

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
RENDICONTI DELLA CLASSE  
DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

---

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Sull'analisi funzionale lineare  
nel campo delle funzioni analitiche

---

Estratto dal fasc. 6, Serie VIII, vol. I, 1946

---

ROMA  
DOTT. GIOVANNI BARDI  
TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
1946

Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei »  
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)  
serie VIII, vol. I, fasc. 6

---

**Matematica.** — *Sull'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche.* Nota di JOSÉ SEBASTIÃO e SILVA<sup>(1)</sup>, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio M. PICONE.

1. Nella presente Nota mi propongo di esporre, in forma riassuntiva e prescindendo dalle dimostrazioni, i principali risultati contenuti in una mia Memoria, che spero venga prossimamente pubblicata, e con la quale mi lusingo di potere, in qualche modo, contribuire alla chiarificazione e allo sviluppo di un ramo particolarmente bello e importante della moderna Analisi: la teoria, cioè, dei funzionali definiti in insiemi di funzioni analitiche.

È ormai a tutti noto come, in tale campo, si stiano svolgendo da parecchi anni le indagini del prof. Luigi Fantappiè. Nella sua più recente sistemazione della teoria dei funzionali analitici<sup>(3)</sup>, un cambiamento notevole si è verificato col passaggio dal concetto di *funzione analitica nel senso classico* (di Weierstrass) al concetto di *funzione localmente analitica*, tendente

(1) Borsista dell'« Instituto para a Alta Cultura » di Lisbona, presso l'Istituto di Alta Matematica di Roma.

(2) Nella seduta del 15 giugno 1946.

(3) L. FANTAPPIÈ, *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici*. « Atti dell'Accad. d'Italia », Scienze Fis. Mat. e Nat., vol. XII, 1941.

non solo ad eliminare certe complicazioni provenienti dai fatti di polidromia, ma anche ad estendere le stesse possibilità d'applicazione della teoria. (Per fissare le idee, mi limito alle funzioni di una sola variabile, dato che l'estensione dei risultati al caso delle funzioni di più variabili non presenta difficoltà sostanziali). Secondo il nuovo punto di vista, il campo di esistenza di una funzione  $f(z)$  — elemento generico dello *spazio funzionale analitico* — non è più il *naturale* dominio di regolarità, quello cioè determinato da tutti

i possibili prolungamenti analitici a partire da una data serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ;

ma bensì un dominio aperto <sup>(4)</sup>  $D$ , del piano sfera,  $\Omega$ , soddisfacente la sola condizione che la  $f(z)$  sia univocamente definita e analitica in ogni suo punto; sicchè, data una funzione  $f^*(z)$ , il cui dominio di esistenza,  $D^*$ , contenga  $D$ , senza coincidere con questo, può avvenire che si abbia  $f^*(z) = f(z)$  per ogni  $z \in D$ , ma le funzioni  $f(z), f^*(z)$  non saranno allora considerate *identiche*. Nè sarà da escludersi che il dominio  $D$  sia sconnesso, formato da componenti <sup>(5)</sup>  $D_1, D_2, \dots$  (il cui numero può essere addirittura infinito); e che siano *indipendenti* fra di loro quelle funzioni  $f_1(z), f_2(z), \dots$ , che, sui domini  $D_1, D_2, \dots$ , separatamente, definiscono la funzione  $f(z)$ . Conviene infine supporre (per ragioni che si palesano nello svolgimento della teoria) che, se il dominio  $D$  contiene il punto improprio, la  $f(z)$  si annullerà in questo punto.

Avvertiamo subito che, per quanto bizzarro possa a prima vista sembrare un simile concetto di funzione analitica, esso si è già presentato, in modo naturale, senza per altro avere ricevuto nessuna denominazione specifica, nel corso di importanti ricerche di Runge, Painlevé, Hilbert, Montel, ecc., riguardanti gli sviluppi di funzioni analitiche in serie di polinomi o di funzioni razionali fratte <sup>(6)</sup>.

