D, *esisteranno un intorno* V *di* a *e un intorno aperto* A *di* C *tali che la* F(x) *sia un'applicazione continua di* V *in* [A].

Tenendo conto ora di quanto si è detto ai nn. 2 e 4, verrà:

(**16.6**) Corollario. *Consideriamo due spazi funzionali analitici* $\mathfrak{F}[C]$, $\mathfrak{F}[C^*]$ *e sia* $F(\varphi)$ *una funzione di controdominio in* $\mathfrak{F}[C^*]$, *de-*

---

[1] Cioè tale che per ogni punto di R esista un sistema fondamentale d'intorni con la potenza del numerabile.

[2] Vedi [26], p. 84, oppure [27], p. 55. Confrontare con (2.5).

finita e continua in un insieme $\mathfrak{D}$ *aperto in* $\mathfrak{F}[C]$. *Per ogni intorno aperto* A *di* C *e ogni funzione* $\varphi \in [A] \cap \mathfrak{D}$, *esisteranno un intorno* $\mathfrak{B}$ *di* φ *in* $[A]$ *e un intorno aperto* A^* *di* C^*, *tali che la* $F(\varphi)$ *sia un'applicazione continua di* $\mathfrak{B}$ *in* $[A^*]$.

Può essere utile anche la seguente proposizione, che estende il teorema **11** stabilito in [2], p. 19, sul quale si è appoggiato lo ZORN in [35]:

(**16.7**) *Siano* R *uno spazio metrico e* S *il duale forte di uno spazio* $(\mathcal{F})$. *Se, data una famiglia* $\{T_i\}_{i\in\mathcal{J}}$ *di applicazioni continue di* R *in* S, *esiste un insieme* $G \subset R$ *di* II^a *categoria, tale che, per ogni* $a \in G$, *l'insieme* $\{T_i(a)\}_{i\in\mathcal{J}}$ *sia limitato in* S, *allora esisterà una sfera* E *di* R *tale che l'insieme* $\bigcup_{i\in\mathcal{J}} T_i(E)$ *sia limitato in* S.

Dimostrazione. Tenendo conto del modo con cui sono stati definiti in [10], p. 77, gli insiemi C_n menzionati nella (**16.1**), è facile vedere che, per ogni successione (u_p) estratta da C_n e convergente in S, si ha pure $\lim u_p \in C_n$, qualunque sia $n = 1, 2, \cdots$. Pertanto, gli insiemi G_n dei punti x di R, tali che $F_i(x) \in C_n$ per ogni $i \in \mathcal{J}$, saranno chiusi e, siccome riesce $G \subset \bigcup_0^\infty G_n$, esisterà un indice ν tale che G_ν è di II^a categoria; essendo chiuso e di II^a categoria, G_ν contiene almeno una sfera E, che risponde alla questione.

17. Serie di F-potenze. Riguardo alle operazioni analitiche, c'è ancora un altro ordine di questioni: quelle cioè che consistono nel cercare condizioni perché uno sviluppo in serie rappresenti una funzione analitica.

Ricordiamo che si suole chiamare (1) *F-potenza* di grado n ogni funzione polinomiale omogenea di grado n, che sia nello stesso tempo continua. Si chiama poi *serie di F-potenze in* x ogni espressione del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$$

dove $P_n(x)$ rappresenta una *F-potenza* di grado n [è ovvio che $P_0(x)$ si riduce ad una costante].

Se le funzioni considerate hanno il dominio contenuto in uno spazio $\mathfrak{F}[C]$ e il controdominio contenuto in uno spazio S di tipo

(1) Vedi [18], p. 76.

conveniente, le F-potenza $P_n(x)$, per $n>1$, hanno la forma integrale di FANTAPPIÈ.

(17.1) $$P_n(x) = \int_{\Gamma_x} \cdots \int_{\Gamma_x} f_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)\, x(\lambda_1) \cdots x(\lambda_n)\, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n ,$$
$$\text{per } x \in \mathfrak{F}[C],$$

in cui $f_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ rappresenta un'arbitraria funzione di valori in S, simmetrica e olomorfa in $(\Omega - C)^n$, mentre Γ_x denota la frontiera debitamente orientata di un conveniente dominio di olomorfia della $x(\lambda)$ (*indipendente da* n).

Supponiamo che S sia un secondo spazio funzionale analitico, $\mathfrak{F}[C^*]$. Adoperando la (14.2) e la (16.3) oppure sfruttando la (16.7) e ragionando come in [35], si arriva alla conclusione:

(17.2) TEOREMA. *Condizione necessaria perché la serie* $\sum_0^\infty P_n(x)$ *converga in un intorno dello zero di* $\mathfrak{F}[C]$ *è che, per ogni intorno aperto* A *di* C, *esista un intorno aperto* A^* *di* C^* *tale che*:

1) *i valori delle* $f_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ *per* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Omega - \bar{A}$, $n = 1, 2, \cdots$, *appartengano tutti a* $[A^*]$.

2) *la serie* $\sum_0^\infty P_n(x)$ *sia convergente in un intorno dello zero di* $[A]$, *rispetto alla topologia di* $[A^*]$.

Non sono però riuscito ad accertare se tale condizione è anche sufficiente, in rapporto alla topologia che abbiamo adottata in $\mathfrak{F}[C]$, (in rapporto alla topologia $\tau^{(0)}$ la condizione è sufficiente).

Possiamo tuttavia estendere al caso presente l'altro risultato classico: (1)

(17.3) *Se l'insieme di convergenza della serie* $\sum_0^\infty P_n(x)$ *ha punti interni, allora la soma della serie è una funzione* F-*analitica della* x *all'interno di detto insieme.*

§ 4. NUOVI CONTRIBUTI ALLO STUDIO DEGLI OPERATORI LINEARI

18. Convergenza puntuale e convergenza uniforme sulle parti limitate di $\mathfrak{F}[C]$. Consideriamo due spazi $\mathfrak{F}[C]$, $\mathfrak{F}[C^*]$ e sia $\theta(z, \lambda)$ una funzione complessa, olomorfa in un insieme aperto Δ di Ω^2 contenente $C^* \times (\Omega - C)$ e nulla negli eventuali punti impropri di Δ. Allora, per ogni $\lambda \in \Omega - C$, la funzione $\theta(z, \lambda)$ di z sarà un ele-

(1) Vedi [18], p. 87.

mento di (C^*); quindi, se rappresentiamo con $\varkappa$ l'applicazione canonica di (C^*) su $F[C^*]$ e se poniamo

$$\dot{\theta}(\lambda) = \varkappa_z \theta(z, \lambda), \qquad \text{per } \lambda \in \Omega - C,$$

