

ATTI
DELLA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLIII

1956

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Volume XXI - 2° semestre 1956

Fascicolo 3-4 - Ferie 1956 (Settembre-ottobre)



ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1956

Matematica. — *Sui funzionali che sono funzioni di funzionali lineari dei loro argomenti.* Nota di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, presentata^(*) dal Corrisp. L. FANTAPPIÈ.

Si riprende in questa Nota un interessante problema, studiato dal professore Fantappiè in [3]⁽¹⁾, pp. 198–207, relativamente al suo spazio di funzioni localmente analitiche. Il problema viene ora impostato e risolto in piena generalità, cioè per qualsivoglia spazio vettoriale complesso, anche senza topologia.

La struttura dei funzionali analitici che sono funzioni di funzionali lineari è precisata dal teorema 1, diverso da quello espresso dal Fantappiè con le equazioni (47) e (54) in [3], n. 93. È tuttavia da rilevare che, in parte, la dimostrazione del teorema 1 è basata su idee simili a quelle che hanno condotto il Fantappiè ai suddetti risultati.

Al n. 3 consideriamo poi il problema analogo per il caso degli operatori a codominio contenuto in uno spazio funzionale analitico. I risultati non sono conseguenze immediate di quelli precedenti; anzi, si presentano fatti nuovi che costringono a considerare funzioni meromorfe, dove prima si avevano soltanto funzioni olomorfe.

1. Per comodità del lettore, richiameremo alcune delle nozioni necessarie all'intelligenza di ciò che segue; per i dettagli, v. [1], [2], [4] e [6].

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1956.

(1) I numeri tra parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia che si trova alla fine di questa Nota.

Sia S uno spazio vettoriale qualunque sul corpo complesso \mathbf{C} . Si dice che un insieme DCS è *finitamente aperto*, se, comunque si prendano $x \in D$, $h_1, \dots, h_n \in S$ (in numero finito arbitrario), le n -uple $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ di numeri complessi, per le quali riesce $x + \sum_i \lambda_i h_i \in D$, formano un insieme aperto nello spazio cartesiano \mathbf{C}^n (cfr. [4], def. 4, 3, 1).

Supponiamo verificata questa condizione rispetto a D e sia E uno spazio vettoriale topologico, localmente convesso⁽²⁾, sul corpo \mathbf{C} .

Una funzione $f(x)$, definita in D e a codominio in E , si dice *analitica* in D nel senso di Gateaux generalizzato (o, semplicemente, *G-analitica* in D) se, per ogni $x \in D$ e ogni $h \in S$, la funzione $F(x + \lambda h)$, della variabile complessa λ , riesce analitica in un intorno di O . Si dimostra allora che, per ogni $x \in D$, esiste un'applicazione lineare L_x di S in E , tale che

$$L_x(h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda h) - f(x)}{\lambda}, \quad \text{qualunque sia } h.$$

Chiameremo *derivata di $f(x)$ in x* quest'applicazione lineare e la denoteremo con $f'(x)$. Scriveremo dunque $f'(x)h = L_x(h)$, per ogni $h \in S$. Rappresentando con $\Lambda(S, E)$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari di S in E , con la topologia della convergenza puntuale in S , si avrà quindi

$$f'(x) \in \Lambda(S, E), \quad \text{per ogni } x \in D.$$

Si dimostra poi che anche la funzione $f'(x)$ di x è *G-analitica* in D ; la sua derivata, $f''(x)$, è per ogni x , un'applicazione lineare di S in $\Lambda(S, E)$ e può quindi considerarsi come applicazione bilineare di S^2 in E . Scriveremo $f''(x) \cdot (h, k)$ con lo stesso significato di $(f''(x)h)k$; in particolare, per $h = k$, scriveremo $f''(x) \cdot h^{[2]}$ come abbreviazione di $f''(x) \cdot (h, h)$. E così di seguito. È facile allora vedere che, per ogni h tale che l'insieme dei punti $x + \lambda h$, con $|\lambda| \leq 1$, sia contenuto in D , vale lo sviluppo

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \cdot h + \dots,$$

dove $f^{(n)}(x)$, *derivata n -esima* di $f(x)$, si può considerare, per ogni $x \in D$, un'applicazione multi-lineare di S^n in E data dalla formula

$$f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n) = \left[\frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} f(x + \sum_i \lambda_i h_i) \right]_{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}.$$

La funzione $f^{(n)}(x)(h_1, \dots, h_n)$ di h_1, \dots, h_n è manifestamente simmetrica. Per $h_1 = \dots = h_n = h$, l'indichiamo abbreviatamente con $f^{(n)}(x)h^{[n]}$.

