

# PORTUGALIAE MATHEMATICA

Revista editada  
por  
ANTÓNIO MONTEIRO  
com  
a cooperação de  
HUGO RIBEIRO, J. PAULO, M. ZALUAR NUNES

VOLUME 2  
1941

FACULDADE DE CIÊNCIAS  
LISBOA — PORTUGAL

Publicação subsidiada pelo Instituto para a Alta Cultura

# SUR L'AXIOMATIQUE DES ESPACES DE HAUSDORFF

PAR J. SEBASTIÃO E SILVA<sup>1</sup> (À LISBONNE)

(Recebido em 1941, Janeiro)

Notre principal objectif est d'indiquer quelques définitions axiomatiques des espaces de Hausdorff, en prenant pour notions primitives : 1) la notion de *frontière* (§ 3); 2) la notion d'*orte* (§ 4); 3) la notion de *bord* (§ 4). D'ailleurs, dans le § 2, nous analysons, d'un point de vue logique, les systèmes d'axiomes, que nous rappelons dans le § 1. Enfin, le § 5 est consacré à quelques propriétés des espaces de Hausdorff, que l'on déduit de l'axiome D : ces propriétés concernent un nombre fini quelconque  $n \geq 2$  de points distincts. Nous établissons encore d'autres résultats, à savoir l'équivalence entre chacune des conditions  $b_3$  et  $b_4$ , et la condition 2° de F. Riesz, dans des espaces très généraux (§ 3).

## 1. QUELQUES DÉFINITIONS CONNUES DES ESPACES DE HAUSDORFF

DÉFINITION 1. Un espace de Hausdorff est un espace (V) où les familles de voisinages des points *peuvent être* choisies de façon à satisfaire aux axiomes suivants :

A. À tout point  $a$  correspond au moins un voisinage  $V(a)$  et chaque voisinage  $V(a)$  de  $a$  contient le point  $a$ .

B. Étant donnés deux voisinages  $V_1(a)$  et  $V_2(a)$  de  $a$ , il existe un voisinage  $V_3(a)$  de  $a$  contenu dans  $V_1(a)$  et  $V_2(a)$ .

C. Quel que soit le point  $b$  du voisinage  $V(a)$  de  $a$ , il existe un voisinage  $V(b)$  de  $b$  contenu dans  $V(a)$ .

D. Pour tout couple de points distincts  $a$  et  $b$ , il existe deux voisinages respectifs,  $V(a)$  de  $a$  et  $V(b)$  de  $b$ , qui sont disjoints.

Dans son livre *Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale*, p. 204, M. Fréchet pose le problème suivant : «formuler, d'une façon simple, une condition portant *directement* sur l'opération de dérivation et qui suffise, quand on l'adjoint aux conditions 1° à 5°, à caractériser l'espace de Hausdorff». M. A. Mon-

<sup>1</sup> Bolseiro do Instituto para a Alta Cultura.

<sup>2</sup> Conditions 1° à 4° de F. Riesz et condition 5° : «Tout ensemble dérivé est fermé».

teiro<sup>1</sup> a résolu ce problème, et il a réussi à caractériser les espaces de Hausdorff non seulement au moyen de l'opération de dérivation, mais aussi au moyen des notions de *fermeture* et d'*intérieur*.

Nous allons reproduire les systèmes d'axiomes que M. A. Monteiro utilise pour définir les espaces de Hausdorff, par l'intermédiaire des opérateurs  $'$  et  $\bar{\phantom{x}}$ .

DÉFINITION 2. On dit qu'un ensemble abstrait  $1$  et un opérateur  $'$ , qui à chaque ensemble  $A \subset 1$  fait correspondre un, et un seul, ensemble  $A' \subset 1$ , nommé *ensemble dérivé* de  $A$ , définissent un espace de Hausdorff, si l'on a :

I'.  $(A + B)' = A' + B'$ , quels que soient  $A \subset 1$  et  $B \subset 1$ .

II'.  $A'' \subset A'$ , quel que soit  $A \subset 1$ .

III'.  $A' = 0$ , si  $A \subset 1$  est formé d'un seul point.