$\theta(\lambda)$ sarà la funzione indicatrice di un'applicazione lineare continua, Θ, di $\mathfrak{F}[C]$ in $\mathfrak{F}[C^*]$. Reciprocamente, abbiamo visto in [26] che la funzione indicatrice di una siffatta applicazione si può sempre ottenere in questo modo. Inoltre, la trasformata di ogni funzione $\varphi \in \mathfrak{F}[C]$, per mezzo di Θ, è la funzione ψ tale che

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \theta(z, \lambda) \varphi(\lambda) \, d\lambda, \qquad \text{per } z \in A^*,$$

essendo Γ la frontiera, debitamente orientata, di un conveniente dominio A di olomorfia della φ e A^* un intorno di C^* associato ad A, Se invece poniamo

$$v(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^*} u(z) \theta(z, \lambda) \, dz, \qquad \text{per } \lambda \in \Omega - C,$$

essendo Γ^* la frontiera, debitamente orientata, di un conveniente intorno A^* di C^* (variabile quando varia λ) resta così definita un'applicazione $u \to v$ del duale di $\mathfrak{F}[C^*]$ nel duale di $\mathfrak{F}[C]$. Questa applicazione non è altro che la *trasposta* di Θ; la rappresenteremo con Θ'. (Si avrà naturalmente $\Theta'' = \Theta$).

Conveniamo denotare con $\tilde{\mathfrak{F}}[C, C^*]$ la famiglia delle applicazioni lineari continue di $\mathfrak{F}[C]$ in $\mathfrak{F}[C^*]$. Nell'insieme $\tilde{\mathfrak{F}}[C, C^*]$ possiamo introdurre varie topologie, secondo i metodi generali usati nella teoria degli spazi localmente convessi; tra esse ci limiteremo a considerare la *topologia della convergenza semplice in* $\mathfrak{F}[C]$ e la *topologia della convergenza uniforme sulle parti limitate di* $\mathfrak{F}[C]$, che rappresenteremo rispettivamente con τ_s e τ_l.

Siano Θ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ elementi di $\tilde{\mathfrak{F}}[C, C^*]$ e $\dot{\theta}_n(\lambda)$ le rispettive funzioni indicatrici; allora:

(18.1) *Condizione necessaria e sufficiente perché la successione* (Θ_n) *sia convergente rispetto a* τ_l *è che, ad ogni intorno aperto* A *di* C, *corrisponda un intorno aperto* A^* *di* C^*, *in modo che la successione di funzioni* $\dot{\theta}_1(\lambda), \dot{\theta}_2(\lambda), \cdots$ *sia uniformemente convergente sull'insieme* $\Omega - A$ *rispetto alla topologia di* $[A^*]$. *Verificata questa condizione, possiamo affermare che l'indicatrice dell'operatore* $\operatorname{Lim}_n \Theta_n$ *è la funzione* $\operatorname{Lim}_n \dot{\theta}_n(\lambda)$.

Per la dimostrazione, basta tenere conto delle relazioni che intercedono fra ogni operatore Θ_n e la sua indicatrice $\dot{\theta}_n$, badando, d'altra parte, al risultato di KÖTHE (**16**.4).

Poniamo ora $D = \Omega - C$, $D^* = \Omega - C^*$ e rappresentiamo con $\tilde{\mathfrak{S}}[D^*, D]$ la famiglia delle applicazioni lineari continue di $\mathfrak{S}[D^*]$ in $\mathfrak{S}[D]$. Denotiamo ancora con τ_s e τ_l in $\tilde{\mathfrak{S}}[D^*, D]$, rispettivamente *la topologia della convergenza puntuale* e la *topologia della convergenza uniforme sulle parti limitate di* $\mathfrak{S}[D^*]$. Da (**14**.2) si ha subito:

(**18**.2) *Condizione necessaria e sufficiente perché la successione* (Θ_n) *sia puntualmente convergente su* $\mathfrak{F}[C]$ *é che la successione* (Θ'_n) *delle trasposte sia puntualmente convergente su* $\mathfrak{S}[D^*]$*; e in tale ipotesi possiamo scrivere*

$$(\operatorname*{Lim}_n \Theta_n)' = \operatorname*{Lim}_n \Theta'_n \qquad (\text{rispetto a } \tau_s).$$

Adesso, tenendo conto della (**14**.1) e applicando il teorema 2 dimostrato in [10], p. 73-74 (il quale si estende(¹) senz'altro agli spazi che si esprimono come riunione di una infinità numerabile di spazi $(\mathcal{F})$, con la topologia degli involucri assolutamente convessi di KÖTHE), si arriva a questa notevole conclusione:

(**18**.3) *Se la successione* (Θ_n) *è puntualmente convergente su* $\mathfrak{F}[C]$, *essa è pure uniformemente convergente sulle parti limitate di* $\mathfrak{F}[C]$, *mentre la successione* (Θ'_n) *è uniformemente convergente sulle parti limitate di* $\mathfrak{S}[D^*]$.

Dalle proposizioni (**18**.1) e (**18**.3) possiamo ora desumere, tenendo conto di ciò che avviene per gli spazi di Banach:

(**18**.4) TEOREMA. *Siano* $A_1, A_2, \cdots$ *intorni aperti di* C *e* $A_1^*, A_2^*, \cdots$ *intorni aperti di* C^*, *tali che* $\overline{A}_{n+1} \subset A_n$, $\overline{A}^*_{n+1} \subset A^*_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcap_0^\infty \overline{A}_n = C$, $\bigcap_0^\infty \overline{A}^*_n = C^*$. *Allora, dato, un numero* $\delta > 0$, *ed essendo* ζ *una variabile complessa, la serie* $\sum_0^\infty \zeta_n \Theta_n(\varphi)$ *in* $\mathfrak{F}[C^*]$ *sarà convergente per* $|\zeta| < \delta$, *qualunque sia* $\varphi \in \mathfrak{F}[C]$, *se, e soltanto se, riescono verificate le due condizioni:*

1) *ad ogni numero naturale* p *corrisponde un numero naturale* k_p *in modo che si ha* $\dot{\theta}_n(\lambda) \in [A^*_{k_p}]$, *per* $\lambda \in \Omega - A_p$, $p, n = 1, 2, \cdots$;

2) *ponendo* $M_{n,p} = \max_{\lambda \in \Omega - A_p} \| \dot{\theta}_n(\lambda) \|$ *in* $[A^*_{k_p}]$, *si ha* $\frac{1}{\delta} \geq \sup_p \overline{\lim_n} M_{n,p}^{\frac{1}{n}}$.

(¹) Ringraziamo qui il Prof. KÖTHE che ci ha chiamato l'attenzione su questo punto.