Nei due casi considerati nel seguito lo spazio E sarà: 1° la retta complessa, \mathbf{C} ; 2° uno spazio funzionale analitico, $\mathfrak{A}(\mathbf{C})$. Nel primo caso, le funzioni nume-

(2) Si chiama *spazio vettoriale topologico* ogni spazio vettoriale E , reale o complesso, nel quale sia definita una struttura topologica che renda continue le operazioni di addizione e di moltiplicazione scalare. Si dice poi che E è *localmente convesso*, se la topologia di E può essere definita a mezzo di un sistema d'intorni dell'origine costituito da insiemi *convessi*.

riche di codominio in E saranno dette, per brevità, *funzionali*. Nel secondo caso, verranno usati i termini « applicazione » e « funzione », col significato generale.

2. Designi ancora S uno spazio vettoriale qualunque sul corpo complesso. Vale allora il

TEOREMA. I. - Sia $F(u)$ un funzionale definito e G -analitico in un insieme finitamente aperto, $D \subset S$, e siano $L_1(u), L_2(u), \dots, L_n(u)$, n funzionali lineari definiti in S , linearmente indipendenti. Perché il funzionale $F(u)$ sia del tipo.

$$F(u) = f(L_1(u), L_2(u), \dots, L_n(u)), \quad \text{per ogni } u \in D,$$

essendo $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ una funzione complessa delle n variabili complesse z_1, z_2, \dots, z_n , è necessario e sufficiente che la derivata di $F(u)$ sia, per ogni $u \in D$, una combinazione lineare di L_1, \dots, L_n , cioè del tipo

$$F'(u) = \varphi_1(u) L_1 + \varphi_2(u) L_2 + \dots + \varphi_n(u) L_n,$$

essendo $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u)$ funzionali definiti in D . Allora la $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ sarà olomorfa nell'aperto A di \mathbf{C}^n costituito dai punti $\mathbf{z} = (L_1(u), \dots, L_n(u))$, con $u \in D$.

Dimostrazione. - a) Supponiamo che esista una funzione $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ definita in A tale che

$$F(u) \equiv f(L_1(u), L_2(u), \dots, L_n(u)).$$

Cominceremo col mostrare che questa funzione è necessariamente olomorfa in D . Sia $\mathbf{z}^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ un punto arbitrario di A , con $z_i^0 = L_i(u_0)$ ($i = 1, \dots, n$) e $u_0 \in D$. Siccome, per ipotesi, i funzionali L_1, \dots, L_n sono linearmente indipendenti, possiamo scegliere, per ogni indice i , un elemento e_i di S tale che ⁽³⁾

$$L_i(e_i) = 1, \quad L_k(e_i) = 0, \quad \text{per } i \neq k.$$

Dunque $L_i(u^0 + \lambda e_i) = z_i^0 + \lambda$, $L_k(u^0 + \lambda e_i) = z_k^0$ per $i \neq k$ e ogni scalare λ . Allora, dato che il funzionale $F(u)$ è G -analitico, la funzione di λ

$$\Phi_i(\lambda) = F(u_0 + \lambda e_i) = f(z_1^0, \dots, z_{i-1}^0, z_i^0 + \lambda, z_{i+1}^0, \dots, z_n^0)$$

dev'essere analitica in un intorno di O . Ma questo significa che la $f(z_1, \dots, z_n)$ è analitica per rapporto a ciascuna delle sue variabili, il che, secondo un noto teorema di Hartogs, permette di affermare che la $f(z_1, \dots, z_n)$ è analitica nel complesso delle sue variabili (in D).

