

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

T E O R I A
D E L L E
D I S T R I B U Z I O N I

2° CICLO . SALTINO DI VALLOMBROSA, 1-9 SETTEMBRE 1961

ESCLUSIVITA PER LA VENDITA
EDIZIONI CREMONESE
ROMA

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E)

2° Ciclo - Saltino di Vallombrosa, 1-9 settembre 1961

TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

- B. MALGRANGE : Operatori differenziali.
- J. MIKUSINSKI Une introduction élémentaire à la théorie des distributions de plusieurs variables.
- L. SCHWARTZ I. Trasformata di Fourier delle distribuzioni.
II. Spazi di Hilbert e nuclei associati
- J. B. DIAZ Solution of the singular Cauchy problem for a singular system of partial differential equations in the mathematical theory of dynamical elasticity.
- J. GOBERT : Un cas critique du problème de Dirichlet-Neumann.
- J. L. LIONS Espaces d'interpolation. Espaces de moyenne.
- J. SEBASTIAO E SILVA Sur l'axiomatique des distributions et ses possibles modèles.
- S. ZAIDMAN Distribuzioni quasi-periodiche e applicazioni.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

J. SEBASTIAO E SILVA

SUR L'AXIOMATIQUE DES DISTRIBUTIONS ET SES

POSSIBLES MODELES

Roma - Istituto Matematico dell'Università

SUR L'AXIOMATIQUE DES DISTRIBUTIONS ET SES

POSSIBLES MODELES

par J. Sebastiao e Silva

1. Introduction. On connaît aujourd'hui plusieurs façons de présenter les fondements de la théorie des distributions. On assiste même à une sorte de compétition entre ces diverses orientations, chaque auteur soutenant son point de vue avec plus ou moins d'énergie.

Cette divergence est d'ailleurs très analogue à celle qui s'est vérifiée dans la fondation de la théorie des nombres (entiers, rationnels, réels ou complexes). Un nombre réel peut être considéré, suivant les goûts, comme une coupure de Dedekind, une classe de suites de Cauchy équivalentes, un opérateur sur des grandeurs, etc.; de même, un nombre complexe peut être conçu comme un couple de nombres réels, une classe de congruence de polynômes modulo $x^2 + 1$, un opérateur linéaire sur des vecteurs du plan, une matrice réelle d'ordre 2, etc.etc..

Cette analogie est plus profonde qu'on pourrait le prévoir, le passage de la notion de fonction à celle de distribution étant un phénomène de même genre que les successives extensions de la notion nombre. Dans un cas comme dans l'autre, toutes les orientations proposées sont équivalentes la théorie qui en résulte est essentiellement la même; ce qui change est la matière, c'est-à-dire la nature de individus que l'on nomme nombres ou distributions. Donc la matière est complètement étrange à la théo-

rie elle-même : ce qu'y compte est la forme, c.à.d. un ensemble de signes de relations entre ces être et de propriétés formelles de ces relations (propriétés que l'on pourrait nommer les règles du jeu). Qui, en faisant de l'analyse, se souvient encore qu'un nombre réel est une coupure ou une classe de suites? ⁽¹⁾ Les propriétés formelles des opérations et de la relation d'ordre (i.e. l'axiomatique des nombres réels) lui sont entièrement suffisants.

Or on sait que, dans chaque théorie mathématique, toutes les relations possibles peuvent se réduire logiquement à un nombre fini de notions ou termes (les notions primitives) et toutes les propriétés formelles de ces relations à un nombre fini de règles (les axiomes). Ainsi toute la théorie est contenue virtuellement dans cette axiomatique. Et la théorie restera justifiée, au point de vue logique, si, et seulement si, on réussit à démontrer que l'axiomatique est compatible, c.à.d. qu'il existe au moins une structure qui la vérifie (modèle de l'axiomatique). Il est encore essentiel de savoir si l'axiomatique est déterminée, c.à.d., si deux modèles de l'axiomatique sont nécessairement isomorphes ou si, au contraire, il en existe des modèles non isomorphes (théorie plurivalente). Enfin, pour une raison d'élégance logique, il convient de réduire les axiomes au minimum, en démontrant qu'ils sont indépendants.

Dans le cas de la théorie des distributions, comme dans d'autres cas, les modèles se sont présentés avant l'axiomatique. Et c'est justement la pluralité de concepts concrets, ontologiques,

(1)

Cette observation l'a faite L.Schwartz dans une conférence sur les concept de distribution.

de distribution (comme fonctionnelles, comme séries formelles, comme classes de suites de fonctions, comme couples de fonctions analytiques, etc.), qui suggère d'en extraire la forme abstraite, par axiomatisation. Une définition en plus? Oui et non il s'agit alors de faire une synthèse des définitions "concrètes"; ce qui en résulte sera plutôt la vraie définition.