(18.4) COROLLARIO. *Il raggio di convergenza* ρ *della serie* $\sum_0^\infty \zeta^n \Theta_n$ *rispetto alla topologia* τ_s *(e quindi rispetto alla topologia* τ_l*) è dato dalla formula*

$$\rho = \inf_p (\overline{\lim_n} \sqrt[n]{M_{n,p}})^{-1} .$$

Interessa pure registrare la seguente proposizione, che si può stabilire con l'aiuto del teorema di HARTOGS più volte citato:

(18.5) TEOREMA. *Sia* $F(\zeta)$ *una funzione definita in un dominio* Δ *di* Ω *e di controdominio in* $\widetilde{\mathfrak{F}}[C, C^*]$. *Condizione necessaria e sufficiente perché la* $F(\zeta)$ *sia analitica in* Δ *(rispetto a* τ_s *o a* τ_l*) è che l'indicatrice*

$$\dot{f}(\lambda, \zeta) = [F(\zeta)]_z \frac{1}{\lambda - z}, \qquad \text{con } \lambda \in \Omega - C, \zeta \in \Delta,$$

risulti una funzione analitica della coppia (λ, ζ) *nell'insieme* $(\Omega - C) \times \Delta$ *oppure (il che è equivalente) sia rappresentabile da una funzione complessa,* $f(z, \lambda, \zeta)$, *analitica in un aperto di* Ω^3 *contenente* $C^* \times (\Omega - C) \times \Delta$.

19. Cenni sull'analisi spettrale. La famiglia $\widetilde{\mathfrak{F}}[C, C]$ delle applicazioni lineari continue di $\mathfrak{F}[C]$ in sè stesso — che rappresenteremo anche con la notazione $\wedge_c \mathfrak{F}[C]$ — é un *anello vettoriale* (cioè un'algebra) rispetto alle nozioni usuali di somma e di prodotto di operatori. Ma rileviamo subito che l'analisi spettrale in codesto anello si presenta assai più difficile di quanto lo sia per le algebre di Banach. Per esempio, si sa che *nelle algebre di Banach, lo spettro di ogni elemento è limitato;* ora, basta considerare il caso dell'operatore $\mathfrak{D}$ di derivazione o, più generalmente, il caso degli operatori del tipo $\sum_0^n \varphi_i \mathfrak{D}^i$, con $\varphi_i \in_i \mathfrak{F}[C]$, per vedere che lo stesso non accade nell'annello $\wedge_c \mathfrak{F}[C]$ (lo spettro di tali operatori è tutto il piano).

Un esempio molto istruttivo ci è fornito dagli operatori designati dal PINCHERLE col nome di *operazioni normali* e studiati dal FANTAPPIÈ in [13], p. 95-99, sotto condizioni più generali. Un elemento T di $\wedge_c \mathfrak{F}[C]$ (con C limitato) si dice un *operatore normale*, quando trasforma ogni funzione z^n $(n = 0, 1, \cdots)$ in una funzione del tipo $k_n z^n$, essendo k_n un numero complesso dipendente soltanto da T e da n; cioè, in simboli:

(a) $$T_z(z^n) = k_n z^n \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

Per fissare le idee, supponiamo ora $C = \{0\}$. È evidente che un siffatto operatore T trasformerà ogni funzione $\varphi(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, appartenente a $\mathfrak{F}[C]$ (cioè, $0 \leqslant \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$), nella funzione

$$T_z[\varphi(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} k_n a_n z^n \qquad \left(\text{per} \quad |z|^{-1} > \overline{\lim_n} |a_n k_n|^{\frac{1}{n}}\right)$$

e quindi l'indicatrice di T sarà rappresentata dalla funzione

$$\theta(z, \lambda) = T_z \frac{1}{\lambda - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n z^n}{\lambda^{n+1}} = -\frac{1}{\lambda}\gamma\left(\frac{z}{\lambda}\right),$$

$$\text{per } \lambda \neq 0, \quad |z| < |\lambda| \left(\overline{\lim_n} \sqrt[n]{k_n}\right)^{-1}$$

essendo naturalmente $\gamma(t) \equiv \sum_0^{\infty} k_n t^n$, $\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|k_n|} < \infty$.

Reciprocamente ogni funzione del tipo $-\gamma(z/\lambda)/\lambda$, *con* $\gamma \in \mathfrak{F}[C]$, *rappresenta un operatore normale* $T \in \Lambda_c \mathfrak{F}[C]$.

È poi immediato che:

In $\Lambda_c \mathfrak{F}[C]$ *gli operatori normali formano un sotto-anello vettoriale, commutativo.*

Inoltre: *L'operatore normale* T, *definito dalle condizioni* (a), *è reversibile, se, e soltanto se, risultano verificate le due condizione:* 1) $k_n \neq 0$, *per* $n = 0, 1, \ldots$; 2) $\overline{\lim_n} |k_n|^{-\frac{1}{n}} < \infty$. Quindi, gli operatori T soddisfacenti queste condizioni fornano un gruppo moltiplicativo in $\Lambda_c \mathfrak{F}[C]$.

In particolare, qualunque sia il numero complesso λ, anche l'operatore $\lambda - T$ sarà normale, avendosi

$$(\lambda - T)_z(z^n) = (\lambda - k_n) z^n, \qquad n = 0, 1, \ldots;$$

dunque:

I valori di per i quali esiste $(\lambda - T)^{-1}$ *sono quelli che soddisfano le due condizioni:* 1) $\lambda \neq k_n$ *per* $n = 0, 1, \ldots$; 2) $\overline{\lim_n} |\lambda - k_n|^{-\frac{1}{n}} < \infty$.

Osserviamo che i numeri $k_1, k_2 \cdots$ sono gli *autovalori* di T, cioè i valori di λ per i quali l'equazione $T\varphi = \lambda\varphi$ ammette almeno una soluzione $\varphi \neq 0$. D'altronde, gli eventuali valori di λ che rendono $\overline{\lim_n} |\lambda - k_n|^{-\frac{1}{n}} = \infty$ non possono essere che punti limiti dell'insieme degli autovalori, poiché, se $\inf_n |\lambda - k_n| > 0$, verrà $\overline{\lim_n} |\lambda - k_n|^{-\frac{1}{n}} \leqslant 1$. Così:

Lo spettro di T *contiene l'insieme degli autovalori ed è contenuto nell'aderenza di questo insieme.*

Consideriamo ora in particolare il caso in cui $k_n = k^n$, essendo k un numero $\neq 0$: Se $|k| < 1$, lo spettro si riduce all'insieme $\{k_n\}$ degli autovalori, il quale non è chiuso. Se $|k| > 1$, lo spettro è ancora l'insieme $\{k_n\}$ che non è limitato (nè chiuso in Ω). Se $|k| = 1$, lo spettro è finito o infinito, secondo che il numero $\omega = (\log k)/i\pi$ è razionale o irrazionale; in particolare, se ω è algebrico, possiamo affermare che lo spettro si riduce ancora all'insieme degli autovalori, il quale però è denso nella circonferenza di centro 0 e raggio 1.