Ciò posto, è facile vedere, applicando direttamente la definizione di derivata, che

$$F'(u) = \frac{d}{du} f(L_1(u), \dots, L_n(u)) = \frac{\partial f}{\partial z_1} L_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n} L_n,$$

(3) Vedi per esempio [1], pp. 51-56.

onde, ponendo $\varphi_i(u) = f'_{z_i}(L_1(u), \dots, L_n(u))$, per $i = 1, 2, \dots, n$:

$$F'(u) = \varphi_1(u) L_1 + \varphi_2(u) L_2 + \dots + \varphi_n(u) L_n.$$

b) Supponiamo, reciprocamente, che la derivata $F'(u)$ sia di questo tipo. Allora, si avrà, per ogni $u \in D$ e ogni coppia (h, k) di elementi di S ,

$$F''(u)(h, k) = (\varphi'_1(u) h)(L_1 k) + \dots + (\varphi'_n(u) h)(L_n k),$$

dove, per ogni determinazione di u, h, k , il termine $(\varphi'_i(u) h)(L_i k)$, designa il prodotto, nel senso ordinario, del numero $\varphi'_i(u) h$ per il numero $L_i k$. Ma, siccome l'operatore bilineare $F''(u)$ dev'essere simmetrico, si avrà

$$\sum_{i=1}^n (\varphi'_i(u) h)(L_i k) = \sum_{j=1}^n (\varphi'_j(u) k)(L_j h)$$

e, data l'indipendenza lineare degli L_i , si può determinare, per ogni i , un $k_i \in S$ tale che $L_i(k_i) = 1$, $L_j(k_i) = 0$ per $i \neq j$. Quindi

$$\varphi'_i(u) h = \sum_{j=1}^n (\varphi'_j(u) k_i)(L_j h), \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, n,$$

onde, ponendo $\varphi_{ij}(u) = \varphi'_j(u) k_i$:

$$\varphi'_j(u) = \varphi_{1j}(u) L_1 + \dots + \varphi_{nj}(u) L_n, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

cioè: le derivate prime dei coefficienti $\varphi_i(u)$ dovranno essere, anch'esse, combinazioni lineari degli L_j (i cui coefficienti dipenderanno, naturalmente, da u). E si avrà quindi

$$F''(u)(h, k) = \sum_{i,j=1}^n \varphi_{ij}(u) L_i(h) L_j(k).$$

Ragionando così, via via, si riesce a stabilire, per la derivata p -esima di $F(u)$, l'espressione generale seguente

$$F^{(p)}(u)(h_1, \dots, h_p) = \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n \varphi_{i_1, \dots, i_p}(u) L_{i_1}(h_1) \dots L_{i_p}(h_p).$$

Quindi, per ogni $u_0 \in D$, verrà, ponendo $c_{i_1, \dots, i_p} = \varphi_{i_1, \dots, i_p}(u_0)/p!$, $c_0 = F(u_0)$:

$$F(u_0 + h) = F(u_0) + F'(u_0)h + \frac{1}{2!} F''(u_0)h^{[2]} + \dots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(u_0)h^{(p)} + \dots =$$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^n c_i L_i(h) + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n c_{i_1, \dots, i_p} L_{i_1}(h) \dots L_{i_p}(h) + \dots,$$

per ogni h appartenente ad un intorno finitamente aperto, $\mathfrak{B}(u_0)$, di u_0 . Si ha così, in un intorno $W(z^0)$ di ogni punto z^0 di A , un elemento di funzione analitica,

$$c_0 + \sum_{i=1}^n c_i z_i + \dots + \sum_{i_1, \dots, i_p=1}^n c_{i_1, \dots, i_p} z_{i_1} \dots z_{i_p} + \dots,$$

ed è facile vedere che, dati due tali intorno $W(z^1)$, $W(z^2)$, con punti (interni) comuni, i corrispondenti elementi coincidono su $W(z^1) \cap W(z^2)$. Per conseguenza, gli elementi considerati definiscono una funzione $f(z_1, \dots, z_n)$, ologomorfa in A , tale che

$$F(u) = F(L_1(u), \dots, L_n(u)), \quad \text{per ogni } u \in D.$$

Nota. - Da questo teorema si deduce, in modo quasi immediato, la seguente estensione di un risultato del Fantappiè (loc. cit.): *Condizione necessaria e sufficiente perché un funzionale G-analitico $F(u)$ ammetta un teorema di addizione della forma*

$$(I) \quad F(u + v) = \Phi(F(u), F(v)),$$

essendo $\Phi(x, y)$ una funzione complessa delle variabili complesse x, y , è che $F(u)$ sia del tipo $F(u) = f(L(u))$, essendo L un funzionale lineare e $f(z)$ una funzione complessa di z .