Il reste encore la question de savoir que est le meilleur modèle de l'axiomatique. Dans ce cas comme dans d'autres, le meilleur modèle sera celui qui permet de démontrer plus vite, et avec moins de ressources, que l'axiomatique est compatible; ensuite, on peut l'abandonner, sans aucun souvenir, comme on retire l'échafaudage d'une maison qui vient d'être bâtie.

Lorsqu'il s'agit d'une axiomatique déterminée, le meilleur modèle, de ce point de vue, est en règle suggéré par l'axiomatique elle-même; on le construit d'après une méthode metamathématique générale, en cherchant, précisément, à démontrer que l'axiomatique est déterminée. Par exemple, dans les fondements de la géométrie, on est alors conduit à considérer les points comme systèmes de nombres réels. Dans le cas des distributions, l'axiomatique porte à considérer chaque distribution comme une classe d'équivalence de couples (r, f) , où f est une fonction continue et r en entier ou système d'entiers.

On est aussitôt surpris de l'étroite analogie entre cette construction et celle de la théorie analytique des nombres rationnels. Il s'agit au fond d'un même problème d'algèbre (ou de logique), que je n'ai pas résisté la tentation d'étudier en toute

généralité. Mais le travail qui en a résulté [4] est ainsi devenu plutôt lourd, ce qui ne l'a peut-être pas permis d'atteindre l'effet que j'avais visé. Je m'en suis aperçu après l'avoir rédigé et j'y ai ajouté, en conclusion

"Ce travail n'a évidemment pas pour but d'exposer la théorie des distributions de la façon la plus brève et la plus facile. Nous avons eu le souci de répondre plusieurs questions [....] . Mais, en faisant ainsi, nous avons ouvert plusieurs possibilités d'exposition de cette théorie, suivant notre point de vue.

"Si l'on veut s'adresser à des techniciens, on préférera une orientation plutôt concrète. La méthode de complétion topologique que nous avons indiquée [...] sera peut-être la plus intuitive [...]

"Au contraire, pour les mathématiciens, il y aura toujours intérêt à connaître la théorie des distributions d'un point de vue supérieur".

Cependant, l'expérience acquise dans quelques cours d'introduction, adressés à des mathématiciens et à des physiciens (à Lisbonne, à Porto, à Barcelone et à Rome) m'a fait changer d'avis là-dessus. Certes, la méthode de complétion, qui consiste à introduire les distributions comme limites généralisées de suites de fonctions, est très intuitive, et déjà employée, de façon empirique, par les physiciens. Mais, à mon avis, la méthode des couples (r, f) , qui porte directement à concevoir les distributions comme dérivées généralisées $D^r f$ de fonctions continues,

est la plus indiquée, autant pour les mathématiciens que pour les physiciens et les ingénieurs. Tout d'abord, les raisonnements que cette méthode exige - spécialement dans le cas d'une seule variable - sont très élémentaires et très faciles, presque triviaux, une sorte d'oeuf de Coulomb. En outre, ils se rapprochent beaucoup des méthodes heuristiques des physiciens, notamment de ceux de Dirac⁽¹⁾

Enfin, cette méthode est la plus élégante au point de vue mathématique, puisqu'elle résout un problème algébrique par des moyens strictement algébriques. La topologie joue ici un rôle artificiel. Plus encore une partie considérable de la théorie des distributions, y comprises la transformation de Laplace, la transformation et la série de Fourier et leurs applications pratiques, peut être développée, plus simplement, sans topologie. Et rappelons qu'il n'existe pas une topologie unique, privilégiée, pour les espaces de distributions.

D'ailleurs, la première axiomatique des distributions que j'ai donnée peut être considérablement simplifiée, si l'on se limite aux distributions d'ordre fini. En vérité, les distributions d'ordre infini de Schwartz ont un intérêt plutôt théorique et s'expriment, immédiatement, comme systèmes compatibles de distributions d'ordre fini. Aussi, dans la suite, dirons-nous simplement "distribution", au lieu de "distribution d'ordre fini". En outre, comme l'a observé H. KÖNIG, il n'est pas nécessaire d'y

(1)

Observons que dans un cours adressé aux physiciens ou aux ingénieurs, il n'est pas nécessaire de parler, explicitement, d'axiomatique (à moins qu'ils n'aient une formation mathématique

./.

prendre l'addition comme notion primitive. Dans ces conditions, on peut réduire le nombre des axiomes de 8 à 4. Leur énoncé, comme on peut le voir, est tout simple et direct.