Dunque, al contrario di quanto avviene per le algebre di Banach, *può darsi che lo spettro di un elemento di* $\Lambda_c \mathfrak{F}[C]$ *non sia chiuso o non sia limitato.*

Si osservi intanto che, nel caso particolare degli operatori normali

T, l'inverso $(\lambda - T)^{-1}$ è sempre una funzione olomorfa di λ *all'interno dell'insieme risolvente.*

Sarebbe questo un fatto generale?

Ecco una questione che lasciamo aperta. Abbiamo potuto soltanto stabilire il seguente criterio, che però non sappiamo se è generale:

(19.1) *Sia* Θ *un elemento di* $\Lambda_c \mathfrak{F}[C]$ *e siano* $A_1, A_2, \cdots$ *intorni aperti di* C *tali che* $\overline{A}_{n+1} \subset A_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $\bigcap_0^\infty \overline{A}_n = C$. *Perché la funzione* $(\lambda - \Theta)^{-1}$ *di* λ *sia definita e analitica in un intorno di un punto* $\lambda_0 \neq \infty$ *dell'insieme risolvente di* Θ, *basta che siano verificate le due condizioni:* 1) *il trasformato di* $[A_n]$ *per mezzo di* $(\lambda_0 - \Theta)^{-1}$ *è contenuto in* $[A_n]$, *qualunque sia* $n = 1, 2, \cdots$; 2) *ponendo* $M_n = \max_{\|\varphi\|=1} \|(\lambda_0 - \Theta)^{-1} \varphi\|$ *in* $[A_n]$ *riesce* $\sup_n M_n < \infty$.

(Per $\lambda_0 = \infty$ si ha una condizione analoga, sostituendo $(\lambda_0 - \Theta)^{-1}$ con Θ).

Osserviamo da ultimo che le considerazioni svolte in questo numero e nel precedente sono intimamente collegate allo studio del calcolo simbolico di Fantappiè. Ricordando ciò che, su tale punto, abbiamo detto in [25] o in [26], possiamo ora formulare in questo modo le nostre conclusioni ivi riportate:

(19.2) Teorema. *Consideriamo due spazi* $\mathfrak{F}[C]$, $\mathfrak{F}[C^*]$, *essendo* C *limitato, e sia* Θ *un elemento di* $\Lambda_c \mathfrak{F}[C^*]$. *Perché, ad ogni* $\varphi \in \mathfrak{F}[C]$, *si possa associare un operatore* $\varphi(\Theta)$ *in modo che la corrispondenza* $\varphi \to \varphi(\Theta)$ *sia un omomorfismo continuo dell'anello* $\mathfrak{F}[C]$ *nell'anello* $\Lambda_c \mathfrak{F}[C]$, *che trasformi la funzione* $\varphi(z) \equiv 1$ *nell'operatore* I *e la funzione* $\varphi(z) \equiv z$ *nell'operatore* Θ, *è necessario e sufficiente che la funzione* $(\lambda - \Theta)^{-1}$ *di* λ *sia definita e analitica in* $\Omega - C$. *Verificata questa condizione, si avrà necessariamente*

$$\varphi(\Theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - \Theta} d\lambda ,$$

essendo Γ *frontiera, orientata in senso positivo, di un conveniente dominio di olomorfia di* φ *ed essendo la topologia adottata in* $\Lambda_c \mathfrak{F}[C]$, *indifferentemente* τ_s *o* τ_l.

20. Sulla caratterizzazione degli operatori lineari bicontinui. In [26], p. 95, abbiamo posto il problema della caratterizzazione delle applicazioni lineari bicontinue di uno spazio $\mathfrak{F}[C]$ su sè stesso, mediante condizioni imposte alle rispettive indicatrici. Possiamo ora dire qualche cosa in più su questo punto.

Sia Θ un elemento di $\tilde{\mathfrak{F}}[C, C^*]$. È facile vedere che, se Θ è un'applicazione biunivoca di $\mathfrak{F}[C]$ su $\mathfrak{F}[C^*]$, allora Θ è anche bicontinua (basta considerare la trasposta, Θ', e ricordare il teorema 5 dimostrato in [2], p. 41). Sia ora $\theta(z, \lambda)$ una funzione complessa, definita in un insieme aperto di Ω^2 contenente $C^* \times (\Omega - C)$, tale che la funzione $\dot{\theta}(\lambda) = \varkappa_z \theta(z, \lambda)$, per $\lambda \in \Omega - C$, sia l'indicatrice di Θ. Allora, perché Θ sia un'applicazione biunivoca di $\mathfrak{F}[C]$ su $\mathfrak{F}[C^*]$, sono condizioni necessarie:

I_1) che la relazione $\displaystyle\int_\Gamma \theta(z, \lambda)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda = 0$ (in un intorno di C^*) implichi $\varphi = \mathbf{0}$, qualunque sia $\varphi \in \mathfrak{F}[C]$ (cioè che si abbia $\overset{-1}{\Theta}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$);

I_2) che la relazione $\displaystyle\int_{\Gamma^*} f(z)\, \theta(z, \lambda)\, dz = 0$, per $\lambda \in \Omega - C$, implichi $f = \mathbf{0}$, qualunque sia $f \in \mathfrak{G}[\Omega - C]$ (cioè la condizione corrispondente a I_1 per la trasposta di Θ);

I_3) che la funzione $\dot{\theta}(\lambda)$, di controdominio in $\mathfrak{F}[C]$, non sia analiticamente prolungabile ad un dominio contenente propriamente $\Omega - C$.

(Nelle I_1 e I_2 denotiamo con Γ e Γ^* le frontiere di convenienti intorni di C e di C^*, rispettivamente).

La condizione I_1 *traduce l'univalenza dell'applicazione* Θ, *mentre la* I_2, *secondo il teorema di Hahn-Banach, significa che il trasformato di* $\mathfrak{F}[C]$ *per mezzo di* Θ *è un insieme denso in* $\mathfrak{F}[C^*]$.

Possiamo inoltre mostrare che dette condizioni sono indipendenti. Siano per esempio C e C^* il cerchio di centro 0 e raggio 1; allora, l'operatore $\mathfrak{D}$ di derivazione verifica I_2 e I_3 ma non I_1; l'operatore $\mathfrak{J}$ d'integrazione (così definito: $\mathfrak{J}\varphi = \int_0^z \varphi(z)\, dz$) verifica I_1 e I_3 ma non I_2; finalmente, l'operatore normale T, tale che $T_z[\varphi(z)] = \varphi(kz)$, con $|k| < 1$, verifica I_1 e I_2 ma non I_3.

Ma la questione formulata in [29] è precisamente questa:

Il prodotto logico delle condizioni I_1, I_2, I_3 *è o no una condizione sufficiente perché la* Θ *risulti un'applicazione biunivoca di* $\mathfrak{F}[C]$ *su* $\mathfrak{F}[C^*]$?