Ora, mi è sembrato che tale concetto potesse ancora essere modificato, in modo da consentire una più agevole trattazione della teoria e stimolarne l'ulteriore sviluppo. Così, per esempio, per poter parlare di *somma* o di *prodotto* di due funzioni localmente analitiche (senza cadere nel puro arbitrio), bisogna ammettere che i loro domini di esistenza abbiano punti comuni, il che induce naturalmente a indirizzare le ricerche sulle classi di funzioni localmente analitiche i cui domini di esistenza contengano uno stesso insieme.

(4) Chiamo *dominio aperto* ogni insieme aperto, e *dominio chiuso*, la chiusura di ogni dominio aperto. Chiamo inoltre *connesso* ogni insieme tale che, dati comunque due suoi punti, sia sempre possibile unirli con un arco di curva continua interamente contenuto nell'insieme stesso.

(5) Si chiama *componente* di un insieme  $A$  ogni sotto-insieme connesso massimo di  $A$ , cioè ogni sotto-insieme connesso di  $A$  che non possa più essere ampliato in nessun altro sotto-insieme connesso di  $A$ . Le componenti di un insieme sono, naturalmente, *staccate* fra di loro.

(6) Vedi, per esempio, P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynômes a une variable complexe*, Paris, Gauthier-Villars, 1910, pp. 93-100.

Sia allora  $C$  un insieme di punti di  $\Omega$ , chiuso, non vuoto e non coincidente con  $\Omega$ ; all'insieme di tutte le funzioni localmente analitiche definite in domini (aperti) contenenti  $C$ , dà il prof. Fantappiè il nome di *regione funzionale lineare*, e lo rappresenta con  $(C)$ . (Per evitare inutili complicazioni, conviene escludere dall'insieme  $(C)$  quelle funzioni, i cui domini abbiano almeno una componente interamente staccata da  $C$ ; allora, per brevità, chiamo *intorno aperto* [chiuso] dell'insieme  $C$ , ogni dominio aperto [chiuso], tale che ciascuna delle sue componenti contenga almeno una componente di  $C$  nel suo interno). È tuttavia manifesto che, dovendo assegnare alla somma (o al prodotto) di due date funzioni appartenenti a  $(C)$  un determinato dominio di esistenza — per esempio, l'intersezione dei domini delle funzioni date — l'insieme  $(C)$  non può, in nessun modo, costituire un *gruppo* rispetto all'addizione, e, quindi, non può neanche costituire uno *spazio lineare*, rispetto all'addizione e alla moltiplicazione per numeri complessi  $\alpha, \beta, \dots$ <sup>(7)</sup>. Ma questa è, naturalmente, una questione piuttosto formale.

Un'altra difficoltà, meno trascurabile della precedente, si presenta invece col problema della definizione di una conveniente struttura topologica nell'insieme delle funzioni localmente analitiche. Invero, il concetto di *intorno* che vi ha introdotto il prof. Fantappiè, essendo certamente il più adatto al concetto di funzione localmente analitica, non sembra tuttavia facilmente utilizzabile: in particolare, esso non consente di stabilire un concetto di *limite*, per le successioni di funzioni.

Ebbene, se ci vogliamo limitare ad una data regione funzionale  $(C)$ , una soluzione mi è parsa la più naturale, per superare le suddette difficoltà quella, cioè, di considerare come rappresentazioni di *uno stesso ente* (che chiamo *funzione analitica legata all'insieme  $C$* ) tutte le funzioni appartenenti a  $(C)$ , che siano prolungamenti di una *stessa funzione*, anch'essa appartenente a  $(C)$ <sup>(8)</sup>. Con  $f[C]$  rappresento l'insieme delle funzioni analitiche legate a  $C$ , e chiamo altresì *dominio di olomorfia* di una funzione  $\varphi$  appartenente a  $f[C]$  ogni intorno aperto o chiuso dell'insieme  $C$ , sul quale la  $\varphi$  riesca univocamente definita e analitica.