Pour rendre plus claire l'exposition, nous allons présenter d'abord en détail le cas d'une seule variable (n° 2) et nous indiquons ensuite les modifications qu'il faut faire dans le cas général.

2. Distributions d'une variable. Dans ce numéro nous désignerons par I un intervalle quelconque de la droite R , et par $C(I)$ ou simplement par C l'espace des fonctions complexes, définies et continues dans I . D'autre part, en désignant par c un point arbitraire de I , nous poserons

$$(1) \quad \int_c^x f(\xi) d\xi, \text{ pour toute } f \in C$$

La notion de distribution dans I est décrite par les axiomes suivants, en prenant pour notions primitives celles des fonctions continues et de "dérivée" (1)

assez moderne). Il suffit alors de construire l'espace des distributions au moyen des couples (r, f) , en exploitant l'analogie avec la théorie analytique des nombres rationnels.

(1)

Il s'agit là d'une axiomatique "partielle", dans le sens qu'elle présuppose la théorie des nombres et des fonctions numériques continues. Il est encore à remarquer que, pour les distributions d'une seule variable, l'axiomatique peut se réduire à 3 axiomes assez simples (bien que les axiomes I - IV soient indépendants); mais cela n'a que l'intérêt d'une curiosité logique.

Axiome 1.- Toute fonction f complexe, définie et continue dans I , est une distribution dans I .

Axiome 2.- A toute distribution T dans I correspond une distribution DT dans I , que l'on appelle dérivée de T , de telle façon que, si T est une fonction admettant dérivée continue dans I au sens usuel, DT coïncide avec cette dérivée.

Définition 1.- La dérivée d'ordre r de T , $D^r T$, est définie par induction $D^0 T = T$, $D^r T = D^{r-1}(DT)$ pour $r = 1, 2, \dots$

Axiome 3.- Pour toute distribution T dans I , il existe un entier $r \geq 0$ et une fonction $f \in C$, tels que $T = D^r f$

Axiome 4.- Si r est un entier ≥ 0 et f, g deux fonctions continues dans I telles que $D^r f = D^r g$, alors $f - g$ est une fonction entière de degré $< r$

Nous désignerons par N l'ensemble des entiers $r \geq 0$, et par P_r l'ensemble des fonctions f entières de degré $< r$, pour tout $r \in N$.

Nous allons démontrer que cette axiomatique est :

a) déterminée (c'est-à-dire, s'il existe un modèle de l'axiomatique, tout autre modèle lui est isomorphe);

b) compatible (c'est-à-dire, il existe au moins un modèle de l'axiomatique).

a) Supposons qu'il existe un modèle M de l'axiomatique. En vertu des axiomes 1 et 2 et de la définition 1, à tout couple (r, f) avec $r \in N$ et $f \in C$, correspond une distribution $D^r f \in M$. D'après l'axiome 3, cette correspondance est une application de l'ensemble $N \times C$, des couples (r, f) , sur l'ensemble M ; mais cette ap-

plication n'est évidemment pas biunivoque. Soit

$$(2) \quad D^r f = D^s g, \quad \text{avec } r, s \in \mathbb{N} \quad \text{et } f, g \in \mathcal{C},$$

et prenons un entier m tel que $m \geq r$, $m \geq s$. En vertu de (1), de l'axiome 2 et de la définition 1, on a

$$D^r f = D^m(\mathcal{J}^{m-r} f), \quad D^s g = D^m(\mathcal{J}^{m-s} g)$$

Il s'ensuit, compte tenu de (2) et de l'axiome 4

$$(3) \quad \mathcal{J}^{m-r} f - \mathcal{J}^{m-s} g \in P_m$$

Il est évident que, réciproquement, (3) implique (2).