Non siamo ancora in grado di rispondere completamente a tale questione; possiamo soltanto aggiungere qualche contributo allo studio del problema.

Supponiamo $C = \{0\}$ e consideriamo l'operatore normale T la cui indicatrice è $e^{z/\lambda}/\lambda$. Si vede facilmente che T verifica I_1, I_2, I_3 e non è tuttavia un'applicazione di $\mathfrak{F}[C]$ su $\mathfrak{F}[C]$; possiamo dire tutt'al più

che T ammette una trasformazione inversa (univoca) definita in una varietà lineare $\mathfrak{L}$ *densa* in $\mathfrak{F}[C]$; d'altronde, si può riconoscere che T^{-1} è la *trasformazione di Laplace* (v. [26], p. 101), cioè:

$$T_z^{-1}[\varphi(z)] = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{z}} \varphi(t)\, dt\,, \qquad \text{per } \varphi \in \mathfrak{L}\,.$$

Quindi, nel caso particolare in cui l'insieme C *si riduce ad un punto, le condizioni* I_1, I_2, I_3 *non bastano perché* Θ *sia un'applicazione biunivoca di* $\mathfrak{F}[C]$ *su* $\mathfrak{F}[C^*]$.

Possiamo intanto aggiungervi quest'altra condizione:

I_3^*) *Sia* α *un punto di* C. *Per ogni sucessione* (k_n) *di numeri complessi tale che* $\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|k_n|} = \infty$, *la serie di potenze della variabile complessa* t *e di coefficienti in* $\mathfrak{F}[C^*]$:

$$\sum_{n=0}^\infty t^n k_n \frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\frac{1}{\lambda}\dot{\theta}\left(\alpha + \frac{1}{\lambda}\right)\right]_{\lambda=0} \qquad (\text{se } \alpha \neq \infty)$$

oppure

$$\sum_{n=0}^\infty t^n k_n \frac{d^n}{d\lambda^n}\dot{\theta}(\lambda)\Big|_{\lambda=0} \qquad (\text{se } \alpha = \infty)$$

ha raggio di convergenza nullo.

Per vedere che tale condizione è difatti necessaria basta osservare che la funzione di λ di coefficienti in $\mathfrak{F}[C]$:

$$\frac{1}{\lambda - z} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(z-\alpha)^n}{(\lambda-\alpha)^{n+1}} \qquad (\text{se } \alpha \neq \infty)$$

opurre

$$\frac{1}{\lambda - z} = -\sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^n}{z^{n+1}} \qquad (\text{se } \alpha = \infty),$$

verifica detta condizione, la quale d'altronde *è logicamente costruita in termini della struttura algebrico-topologica dello spazio funzionale* $\mathfrak{F}[C]$, *cioè in termini di «somma», «operatori scalari» e «limite»*. (Si applica qui il nostro metodo logicomatematico concernente gli automorfismi di un sistema arbitrario).

Ma è facile vedere che:

Nel caso in cui l'insieme C *ha più di un punto, la condizione* I_3^* *è implicita nela condizione* I_3. Rimangono però da risolvere i seguenti quesiti:

1) Esistono funzioni $\dot{\theta}(\lambda)$ di controdominio in $\mathfrak{F}[C]$, che siano

analitiche in tutto il piano-sfera, Ω, senza ridursi ad una costante? (Bisogna badare che non si tratta di funzioni *numeriche*).

2) Il prodotto logico delle condizioni I_1, I_2, I_3 (nel caso in cui C ha più di un punto) o delle condizione I_1, I_2, I_3, I_3^* (nel caso in cui C ha un solo punto) è una condizione sufficiente perché Θ sia un'applicazione biunivoca di $\mathfrak{F}[C]$ su $\mathfrak{F}[C^*]$?

Osserviamo da ultimo che questo studio è collegato all'analisi spettrale. Infatti, lo spettro di un elemento U di $\wedge_c \mathfrak{F}[C]$ conterrà:

a) i valori di λ per cui l'indicatrice di $\lambda - U$ non verifica I_1 (*autovalori di* U);

b) i valori di λ per cui l'indicatrice di $\lambda - U$ non verifica I_2 (*autovalori di* U');

c) i valori di λ per cui l'indicatrice di $\lambda - U$ non verifica I_3 o I_3^*.

Vi sono altri punti nello spettro di U? Ecco la questione che lasciamo aperta.

NOTE FINALI

I. Il Prof. NACHBIN ci ha comunicato una dimostrazione semplicissima del fatto che lo spazio $\mathfrak{F}[C]$ non è metrizzabile (Egli aveva già segnalato questo fatto in [24]). Presenteremo qui l'idea del NACHBIN leggermente modificata, per dimostrare che, rispetto alla topologia $\tau^{(0)}$, non è verificata in $\mathfrak{F}[C]$ la condizione $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$. Supponiamo $\infty \notin C$ e prendiamo una successione (α_n) di punti di $\Omega - C$ tali che $\alpha_n \neq \infty$, $\lim \alpha_n \in C$; allora, se poniamo $\varphi_{mn}(z) = [m(z-\alpha_n)]^{-1} + n^{-1}$, per $z \neq \alpha_n$, $m, n = 1, 2, \cdots$, resterà così definita una doppia sucessione (φ_{mn}) di elementi di $\mathfrak{F}[C]$; d'altronde si ha $(\operatorname{Lim}_m \varphi_{mn})(z) \equiv 1/n$ $(n = 1, 2 \ldots)$, $\lim 1/n = 0$, quindi l'origine appartiene *all'aderenza dell'aderenza* dell'insieme $\{\varphi_{mn}\}$, rispetto a $\tau^{(0)}$ — ma non esiste nessuna successione di elementi di questo insieme convergente allo zero, dato che, per infiniti valori distinti di n, le funzioni φ_{mn} non hanno un comune dominio di olomorfia.

Se $\infty \in C$, basta prendere $\alpha \notin C$ e osservare che la corrispondenza $\varphi(z) \to \varphi(\alpha + z^{-1}) z^{-1}$ è un isomorfismo di $\mathfrak{F}[C]$ *su* $\mathfrak{F}[C^*]$, rappresentando con C^* l'immagine di C per mezzo della trasformazione $1/(z-\alpha)$.

Il SILVA DIAS é arrivato più lontano in [7], dimostrando che *non esiste nessuna topologia di spazio di Fréchet su* $\mathfrak{F}[C]$, *rispetto alla quale i funzionali lineari continui siano i funzionali lineari anali-*

tici di Fantappiè. E così la questione della possibilità o meno d'introdurre in $\mathfrak{F}[C]$ una metrica in modo utile rimane definitivamente chiusa.