2. È ora facile vedere come, nell'insieme  $f[C]$ , si possano definire, naturalmente, *un'addizione* e una *moltiplicazione*; e come lo stesso insieme costituisca uno spazio lineare rispetto all'addizione e al corpo di scalari

(7) Sul concetto di *spazio lineare*, vedi per esempio, J. v. NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, p. 19; M. PICONE, *Fondamenti di analisi funzionale lineare*, corso dell'Istituto di Alta Matematica, 1943, p. 267.

(8) Se, invece di una determinata regione funzionale  $(C)$ , volessimo considerare la totalità delle funzioni localmente analitiche, la questione non si potrebbe risolvere così facilmente. Bisognerebbe, per esempio, considerare soltanto le funzioni che sono definite in tutto il piano sfera, tranne su di un insieme *senza punti interni*. Ma di questo mi occuperò più innanzi.

rappresentato dai numeri complessi. In modo altrettanto naturale vi si può definire un concetto di limite: « Data una successione  $\varphi_n [n = 0, 1, 2, \dots]$  di elementi di  $f[C]$ , diremo che essa ha come *limite* un determinato elemento  $\varphi$  di  $f[C]$ , quando esista almeno un intorno di  $C$  che sia un comune dominio di olomorfia delle funzioni  $\varphi, \varphi_n [n = 0, 1, \dots]$ , e sul quale la funzione  $\varphi_n(z)$  *tenda uniformemente* alla  $\varphi(z)$  per  $n \rightarrow \infty$  ». Con tali concetti, l'insieme  $f[C]$  diventa uno spazio  $(\mathfrak{L})$  vettoriale, che chiamo *spazio vettoriale analitico, determinato dall'insieme  $C$* <sup>(9)</sup>.

Vien subito fatto di domandare se questi spazi siano metrizzabili. Ecco il massimo che, su tale questione, mi è riuscito di stabilire: *Gli spazi vettoriali analitici sono spazi  $(\mathfrak{S})$  separabili*<sup>(10)</sup>. L'espressione dello scarto,  $\varepsilon(\varphi, \psi)$ , tra due funzioni  $\varphi, \psi$ , può essere data come segue: rappresentiamo con  $D_n$  l'insieme di tutti i punti di  $\Omega$  la cui distanza sferica da  $C$  sia  $\leq \frac{1}{n} [n = 0, 1, \dots]$ , e poniamo:

$(\varphi, \psi)_n = \text{Max } |\varphi(z) - \psi(z)|$  sul dominio chiuso  $D_n$  - se questo è un dominio di olomorfia di  $\varphi - \psi$ ;

$(\varphi, \psi)_n = \infty$  - nel caso opposto.

Porremo  $\varepsilon(\varphi, \psi) = \prod_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(\varphi, \psi)_n}{1 + (\varphi, \psi)_n} \right]^{\frac{1}{n!}}$ . Tuttavia questo scarto non soddisfa la disuguaglianza triangolare e credo che non sia neanche regolare<sup>(11)</sup>.

3. Consideriamo due spazi  $(\mathfrak{L})$  vettoriali,  $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*$ , e sia  $F$  una trasformazione univoca di  $\mathfrak{S}$  in  $\mathfrak{S}^*$ , un operatore, cioè, che ad ogni  $u \in \mathfrak{S}$ , faccia corrispondere un  $Fu \in \mathfrak{S}^*$ . Diremo che l'operatore  $F$  è *distributivo*, se riesce, identicamente:  $F(u + v) = F(u) + F(v)$ ,  $F(\alpha u) = \alpha F(u)$ ; e che è *continuo*, se si ha sempre:  $\lim_n F u_n = F \lim_n u_n$ . In particolare,  $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*$  possono essere, tutt'e due, spazi vettoriali analitici (distinti o coincidenti), e  $F$  sarà allora un operatore che trasforma *funzioni in funzioni*. Se, invece, il primo è uno spazio vettoriale analitico, e il secondo è la retta euclidea complessa,  $S_1$ , allora  $F$  sarà, nella terminologia del prof. Fantappiè, un *funzionale puro*: trasforma, cioè, *funzioni in numeri complessi*<sup>(12)</sup>.