Nous dirons que les couples (r, f) et (s, g) sont équivalents, et nous écrirons $(r, f) \sim (s, g)$, si la condition (2) ou (3) est vérifiée. Cela posé, nous désignerons par $[r, f]$ la classe des couples équivalents à (r, f) , i.e. la classe de tous les couples qui représentent la même distribution $D^r f$; et par $\tilde{\mathcal{C}}$ l'ensemble de toutes ces classes, i.e. le quotient de l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathcal{C}$ par la relation \sim . Alors, la correspondance $[r, f] \rightarrow M$ est une application biunivoque de $\tilde{\mathcal{C}}$ sur M . Donc, si l'on identifie chaque fonction $f \in \mathcal{C}$ à la classe $[0, f]$, et si l'on pose, par définition,

$$D[r, f] = [r+1, f],$$

attendu que $D(D^r f) = D^{r+1} f$, l'ensemble $\tilde{\mathcal{C}}$ devient un modèle de

l'axiomatique, isomorphe à M . Donc tout autre modèle M' de l'axiomatique est isomorphe à $\tilde{\mathcal{C}}$ et, par suite, à M .

b) Le raisonnement antérieur indique la façon d'obtenir un modèle, $\tilde{\mathcal{C}}$, de l'axiomatique, en admettant qu'il existe un autre, M . Main-

tenant nous démontrerons directement l'existence du modèle \tilde{C} , sans supposer l'existence d'un autre.

Définissons dans $N \times C$ la relation \sim , en posant

$$(r, f) \sim (s, g)$$

si et seulement s'il existe un entier $m \gg r, s$, tel que

$$(4) \quad \mathfrak{J}^{m-r}f - \mathfrak{J}^{m-s}g \in P_m$$

On voit aussitôt que cette relation est réflexive et symétrique. Pour voir qu'elle est transitive, observons d'abord que, s'il existe un entier $m \gg r, s$ vérifiant (4), tout autre entier $k \gg r, s$ vérifie la même condition. En effet, de (4) on déduit alors

$$\mathfrak{J}^{k-r}f - \mathfrak{J}^{k-s}g \in P_k$$

en appliquant aux deux membres l'opérateur D^{m-k} ou \mathfrak{J}^{k-m} , selon que $k < m$ ou $k > m$. Cela étant, supposons

$$(r, f) \sim (s, g) \quad \text{et} \quad (s, g) \sim (t, h);$$

alors, si l'on choisit $m \gg r, s, t$, on aura

$$\mathfrak{J}^{m-r}f - \mathfrak{J}^{m-s}g \in P_m \quad \text{et} \quad \mathfrak{J}^{m-s}g - \mathfrak{J}^{m-t}h \in P_m,$$

d'où $\mathfrak{J}^{m-r}f - \mathfrak{J}^{m-t}h \in P_m$, c'est-à-dire $(r, f) \sim (t, h)$.

Donc la relation \sim est une équivalence. Désignons par $[r, f]$ la classe des couples équivalents à (r, f) et par \tilde{C} l'ensemble quotient de $N \times C$ par cette relation.

La correspondance $f \rightarrow [0, f]$ est évidemment une injec-

tion de C dans \tilde{C} , qui nous porte à identifier toute $f \in C$ à $[0, f]$; alors on a $C \subset \tilde{C}$, i.e. l'axiome 1 est vérifié.

Posons, par définition : $D[r, f] = [r+1, f]$. L'opération D ainsi définie dans \tilde{C} est univoque; en effet, si $[r, f] = [s, g]$, on aura aussi $[r+1, f] = [s+1, g]$, puisque $m-r = (m+1) - (r+1)$ et $m-s = (m+1) - (s+1)$. En outre, si f admet dérivée continue dans I , au sens usuel, on a

$$D[0, f] = [1, f] = [0, f'] = f',$$

puisque $f - \int f'$ est une constante. L'axiome 2 est donc vérifié. D'autre part, on a

$$[r, f] = D[r-1, f] = \dots = D^r[0, f] = D^r f,$$

ce qui confirme l'axiome 3. Enfin, si $D^r f = D^r g$, c'est-à-dire $[r, f] = [r, g]$, on a, suivant la définition d'égalité, $f-g \in P_r$, ce qui confirme l'axiome 4.

Nous avons donc bien construit un modèle \tilde{C} de l'axiomatique considérée.

On pourrait, évidemment, construire une infinité d'autres modèles de l'axiomatique, mais cela n'a plus d'intérêt essentiel, une fois que l'on a trouvé un modèle, isomorphe à tous les autres.