In [24] il NACHBIN stabilisce un interessante criterio generale per decidere se lo *spazio* (L) *riunione* (v. [26] e [27]) di una data famiglia numerabile di spazi (L^*) è o no uno spazio (L^*); e, applicando codesto criterio, mostra che lo spazio $\mathfrak{F}[C]$, con la definizione (**4**.1) di limite, è uno spazio (L^*). Questo ultimo risultato, che abbiamo ritrovato in [27] senza conoscere il lavoro di NACHBIN, è ormai superato dai risultati di KÖTHE, SILVA DIAS e GROTHENDIECK.

II. Sia S uno spazio localmente convesso *separato* (con scalari complessi) e si abbia una funzione $f(\lambda)$, di controdominio in S, definita e analitica in un dominio Δ di Ω. Vogliamo dimostrare che, *se la* $f(\lambda)$ *è nulla in una successione* (α_n) *di punti di* Δ *che abbia un punto di accumulazione in* Δ, *essa è nulla dappertutto in* Δ, — supponendo il teorema già dimostrato per il caso numerico (risultato classico).

Basta all'uopo impiegare il teorema di Hahn-Banach. Supponiamo verificata l'ipotesi; allora, essendo u' un elemento del duale S' di S, $u'[f(\lambda)]$ sarà una funzione *numerica* di λ, analitica in Δ e *nulla* nei punti α_n di Δ; si avrà quindi $u'[f(\lambda)] = 0$ su Δ per ogni $u' \in S'$, il che implica $f(\lambda) = 0$ su Δ.

Il principio dell' unicità del prolungamento analitico è dunque vero per le funzioni della variabile complessa di controdominio in S.

III. Nelle considerazioni del § **3** abbiamo badato soprattutto al caso delle funzioni *di dominio e di controdominio contenuti in spazi funzionali analitici*. Tuttavia possiamo pensare ad una formulazione assai più generale dei risultati esposti. Così:

Il teorema (**12**.2) *può essere esteso al caso in cui* S *è un qualsivoglia spazio localmente convesso separato (complesso).*

Difatti, si sa che la topologia τ di uno spazio localmente convesso può sempre introdursi mediante una famiglia $\{p_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ di *semi-norme*. (Si chiama *semi-norma* in S ogni funzione reale non negativa, $p(x)$, definita in S e soddisfacente le condizioni: $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, per $x, y \in S$, $\lambda \in \mathbf{K}$). Inoltre, la famiglia $\{p_i\}$ può sempre essere scelta in modo che, dati comunque $i, j \in \mathfrak{I}$, esista $k \in \mathfrak{I}$ tale che: $p_i(x) \leq p_k(x)$, $p_j(x) \leq p_k(x)$ per ogni $x \in S$; allora, se poniamo $V_{i,\delta}$ = *insieme degli* x *tali che* $p_i(x) \leq \delta$, con $i \in \mathfrak{I}$, $\delta > 0$, la famiglia $\{V_{i,\delta}\}$ così definita sarà un sistema fondamentale d'intorni dell'origine per la topologia τ. Dunque, se rappresentiamo con τ_i la

topologia corrispondente alla norma p_i e con S_i l'insieme S munito della topologia τ_i, lo spazio S (con la topologia τ) sarà lo *spazio intersezione* di tutti gli S_i, per $i \in \mathfrak{I}$ (v. NOTA del n. 2). D'altronde, rappresentando con V_i la varietà lineare degli elementi x di S tali che $p_i(x) = 0$, e con S_i^* lo spazio quoziente S_i/V_i, si ha che S_i^* è uno *spazio normato* — il quale può essere prolungato in uno *spazio di Banach*, che rappresenteremo con $\widetilde{S}_i$. Denotiamo con $\varkappa_i$ l'applicazione canonica di S su S_i^* (applicazione lineare continua di S in $\widetilde{S}_i$). Rappresentando ora con R un altro spazio localmente convesso separato (complesso) e considerando una funzione $F(x)$ definita in un dominio D di R e di controdominio in S, è facile vedere che:

a) *La* $F(x)$ *è continua in* D (*rispetto a* τ), *se, e soltanto se, le funzione* $\varkappa_i[F(x)]$ *di* x *sono tutte continue in* D, *rispetto alla topologia di* $\widetilde{S}_i$ (*per* $i \in \mathfrak{I}$).

b) *Se la* $F(x)$ *è analitica nel senso di Fantappiè in* D (*rispetto a* τ), *anche la funzione* $\varkappa_i[F(x)]$ *di* x *è analitica nel senso di Fantappiè in* D (*rispetto alla topologia di* $\widetilde{S}_i$) *qualunque sia* $i \in \mathfrak{I}$.

Da questi due fatti risulta subito l'estensione cui abbiamo accennato sopra.

Ma vi è de più:

Il teorema (**12**.2) *può venire esteso al caso in cui* R *è uno spazio di Fréchet.*

Infatti, si sa che la topologia τ di uno spazio ($\mathcal{F}$) può essere introdotta mediante una *successione crescente* (p_n) di semi-norme [cioè, $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ per ogni $x \in R$, $n = 1, 2, \cdots$]. Dunque, la dimostrazione del lemma (**12**.1) sussisterà con leggere modifiche: basterà osservare che, essendo (x_n^*) una successione di Cauchy, esisterà, per ogni numero naturale ν, un altro numero naturale k_ν tale che

$$p_{\nu!}(x_m^* - x_n^*) < \frac{1}{\nu!}, \quad \text{per } m, n \geq k_\nu;$$

così, ponendo $\bar{x}_n = x_{k_n}^*$, per $n = 1, 2, \cdots$, la serie $\bar{x}_1 + \sum_1^\infty t^n(\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n)$ avrà sicuramente raggio di convergenza infinito, e tutto il resto della dimostrazione potrà svolgersi nello stesso stile. Quanto alla dimostrazione di (**12**.2), bisognerà rifare una parte dei ragionamenti dello ZORN in [34] e [35].