(9) Sul concetto di spazio  $(\mathfrak{L})$  vedi FRÉCHET, *Espaces abstraits*, Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 163. Chiamo *spazio  $(\mathfrak{L})$  vettoriale* ogni spazio  $(\mathfrak{L})$  lineare nel quale siano continue le operazioni fondamentali.

(10) Sul concetto di spazio  $(\mathfrak{S})$ , vedi FRÉCHET, op. cit., p. 213.

(11) Se fosse regolare, lo spazio sarebbe metrizzabile, secondo un teorema di CHITTENDEN (vedi FRÉCHET, op. cit. p. 219).

(12) Il prof. FANTAPPIÈ risale dai funzionali puri agli operatori che trasformano funzioni in funzioni, mediante i *funzionali misti*, ma senza riferimento ad un secondo spazio.

Sia ora  $u_\alpha$  un punto variabile dello  $\mathfrak{S}$ , spazio dipendente dalla variabile scalare complessa,  $\alpha$ ; o, come diremo anche, una *punto-funzione di codominio*  $\mathfrak{S}$ , *definita in un sotto-insieme del piano-sfera*,  $\Omega_\alpha$  <sup>(15)</sup>. I concetti di *limite*, *continuità*, *derivata*, ecc., vi si estendono agevolmente, a partire dal concetto di *limite di una successione*; così anche il concetto di *analiticità*, il quale, tuttavia, preferisco di introdurre secondo l'indirizzo corrispondente a quello di Weierstrass <sup>(14)</sup>: « La punto-funzione  $u_\alpha$  si dirà *analitica* in un punto  $\alpha_0$ , quando esista una successione  $u_n$  di elementi di  $\mathfrak{S}$ , tale che, in ogni punto  $\alpha$  di un conveniente intorno di  $\alpha_0$ , si abbia:

$u_\alpha = \lim_n \sum_{i=0}^n (\alpha - \alpha_0)^i u_i$ , se  $\alpha_0$  è proprio;  $u_\alpha = \lim_n \sum_{i=0}^n \frac{1}{\alpha^i} u_i$ , se  $\alpha_0$  è improprio. Diremo altresì che la funzione  $u_\alpha$  è analitica in un insieme  $A$ , se lo è in tutti i punti di  $A$  ». È chiaro che, anche in questo caso, si potrà parlare di *prolungamento analitico*, *dominio di regolarità*, *uniformità*, *pluriformità*, ecc. In particolare, si potrà introdurre il concetto di *operatore analitico*:

« Diremo che una data trasformazione  $F$  di  $\mathfrak{S}$  in  $\mathfrak{S}^*$  è *analitica*, se, e soltanto se, trasforma le punti-funzioni analitiche di codominio  $\mathfrak{S}$ , in punti funzioni analitiche di codominio  $\mathfrak{S}^*$ ; cioè, usando un linguaggio intuitivo: se, ad ogni punto  $u_\alpha$  che si muova analiticamente sopra  $\mathfrak{S}$ , fa corrispondere un punto  $F u_\alpha$  che si muove anch'esso analiticamente sopra  $\mathfrak{S}^*$  ».