IV'. Si les points distincts  $a_1$  et  $a_2$  appartiennent, à la fois, à l'ensemble dérivée de  $A \subset 1$ , on peut décomposer  $A$  en deux parties disjointes,  $A_1$  et  $A_2$  telles que  $A'_1$  ne contient pas  $a_2$  et  $A'_2$  ne contient pas  $a_1$ .

DÉFINITION 3. Un espace de Hausdorff est un système  $(1, \bar{\phantom{x}})$ , constitué par un ensemble abstrait  $1$  et par un opérateur  $\bar{\phantom{x}}$ , qui à chaque ensemble  $A \subset 1$  fait correspondre un, et un seul, ensemble  $\bar{A} \subset 1$ , nommé *ensemble de fermeture* de  $A$ , de la façon suivante :

I.  $\overline{A + B} = \bar{A} + \bar{B}$ , quels que soient  $A \subset 1$  et  $B \subset 1$ .

II.  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ , quel que soit  $A \subset 1$ .

III.  $\bar{A} = A$ , si  $A$  est contenu dans un point de  $1$ .

IV. Si les points distincts  $a_1$  et  $a_2$  appartiennent à l'ensemble de fermeture de  $A \subset 1$ , on peut décomposer  $A$  en deux parties disjointes,  $A_1$  et  $A_2$ , telles que  $\bar{A}_1$  ne contient pas  $a_2$  et  $\bar{A}_2$  ne contient pas  $a_1$ .

Pour que ces définitions soient équivalentes, on doit convenir d'appeler ensemble dérivé d'un ensemble donné  $A$  l'ensemble  $A'$  des points  $x$  tels que  $x \in \bar{A} - (x)$  (d'où  $\bar{A} = A + A'$ ). En outre, on doit supposer que l'on a la relation bien connue entre les familles de voisinages des points de  $1$  et l'opération de dérivation définie dans  $1$ .

M. A. Monteiro observe encore : « En utilisant la relation  $i(A) = 1 - (1 - \bar{A})$ , on obtient facilement une caractérisation des espaces de Hausdorff au moyen de la notion d'intérieur d'un ensemble ».

<sup>1</sup> A. Monteiro, *Caractérisation des espaces de Hausdorff, au moyen de l'opération de dérivation*, Port. Math., vol. I, fasc. 4.

## 2. REMARQUES SUR LES AXIOMATIQUES PRÉCÉDENTES

Établissons, d'abord, le résultat suivant :

L) Pour que, dans un espace  $(V)$ , l'axiome D soit vérifié, il faut et il suffit qu'étant donnés deux points distincts  $a_1$  et  $a_2$ , il existe un ensemble  $A$  tel que  $a_1 \in i(A)$ ,  $a_2 \in \epsilon(A)$ , ou, ce qui revient au même,  $a_2 \notin \bar{A}$ ,  $a_1 \notin \overline{1 - A}$ .

En effet, si l'axiome D est vérifié, et si  $a_1$  et  $a_2$  sont deux points distincts, il existe un voisinage  $V(a_1)$  de  $a_1$  et un voisinage  $V(a_2)$  de  $a_2$  tels que  $V(a_1) \cdot V(a_2) = 0$ . Si l'on pose  $A = V(a_1)$ , on aura évidemment  $a_1 \in i(A)$ ; d'ailleurs on a:  $a_2 \in i(1 - A) = \epsilon(A)$ , puisque  $V(a_2) \subset 1 - A$  et que  $a_2 \in i[V(a_2)]$ . Il existe donc un ensemble  $A$  qui satisfait à la condition ci-dessus énoncée.

Soient, maintenant,  $a_1$  et  $a_2$  deux points distincts de l'espace; s'il existe un ensemble  $A$  tel que  $a_1 \in i(A)$ ,  $a_2 \in \epsilon(A)$ , il y aura, au moins, un voisinage  $V(a_1)$  de  $a_1$  contenu dans  $A$  et un voisinage  $V(a_2)$  de  $a_2$  contenu dans  $1 - A$ , et alors  $V(a_1) \cdot V(a_2) = 0$ .