Ce qui intéresse, dorénavant, ce sont les axiomes 1 - 4 et les définitions que l'on y puisse adjoindre - c'est-à-dire les règles

de calcul sur les distributions; en effet, à partir de cette axiomaticque, on peut développer, entièrement, la théorie des distributions, en introduisant successivement les définitions de "somme" de deux distributions, de "produit" d'une fonction convenable par une distribution, de "restriction" d'une distribution dans I à un sous intervalle de I, de "limite" d'une suite de distribution, etc., etc.. Dans ce développement, on peut employer systématiquement les notations $D^r f$ pour les distributions. Par exemple, on aura les définitions

$$D^r f + D^s g = D^m (\mathfrak{J}^{m-r} f + \mathfrak{J}^{m-s} g), \quad m \geq r, s,$$

$$\varphi \cdot D^r f = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^k D^{r-k} (\varphi^{(k)} f), \text{ pour toute } \varphi \in C^r(I),$$

etc.etc. Mais, évidemment, rien empêche que, dans une question particulière, on emploie un autre type de représentation, plus adaptée à cette question (1).

3. Distributions de plusieurs variables. Maintenant, nous désignerons par I un intervalle n-dimensionnel quelconque (c.à.d. un pavé de R^n), n étant un entier > 0 , et par C l'espace des fonctions complexes $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, définies et continues dans I. Alors on a $I = I_1 \times \dots \times I_n$, I_k étant un intervalle de R, pour $k = 1, \dots, n$. En désignant par C_k un point arbitraire de I_k , nous poserons pour tout k :

$$\mathfrak{J}_k f(x) = \int_{C_k}^{x_k} f(x, \dots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \dots, x_n) d\xi,$$

(1)

Par exemple, dans la théorie des nombres complexes, on exem-
./.

et, pour tout système $r = (r_1, \dots, r_n)$ de n entiers $r_i \geq 0$:

$$\mathcal{J}^r f = \mathcal{J}_1^{r_1} \dots \mathcal{J}_n^{r_n}$$

Dans ce cas, la notion de distribution dans I est donnée par les axiomes suivants :

Axiome 1.- Toute fonction $f \in C$ est une distribution dans I .

Axiome 2.- A toute distribution T dans I et tout $i = 1, \dots, n$ correspond une distribution $D_i T$, que l'on appelle la dérivée de T par rapport à x_i , de telle façon que I) si T est une fonction admettant dans I dérivée continue par rapport à x_i au sens usuel, $D_i T$ est cette dérivée; II) $D_i D_j T = D_j D_i T$, pour $i, j = 1, \dots, n$.

Definition 1.- Pour tout système $r = (r_1, \dots, r_n)$ de n entiers $r_i \geq 0$ et toute distribution T dans I , on pose $D^r T = D_1^{r_1} \dots D_n^{r_n} T$.

Axiome 3.- Toute distribution T dans I est de la forme $T = D^r f$, où r est un système de n entiers ≥ 0 et $f \in C$.

Axiome 4.- Si l'on a $D^r f = D^r g$, r étant un système de n entiers $r_i \geq 0$ et $f, g \in C$, alors $f - g$ est la somme de n fonctions $\theta_1, \dots, \theta_n \in C$, telles que $D_i^{r_i} \theta_i = 0$ au sens usuel, pour $i = 1, \dots, n$.

Nous désignerons par P_r l'ensemble des fonctions de la forme $\theta_1 + \dots + \theta_n$, avec $\theta_i \in C$ et $D_i^{r_i} \theta_i = 0$ au sens usuel; alors θ_i est, évidemment, représentée par un polynôme de degré $< r_i$ en x_i , dont les coefficients sont des fonctions

soit la forme algébrique ou celle trigonométrique, suivant la nature de la question considérée.

$\in C$, indépendantes de x_i .

Tel que dans le cas d'une seule variable, on démontre (d'une façon analogue) que cette axiomatique est déterminée et compatible. La seule différence essentielle se présente dans la deuxième partie de la démonstration. On part maintenant de l'ensemble $N^n \times C$ des couples (r, f) , où $r \in N^n$ (système de n entiers $r_i \geq 0$) et $f \in C$, et on pose encore $(r, f) \sim (s, g)$, si et seulement s'il existe un système $m \geq r, s$ tel que

$$(5) \quad \mathfrak{J}^{m-r} f - \mathfrak{J}^{m-s} g \in P_m$$

La difficulté se lève, lorsqu'il faut démontrer que, s'il existe un $m \geq r, s$ vérifiant (5), tout autre $k \geq r, s$ vérifie la même condition. On le démontre en s'appuyant sur les deux lemmes suivants

Lemme 1.- Si $\theta \in P_r$, on aura $\mathfrak{J}^p \theta \in P_{r+p}$, pour tout $p \in N^n$.