4. Consideriamo ora una punto-funzione analitica  $\varphi_\alpha$  avente per codominio uno spazio vettoriale analitico,  $f[C]$ . Ho potuto dimostrare che: *Dato comunque un insieme chiuso  $\Gamma$  contenuto nel dominio di regolarità della punto-funzione  $\varphi_\alpha$ , esiste un intorno  $D$  di  $C$  che è un comune dominio di olomorfia di tutte le funzioni di  $\alpha$ ,  $\varphi_\alpha(\alpha)$ , quando  $\alpha$  descrive  $\Gamma$* . Sia allora  $D_1$  un dominio chiuso di  $\Omega_\alpha$  sul quale la punto-funzione  $\varphi_\alpha$  riesca regolare, e sia  $D_2$  un corrispondente intorno  $C$ , sul quale tutte le funzioni  $\varphi_\alpha(\alpha)$  [ $\alpha \in D_1$ ] riescano olomorfe; poniamo inoltre:  $\varphi_\alpha(\alpha) = \varphi(\alpha, \alpha)$ , per ogni  $(\alpha, \alpha)$  tale che  $\alpha \in D_1$ ,  $\alpha \in D_2$ . Ebbene: *Possiamo dire allora che la funzione di due variabili  $\varphi(\alpha, \alpha)$  è analitica in tutta la parte interna del prodotto cartesiano  $D_1 \times D_2$ . Reciprocamente, se la  $\varphi(\alpha, \alpha)$  è analitica nell'interno di  $D_1 \times D_2$ , la  $\varphi_\alpha$  sarà una punto-funzione analitica nell'interno di  $D_1$* .

5. Siano dati uno spazio vettoriale analitico  $f[C]$  e un sistema lineare  $\mathfrak{S}$ , che supporremo sia *normale* <sup>(15)</sup> (per esempio, uno spazio euclideo  $S_n$ ,

(13) Se  $\mathfrak{S}$  rappresenta lo spazio ordinario (fissata un'origine), e se invece della variabile complessa  $\alpha$  consideriamo la variabile reale  $t$  (tempo), la punto-funzione  $u_t$  rappresenterà il *moto* di un punto.

(14) Non è detto che i due indirizzi — quello basato sul concetto di *serie di potenze* (WEIERSTRASS) e quello basato sul concetto di *derivata* (CAUCHY) — siano equivalenti in qualsiasi spazio ( $\mathfrak{Q}$ ) vettoriale.

(15) Sul concetto di *spazio lineare normale*, vedi p. es. PICONE, op. cit., p. 339

lo spazio hilbertiano  $H$ , ecc.) oppure un secondo spazio vettoriale analitico  $f[C^*]$ . Partendo da tali premesse, ho potuto dimostrare la seguente proposizione, una delle più importanti qui enunciate: *Vi è identità fra la classe delle trasformazioni distributive continue di  $f[C]$  in  $\mathfrak{S}$  e la classe delle trasformazioni distributive analitiche di  $f[C]$  in  $\mathfrak{S}$ .* Si ha inoltre quest'altro risultato, che generalizza il teorema fondamentale della teoria dei funzionali analitici:

*La totalità delle trasformazioni distributive analitiche (e quindi continue) di  $f[C]$  in  $\mathfrak{S}$  è data dall'espressione*

$$F_z[\varphi(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \varphi(\alpha) u_\alpha d\alpha,$$

dove  $\vec{\gamma}$  rappresenta la frontiera di un conveniente dominio di olomorfia della  $\varphi$ , orientata in modo da lasciare a sinistra i punti di  $C$ , e  $u_\alpha = F_z\left(\frac{1}{\alpha - z}\right)$  rappresenta una qualsiasi punto-funzione analitica di codominio  $\mathfrak{S}$ , univocamente definita e analitica almeno nel complementare dell'insieme  $C$ , e che si annulla per  $\alpha = \infty$ , se  $C$  non contiene questo punto.