Basta osservare che, da (I), si deduce

$$F'(u) = \Phi_v(F(u), F(o)) \cdot F'(o).$$

3. Sarebbe ora naturale studiare il caso, più generale, delle applicazioni dello spazio vettoriale S in un'algebra topologica A . Ci limiteremo però al caso in cui A è l'anello $\mathfrak{A}(C)$ delle funzioni $\varphi(z)$ localmente analitiche sopra un insieme chiuso C , non vuoto, della sfera di Riemann, Ω (con $C \neq \Omega$, $\varphi(\infty) = 0$, se $\infty \in C$), considerando $\mathfrak{A}(C)$ munito della topologia introdottavi dal Köthe, dal Silva Dias e dal Grothendieck (cfr. [5]). (In particolare, S può essere un altro spazio funzionale analitico).

Sia F un'applicazione di un insieme $D \subset S$ in $\mathfrak{A}(C)$. Per ogni $u \in D$, il valore di $F(u)$ sarà una determinata funzione $\varphi \in \mathfrak{A}(C)$. Indicheremo con $F(u)_z$ il valore di questa funzione in un generico punto z , sicché possiamo scrivere $\varphi(z) = F(u)_z$. Quindi, $F(u)_z$ sarà una funzione numerica di u e di z , che potremmo anche denotare con $F(u; z)$ (*funzionale misto*, nella terminologia del prof. Fantappiè). Ma bisogna distinguere questa funzione dall'applicazione $u \rightarrow F(u; z)$, che abbiamo designato con F .

Sia ora L un'applicazione lineare di S in $\mathfrak{A}(C)$. Diremo che un punto c di C è uno *zero interno di L di ordine m* (essendo m un numero naturale), se, qualunque sia $u \in S$, la funzione $\varphi(z) = L(u)_z$ ammette il punto c come zero di ordine m . Per esempio, nel caso in cui S coincide con $\mathfrak{A}(C)$, l'ope-

ratore L definito dalla formula $L(u)_z = \int_c^z (z-t)^{m-1} u(t) dt$ ha uno zero di ordine m in c , mentre l'operatore $(z-c)^{-m} L$ è privo di zeri interni ⁽⁴⁾.

Date n applicazioni lineari L_1, \dots, L_n di S in $\mathfrak{A}(C)$, diremo che esse sono *linearmente indipendenti per un dato punto c di C* , se c non è zero interno

(4) Naturalmente, denotiamo con $(z-c)^{-m} L$ l'applicazione $u \rightarrow (z-c)^{-m} L(u)$.

di nessuna combinazione lineare di L_1, \dots, L_n , a coefficienti costanti non simultaneamente nulli.

TEOREMA 2. — Sia $F(u)$ una funzione a valori in $\mathfrak{A}(C)$, definita e G -analitica in un insieme DCS , e siano L_1, \dots, L_n , applicazioni lineari di S in $\mathfrak{A}(C)$, linearmente indipendenti per ogni punto di C . Perché la $F(u)$ sia del tipo

$$F(u)_z = f(z, L_1(u)_z, \dots, L_n(u)_z),$$

essendo $f(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ una funzione complessa delle variabili complesse $z, \zeta_1, \dots, \zeta_n$, analitica rispetto a z , è necessario e sufficiente che la derivata di $F(u)$ sia, in ogni punto u di D , una combinazione lineare di L_1, \dots, L_n sull'anello $\mathfrak{A}(C)$, cioè del tipo

$$F'(u) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(u) L_i,$$

essendo $\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)$ funzioni definite in D e a valori in $\mathfrak{A}(C)$. Allora la $f(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ sarà analitica nell'insieme A dei punti $(z, L_1(u), \dots, L_n(u))$, per i quali $z \in C$ e $u \in D$.

La prima parte della dimostrazione si può fare in modo del tutto simile a quello adottato per il teorema 1.