Lemme 2.- Si θ est une fonction $\in P_r$, telle que la dérivée $D^p \theta$ existe au sens usuel et est continue dans I (avec $p \leq r$), alors on a $D^p \theta \in P_{r-p}$.

En effet, supposons ces deux lemmes démontrés et soit μ le plus petit système d'entiers μ_i tel que $\mu \geq r, s$, c'est-à-dire $\mu_i = \max(r_i, s_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Alors, si m est un système $\geq r, s$ vérifiant (5), on en déduit, par l'application de $D^{m-\mu}$, en tenant compte du lemme 2

$$\mathfrak{J}^{\mu-r} f - \mathfrak{J}^{\mu-s} g \in P_\mu ;$$

d'où, en appliquant $\mathfrak{J}^{k-\mu}$, compte tenu du lemme 1,

$$\mathfrak{J}^{k-r} f - \mathfrak{J}^{k-s} g \in P_k, \text{ pour tout } k \geq r, s$$

Le reste de la démonstration est trivialement analogue à celle que l'on a fait dans le cas $n = 1$. Observons seulement que les opérations de dérivation peuvent maintenant se définir en général, en posant :

$$D^p [r, f] = [r + p, f],$$

pour tout système d'entiers $p_i \geq 0$. En particulier, on a $D^p = D_1$, lorsque $p_1 = 1$ et $p_j = 0$ pour $j \neq 1$. La permutabilité de ces opérateurs est une conséquence triviale de la définition.

Démonstration du lemme 1. Elle est presque immédiate. Il suffit de rappeler que \mathfrak{J}^p est le produit de $\mathfrak{J}_1^{p_1}, \dots, \mathfrak{J}_n^{p_n}$ dans un ordre arbitraire et que, si θ_1 est un polynôme de degré $< r_1$ en x_1 , à coefficients continus dans I , indépendants de x_1 , $\mathfrak{J}_j \theta_1$ est encore un polynôme en x_1 à coefficients de même type, de degré $< r_1 + 1$ ou $< r_1$ selon que $j = 1$ ou $j \neq 1$.

Démonstration du lemme 2. Elle est un peu moins facile. Pour être plus bref, on peut la faire suivant une idée de H. KÖNIG [1], en s'appuyant sur des résultats classiques concernant les différences finies. Pour toute $f \in C$ et tout $i = 1, \dots, n$, désignons par $\Delta_{i, h_i} f$, ou simplement par $\Delta_{h_i} f$, la différence finie de f par rapport à x_i , correspondante à l'accroissement réel h_i , c'est-à-dire, la fonction de x_1, \dots, x_n

$$f(x_1, \dots, x_i, x_i + h_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

Pour tout $x_i \in I_i$, on peut évidemment choisir h_i de façon que cette fonction reste définie dans un sous-intervalle de I contenant

x_i Or il est aisé de voir, en appliquant des résultats classiques, que P_r peut être défini comme l'ensemble des fonctions $f \in C^{(1)}$ vérifiant l'équation aux différences finies

$$\Delta_h^r f = \Delta_{h_1}^{r_1} \dots \Delta_{h_n}^{r_n} f = 0, \text{ avec } h \text{ arbitraire.}$$

Cela étant, soit ϑ une fonction $\in P_r$, telle que $D^p \vartheta$ existe et est continue dans I (avec $p \leq r$). Dans ces conditions on aura.

$$\Delta_h^{r-p} \Delta_k^p \vartheta = 0, \text{ quels que soient } h, k \in R^n,$$

et on en déduit, compte tenu d'un résultat connu :

$$\Delta_h^{r-p} D^p \vartheta = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^{r-p} \Delta_k^p \vartheta}{k_1^{p_1} \dots k_n^{p_n}} = 0,$$

d'où $D^p \vartheta \in P_{r-p}$

c.q.f.d.

(1)

Ce fait se démontre d'une façon élémentaire, plus simple que celle suivie par H. KÖNIG.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] H.KÖNIG Neue Begründung der theorie der "Distributionen"
von L.Schwartz, Math. Nachrichten, 9, p.129-148
(1953).
- [2] J.MIKUSINSKI - R.SIKORSKI The elementary theory of di-
stributions (I), Panstwowe Wydwnictwo Naukowe,
Varsavia (1957).
- [3] L.SCHWARTZ Théorie des distributions (I et II), Hermann,
Paris.
- [4] J.SEBASTIAO E SILVA Sur une construction axiomatique de
la théorie des distributions, Rev.Fac.Ciencias
Lisboa, 2^a serie A, 4, p.79-186 (1954-55).