IV. Per raggiungere una perfetta unità, rimarrebbe ancora da vedere come allargare le ipotesi sullo spazio R, in modo da racchiudere come caso particolare il teorema (**13**.1), in cui al posto di R si consi-

dera uno spazio $\mathfrak{F}[C]$, *che non è uno spazio* $(\mathcal{F})$. Rileviamo che, nella dimostrazione di (**13**.1), interviene in modo essenziale il risultato di Köthe che ci ha permesso d'identificare le topologie $\tau^{(1)}$ e $\tau^{(2)}$ (n. 4). È facile vedere che il teorema (**13**.1) si estende senz'altro al caso in cui R si esprime come riunione di spazi $(\mathcal{F})$, adottando il secondo dei concetti definiti al n. 2. Soltanto si deve domandare:

In quali casi lo spazio riunione (nel senso considerato) di una famiglia di spazi $(\mathcal{F})$ *è uno spazio localmente convesso?*

Oppure:

Quali condizioni debbono verificarsi perché il duale forte di uno spazio $(\mathcal{F})$ *sia esprimibile, nel senso considerato, come riunione di spazi* $(\mathcal{F})$*?*

Ora è da osservare che ogni spazio funzionale analitico $\mathfrak{F}[C]$ possiede la seguente proprietà, che forse costituisce una loro caratterizzazione astratta:

α) *È uno spazio localmente convesso che si può esprimere come involucro (nel senso di Köthe) di una successione crescente,* (S_n), *di spazi di Banach tali che:* 1) *la topologia indotta su* S_n *dalla topologia* τ_{n+1} *di* S_n *è meno fina della topologia* τ_n *di* S_n*;* 2) *ogni sfera (chiusa) di* S_n *é compatta rispetto a* τ_{n+1}.

Si potrebbe forse dimostrare, sfruttando una parte dei ragionamenti svolti in [10], che ogni spazio localmente convesso S, in cui sia verificata la proprietà α) è rappresentabile come spazio-riunione di spazi de Banach (secondo la definizione (**2**.3)). Si avrebbe così un modo più diretto di stabilire i risultati contenuti in [22]. Ecco uno schema di dimostrazione:

In ogni spazio S_n la norma p_n può essere scelta in modo che $p_n(x) \geq p_{n+1}(x)$, per $x \in S_n$. Poniamo:

$$C_n = \text{sfera chiusa di centro } \mathbf{0} \text{ e raggio } n \text{ in } S_n,$$

e rappresentiamo con τ'_n la topologia indotta su C_n da τ_{n+1} (topologia di S_{n+1}). Allora, si può vedere che la topologia indotta su C_n da τ'_{n+1} è *identica* a τ'_n, e, ragionando nello stile[1] della dim. della prop. 2 in [10],

---

(1) Si cercherebbe di stabilire che, per ogni intorno V di $\mathbf{0}$ in $[C_n, \tau'_n]$, esiste almeno un intorno U di $\mathbf{0}$ in $[S, \tau]$ tale che $U \cap C_n \subset V$. Supponiamo V aperto e sia U_0 un intorno chiuso di $\mathbf{0}$ in $[C_n, \tau'_n]$ contenuto in V; allora U_0 e $C_n - V$ sono compatti in $[C_{n+1}, \tau'_{n+1}]$ e hanno perciò una distanza $\delta > 0$; vi sarà dunque un intorno W_1 di $\mathbf{0}$ in $[C_{n+1}, \tau'_{n+1}]$ tale che, rappresentando con U_1 l'involucro assolutamente convesso di $U_0 \cup W_1$, si ha $\overline{U}_1 \cap (C_n - V) = 0$. Quindi U_1 e $C_n - V$ avranno distanza non nulla in $[U_{n+2}, \tau'_{n+2}]$, ecc. La riunione U degli U_n così ottenuti risponde alla questione.

si potrebbe stabilire che, fra tutte le topologie di spazio localmente convesso su S che inducono su ogni C_n una topologia meno fina di τ'_n, esiste una, τ, meno fina delle altre, che induce su ogni C_n la topologia τ'_n; d'altronde, τ sarebbe anche l'involucro delle topologie τ_n secondo KÖTHE. Poi, un ragionamento analogo a quello fatto per la prop. 4 (in [10]) ci mostrerebbe che ogni parte limitata di S (rispetto a τ) è contenuta in uno dei C_n e che, pertanto, il duale forte di S è uno spazio $(\mathscr{F})$. Il th. 2 e quindi il th. 3 sarebbero estensibili allo spazio S (munido della topologia τ); e lo stesso si potrebbe poi dire per il th. 4 e la prop. 10. Dunque, lo spazio S (con la topologia τ) sarebbe riflessivo e il suo duale forte sarebbe uno spazio $(\mathscr{M})$. Finalmente, applicando il th. 5 si avrebbe che τ è la più fina *topologia* (in senso normale) su S, che induce su ogni S_n una topologia meno fina di τ_n.

Ma non rischiamo di uscire dal campo congetturale, perché non abbiamo fatto in tempo a controllare tutti i ragionamenti.

V. Si presenta pure la possibilità di estendere alcuni dei risultati fondamentali stabiliti in [26]. Per esempio, abbiamo lì dedotta l'espressione generale delle applicazioni lineari continue di $\mathfrak{F}[C]$ in uno spazio di Banach, S, e abbiamo poi precisato (n. 27) le condizioni in cui è possibile l'estensione di quel risultato ad altre categorie di spazi S (ne abbiamo fatte alcune di tali estensioni). Ora, quelle condizioni sono tutte verificate nel caso in cui S *è un qualsivoglia spazio localmente convesso (sul corpo complesso), che sia non solo separato, ma anche completo rispetto alle successioni.* Difatti, impiegando le notazioni τ, S_i, S_i^*, $\varkappa_i$, $\mathfrak{I}$ come nella nota **III**, è facile vedere che, *essendo* S *completo rispetto alle successioni*:

c) *Condizione necessaria e sufficiente perché in* S *una successione* (x_n) *sia convergente è che, per ogni* $i \in \mathfrak{I}$, *la successione* $(\varkappa_i(x_n))$ *sia convergente in* S_i^*, *avendosi in questa ipotesi* $\lim_n \varkappa_i(x_n) = \varkappa_i(\lim_n x_n)$.

Inoltre, dal fatto che S sia separato, risulta che:

d) *Dati* $x, y \in S$, *si ha* $x = y$, *se (e soltanto se)* $\varkappa_i(x) = \varkappa_i(y)$ *per ogni* $i \in \mathfrak{I}$.

Si riconosce adesso che pure i teoremi (**10**.2) e (**15**.1) possono estendersi al caso in cui S è un qualsiasi spazio localmente convesso separato e *completo rispetto alle successioni.* In particolare si vede che, in tale ipotesi, diventa vera la reciproca della prop. b) della nota **III**.

Infine, il teorema (**19**.2) si può estendere considerando al posto di

$\mathfrak{F}[C^*]$ un qualsiasi spazio S localmente convesso separato e completo rispetto alle successioni — e in tale modo si raggiunge quell' unità dottrinale cui avevamo aspirato nei nostri lavori precedenti.