Quanto alla seconda parte, basta una semplice osservazione. Supponiamo che la derivata $F'(u)$ sia del tipo indicato nell'enunciato. Allora si avrà, per ogni $u \in D$ e ogni coppia (h, k) di elementi di S

$$F''(u)(h, k) = \sum_{i=1}^n (\varphi'_i(u) h) (L_i k),$$

dove, per ogni determinazione di u, h, k , il termine $(\varphi'_i(u) h) (L_i k)$ designa il prodotto degli elementi $\varphi'_i(u) h$ e $L_i k$ dell'anello $\mathfrak{A}(C)$. Siccome l'operatore bilineare $F''(u)$ dev'essere simmetrico, si avrà

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n (\varphi'_i(u) h) (L_i k) = \sum_{j=1}^n (\varphi'_j(u) k) (L_j h).$$

Sia ora c un punto arbitrario di C . Dato che gli L_i sono linearmente indipendenti per il punto c (per ipotesi), si potrà determinare, per ogni i , un $k_i \in S$, tale che $L_i(k_i)_c = 1$ e $L_j(k_i)_c = 0$, per $i \neq j$. Questo vuol dire che il determinante

$$\Delta(z) = |L_j(k_i)_z|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

funzione analitica di z , è diverso da zero nel punto c e, dunque, in un intorno V_c di c . Si potrà quindi risolvere (2) per rapporto a $\varphi'_i(u) h$ ($i = 1, \dots, n$), nell'intorno V_c , cioè possiamo scrivere $(\varphi_i(u) h)_z$ sotto la forma

$$(\varphi'_i(u) h)_z = \sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(u; c)_z (L_j h)_z, \quad \text{per } z \in V_c.$$

Ora, secondo il lemma di Heine–Borel–Pincherle, esiste un numero finito di punti c_1, \dots, c_m di C tali che gli intornoi V_{c_1}, \dots, V_{c_m} coprono C . D'altra parte, siccome, per ipotesi, i funzionali $(L_j h)_z$ di h sono, per ogni $z \in C$, linearmente indipendenti, i coefficienti $\varphi_{ij}(u; c_k)_z$, funzioni di z , debbono coincidere nelle parti comuni di quegli intornoi. Si conclude così che, per ogni $u \in D$, le derivate $\varphi'_i(u)$ sono anch'esse combinazioni lineari degli L_j , a coefficienti in $\mathfrak{A}(C)$.

La dimostrazione può adesso proseguire, nelle sue linee essenziali, come quella del teorema I.

OSSERVAZIONI. – I. La condizione che la $f(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$ sia analitica per rapporto a z può essere soppressa nell'ipotesi del teorema.

II. Questo teorema sussiste, senza cambiamenti sostanziali, sostituendo $\mathfrak{A}(C)$ con certi altri anelli funzionali, come, per esempio, quello delle funzioni continue sopra un compatto. Sarebbe interessante cercare il dominio di causalità di questo teorema, tra gli anelli topologici.

III. Un caso semplice al quale si applica questo teorema è quello in cui S coincide con $\mathfrak{A}(C)$ e le applicazioni lineari date sono potenze dell'operatore di derivazione: D^0, D^1, \dots, D^n . Si tratta allora dei noti operatori funzionali della forma

$$F(u)_z = f(z, u(z), u'(z), \dots, u^{(n)}(z)).$$

IV. Il numero degli zeri interni di un operatore L non è mai infinito, purché la funzione $L(h)_z$ di z non sia identicamente nulla sopra nessuna componente di C per ogni $h \in S$. Siano allora c_1, \dots, c_s gli zeri interni di L e μ_1, \dots, μ_s i rispettivi ordini. Allora l'operatore

$$(3) \quad \bar{L} = \frac{1}{\prod_1^s (z - c_i)^{\mu_i}} L$$

sarà privo di zeri interni. Ora, dati n operatori L_1, \dots, L_n , può darsi che gli operatori dedotti da essi secondo (3) siano linearmente indipendenti per ogni punto di C . Allora il teorema 2 si applica agli \bar{L}_i . Ma è da rilevare che la funzione $f(z, \zeta_1, \dots, \zeta_n)$, che esprime allora F partendo dagli L_i , può essere meromorfa in questo caso.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, chap. II, « Actual. Scient. Ind. », n. 1032, Paris (1947).
- [2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. I–II, « Actual. Scient. Ind. », n. 1189, Paris (1953).
- [3] L. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*, « Mem. Acc. Lincei », 1930.
- [4] E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », New York (1948).
- [5] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*, « J. Reine Angew. Math. », vol. 191 (1953), pp. 29–49.