6. Le convenzioni e i risultati precedenti consentono di semplificare notevolmente, e di presentare sotto forma che mi sembra particolarmente suggestiva, la giustificazione del calcolo simbolico <sup>(16)</sup>. Tenendo ferme le notazioni e le ipotesi del numero precedente, rappresentiamo con  $T_{\mathfrak{S}}$  l'insieme delle trasformazioni distributive dello spazio  $\mathfrak{S}$  in se stesso, e supponiamo che  $C$  non contenga il punto improprio. Allora, dato  $F \in T_{\mathfrak{S}}$ , ci proponiamo di risolvere questo problema: Coordinare ad ogni  $\varphi \in f[C]$  un'altro operatore  $\varphi(F) \in T_{\mathfrak{S}}$ , per guisa che si abbia: 1) Se  $\varphi(z) = \alpha z + \beta$ , allora  $\varphi(F) = \alpha F + \beta$ ; 2)  $(\alpha\varphi + \beta\psi)(F) = \alpha\varphi(F) + \beta\psi(F)$ ; 3)  $(\varphi \cdot \psi)(F) = \varphi(F) \cdot \psi(F)$ ; 4)  $(\lim_n \varphi_n)(F) = \lim_n \varphi_n(F)$  <sup>(17)</sup>.

Ebbene: *Condizione necessaria e sufficiente perchè tale problema sia risolubile è che l'operatore  $(\alpha - F)^{-1}$  sia una funzione di  $\alpha$  univocamente definita e analitica nel complementare di  $C$ ; e la soluzione del problema sarà data allora dalla formula*

$$\varphi(F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}} \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - F} d\alpha$$

(16) Su questo punto, vedi FANTAPPIÈ, *La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione dell'equazione a derivate parziali*. «Mem. Acc. Italia», vol. I, 1930.

(17) Diremo che è  $\lim_n F_n = F$ , quando riesca  $\lim_n (F_n u) = F u$ , per ogni  $u \in \mathfrak{S}$ . Analogamente si definisce l'espressione «operatore  $F_\alpha$  dipendente analiticamente dal parametro  $\alpha$ ».

dove  $\vec{\gamma}$  rappresenta la frontiera debitamente orientata di un conveniente dominio di olomorfia della  $\varphi$ .

7. Altre categorie di spazi vettoriali analitici si possono presentare ancora. Sia  $A$  un dominio aperto di  $\Omega$ , e rappresentiamo con  $f[A]$  l'insieme di tutte le funzioni localmente analitiche aventi  $A$  come dominio di esistenza. Date  $\varphi, \varphi_n \in f[A]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), diremo che si ha  $\lim_n \varphi_n = \varphi$ , se, comunque si prenda un dominio chiuso  $D$  contenuto in  $A$ , la funzione  $\varphi_n(z)$  tende uniformemente alla  $\varphi(z)$  su  $D$ , per  $n \rightarrow \infty$ . D'altra parte, posto  $C = \Omega - A$ , diremo che lo spazio  $f[A]$  (il quale, inoltre, riesce metrizzabile) è il *duale* dello spazio  $f[C]$  <sup>(18)</sup>.

Rappresentiamo ora con  $f^*[A]$  l'insieme di tutte le funzioni *generalmente analitiche* in  $A$ , dicendo che una funzione è generalmente analitica in  $A$ , quando è univocamente definita e analitica in questo insieme, *tranne in una sua parte senza punti interni*. Allora, date  $\varphi, \varphi_n \in f^*[A]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), diremo che si ha  $\lim_n \varphi_n = \varphi$ , quando, rappresentato con  $C$  l'insieme di tutte le singolarità delle funzioni  $\varphi, \varphi_n$ , e preso comunque un dominio chiuso  $D$  contenuto in  $A - C$ , la  $\varphi_n(z)$  tende uniformemente alla  $\varphi(z)$  su  $D$ , per  $n \rightarrow \infty$ . Allo spazio  $f^*[A]$ , anch'esso metrizzabile, si possono estendere i risultati esposti nei numeri precedenti.

Altre estensioni si prospettano ancora.

(18) Un esempio è lo spazio delle funzioni intere, nel quale il prof. FRÉCHET ha introdotto una metrica che mi ha suggerito l'espressione dello « scarto » precedentemente indicata (ved. FRÉCHET, op. cit., p. 87).