VI. Le considerazioni svolte nel presente lavoro riguardano soltanto gli spazi funzionali $\mathfrak{F}[C]$ constituiti da funzioni $\varphi(z)$ di *una* variabile complessa. L'estensione al caso delle funzioni di più variabili complesse non presenta difficoltà concettuali, quando l'insieme caratteristico C è della forma $C = C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_m$, essendo $C_1, \cdots, C_m$ sotto-insiemi chiusi di Ω, distinti da O e da Ω. Se invece C è un sotto-insieme chiuso di Ω^m (distinto da O e da Ω^m) che non si esprime come prodotto cartesiano di sotto-insiemi di Ω, vi è una difficoltà in cui si sono imbattuti il Prof. FANTAPPIÈ e i suoi discepoli, risultante dal fatto che la formula integrale di CAUCHY non si applica più tale e quale. Tuttavia riteniamo che tutti i risultati esposti possono estendersi anche a questo caso, sotto riserva di una modificazione del tipo dell'espressione generale dei funzionali lineari continui. Questo farà l'oggetto di un prossimo lavoro, che intendiamo scrivere al riguardo.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALEXANDROFF, P. und HOPF, H — *Topologie.* Springer, Berlim, 1935.

[2] BANACH, S. — *Théorie des Opérations Linéaires.* Warsaw, 1932.

[3] BOURBAKI — *Topologie Générale.* Act. Scient. Ind. 145, Hermann, Paris (1934).

[4] CACCIOPPOLI, R. — *Sui funzionali lineari nel campo delle funzioni analitiche,* (6) vol. **13** (1931), p. 263-266.

[5] CACCIOPPOLI, R. — *Suifunzionali lineari,* ecc. (6) vol **15** (1931), p. 713-714.

[6] CARAFA, M. — *Sulle regioni connesse dello spazio funzionale analitico e sulla rappresentazione dei funzionali polinomiali.* Rend. Mat. Pura e App. Serie V, vol. **9**, p. 478-492 (1950).

[7] DIAS, C. L. DA SILVA — *Sobre o conceito de funcional analitico.* Anais da Academia Brasileira de Ciências, Tomo XV, n. 1, 1943).

[8] DIAS, C. L. DA SILVA — *Espaços vectoriais topológicos e sua aplicação nos espaços funcionais analiticos.* Tese de concurso. São Paulo (1951).

[9] DIEUDONNÉ, J. — *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **59** (1942), p. 107-139.

[10] DIEUDONNÉ, J. et SCHWARTZ, L. — *La dualité dans les espaces* (F) *et* (LF). Ann. Inst. Fourier, **1** (1949), p. 61-101.

[11] DUNFORD, N. — *Spectral theory.* Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), p. 637-651.

[12] DUNFORD, N. — *Spectral theory I. Convergence to projections.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. **54** (1943), p. 185-217.

[13] FANTAPPIÈ, L. — *I funzionali analitici.* Mem. Acc. Lincei (1930).

[14] FANTAPPIÈ, L. — *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici.* Mem. Acc. Italia. vol. **12** (1941) p. 617-706.

[15] FANTAPPIÈ, L. — *Le calcul des matrices.* C. R. Acad. Sc. Paris, vol. **18** (1928), p. 619-621.

[16] FANTAPPIÈ, L. — *La giustificazione del calcolo simbolico.* Mem. Acc. Italia, vol. **1**, (1930), p. 25-57.

[17] FANTAPPIÈ, L. — *Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti constanti* Rend. Circ. Mat. Palermo, Tomo **42** (1933).

[18] HILLE, E. — *Functional analysis and semi-groups.* Amer. Math. Soc. Coll. Pub. New York (1948).

[19] VAN HOVE, L. — *Topologie des espaces fonctionnels analitiques et des groupes infinis de transformations.* Da pubblicare nelle Memorie della «Académie Royale de Belgique».

[20] KÖTHE, G. — *Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume.* Math. Zeit., vol **51** (1948), p. 317-345.

[21] KÖTHE, G. — *Über zwei Sätze von Banach.* Math. Zeit. vol. **53** (1950), 203-209.

[22] KÖTHE, G. — *Dualität in der Funktionentheorie.* Da pubblicare nel «J. reine u. angew. Math.».

[23] KÖTHE, G. — *Die Randverteilungen analytischer Funktionen.* Math. Zeit., vol. **57** (1952) p. 13-33.

[24] NACHBIN, L. — *Sobre el axioma de las succesiones no convergentes en algunos espacios topológicos lineares.* Rev. de la Un. Mat. Argentina, vol. **12**, p. 129-150 (1947).

[25] SEBASTIÃO E SILVA, J. — *L'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche.* Mem. Acc. Lincei, serie 8, vol. **1** (1947), p. 207-240 (preceduta da una nota riassuntiva pubblicata nei Rend. Accad. Lincei, 1946).

[26] SEBASTIÃO E SILVA, J. — *As funções analíticas e a Análise funcional.* Tesi di di dottorato, 1948 (pubblicata in «Port. Math.» nel 1950).

[27] SEBASTIÃO E SILVA, J. — *Sobre a topologia dos espaços funcionais analíticos.* Rev. da Fac. Ciências Lisboa, 2.ª série, vol. **1** (1950) p. 23-102.

[28] SIERPÍNSKI, W. — *Introduction to general Topology.* Toronto (1934).

[29] TAYLOR, A. E. — *Analytic functions in general analysis.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, série 2, vol. **6** (1937), p. 277-292.

[30] TAYLOR, A. E. — *On the properties of analytic functions in abstract spaces.* Math. Annalen, vol. **115** (1938), 574-593.

[31] TAYLOR, A. E. — *Analysis in complex Banach spaces.* Bull. Amer. Mat. Soc., vol. **49** (1943), p. 652-669.

[32] TEICHMÜLLER, O — *Über die Stetigkeit linearer analitischer Funktionale.* Deutsche Mathematik, 1936, p. 350.

[33] TÖPLITZ, O. — *Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie.* Comm. Math. Helv., vol. **23** (1943), 222-242.

[34] ZORN, M. A. — *Characterization of analytic functions in Banach spaces.* Ann. of Math., serie 2, vol. **46** (1945), 583.

[35] ZORN, M. A. — *Derivatives and Fréchet differentials.* Bull. Amer. Math. Soc., vol. **52** (1946) 133-137.

A questa lista dovremo aggiungere:

A. GROTHENDIECK — *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, da pubblicare in «J. reine. u. angew Math.»

Ma non abbiamo potuto finora vedere questo lavoro, citato dal KÖTHE in [23].

ERRATA CORRIGE

Pagina	Riga	Dove si legge	Si legga
3	10 e 15	[21]	[22]
9	2	S	S_i
9	11	il sistema	i sistemi
12	12	del piano-sfera	di C
12	13	A	[A]
19	14	$C \subset C^*$	$C \supset C^*$
24	5	x_{k_n}	$x^*_{k_n}$
24	13 e 17	$\Sigma_1^\infty t_n u_n$	$\Sigma_0^\infty t^n u_n$
24	15	$\bar{x}^{n+1} - \bar{x}^n$	$\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n$
25	6	$\frac{d^n}{dt_n}$	$\frac{d^n}{dt^n}$