**THÉORÈME 2.1** — *Pour que, dans un espace  $(V)$  quelconque, l'axiome D soit vérifié, il faut et il suffit qu'étant donnés deux points distincts  $a_1$  et  $a_2$ , appartenant à la fois à l'ensemble de fermeture d'un ensemble arbitraire  $A$ , on puisse décomposer  $A$  en deux parties disjointes  $A_1$  et  $A_2$  ( $A = A_1 + A_2$ ,  $A_1 A_2 = 0$ ), telles que  $a_1 \notin \bar{A}_2$ ,  $a_2 \notin \bar{A}_1$ .*

*Dém.* Supposons d'abord que l'espace considéré vérifie l'axiome D, et soient  $a_1$  et  $a_2$  deux points distincts quelconques. D'après L), il existe un ensemble  $E$  tel que  $a_1 \notin \bar{E}$ ,  $a_2 \notin \overline{1 - E}$ . Si l'on pose  $A_2 = AE$ ,  $A_1 = A(1 - E)$ , on aura évidemment  $A_1 + A_2 = A$ ,  $A_1 A_2 = 0$ . D'ailleurs, si l'on avait  $a_1 \in \bar{A}_2$ , on aurait aussi  $a_1 \in \bar{E}$ , puisque  $A_2 \subset E$  (condition 1° de F. Riesz). Mais  $a_1 \notin \bar{E}$ ; par conséquent  $a_1 \notin \bar{A}_2$ . On voit de même que  $a_2 \notin \bar{A}_1$ . La condition est donc nécessaire.

Réciproquement, supposons que la condition énoncée plus haut est vérifiée, et posons  $A = 1$ . Alors, si l'on se donne deux points  $a_1$  et  $a_2$  distincts, on a:  $a_1 \in \bar{A}$ ,  $a_2 \in \bar{A}$  (puisque, dans ce cas,  $\bar{A} = A$ ); par conséquent, il existe deux ensembles  $A_1$  et  $A_2 = 1 - A_1$ , tels que  $a_1 \notin \bar{A}_2$ ,  $a_2 \notin \bar{A}_1$ , ce qui veut dire, d'après L), que l'axiome D est vérifié.

1. Si l'espace considéré vérifie la condition 2° de F. Riesz, on aura

évidemment  $a_1 \in \bar{A}_1$  et  $a_2 \in \bar{A}_2$ , dès que  $A_1 + A_2 = A$ ,  $a_1 \in \bar{A}$ ,  $a_2 \in \bar{A}$ ,  $a_1 \notin \bar{A}_2$ ,  $a_2 \notin \bar{A}_1$ . On peut donc écrire  $a_1 \in \bar{A}_1 - \bar{A}_2$ ,  $a_2 \in \bar{A}_2 - \bar{A}_1$ . D'ailleurs, il est évident que, dans ce cas, les ensembles  $A_1$  et  $A_2$  ne peuvent pas être vides.

2. La condition énoncée plus haut n'est que la condition  $\bar{\text{IV}}$  (§ 1). Quoique cette condition implique, dans un espace (V), la condition  $\bar{\text{III}}$ , les conditions  $\bar{\text{I}} - \bar{\text{IV}}$  sont indépendantes entre elles. Seulement, on pourrait remplacer  $\bar{\text{III}}$  par une condition plus faible; mais il se peut que cette nouvelle condition, quoique plus faible, ait une forme plus compliquée, et c'est justement ce qui arrive dans ce cas. En effet, on peut, tout au plus, remplacer  $\bar{\text{III}}$  par l'ensemble des conditions suivantes:  $\bar{\text{III}}_a$   $\bar{0} = 0$ ;  $\bar{\text{III}}_b$   $A \subset \bar{A}$  si  $A$  est formé d'un seul point; ce qui ne simplifie pas vraiment le système  $\bar{\text{I}} - \bar{\text{IV}}$ . L'ensemble des conditions  $\bar{\text{I}}$  et  $\bar{\text{III}}_b$  implique la condition «  $A \subset \bar{A}$ , quel que soit  $A$  » qui, suffit, quand on l'adjoint à la condition  $\bar{\text{III}}_a$ , à caractériser les espaces topologiques de M. Fréchet, par l'intermédiaire de l'opérateur  $\bar{\phantom{x}}$ <sup>1</sup>. Remarquons maintenant que l'axiome  $\bar{\text{III}}_a$  devient superflu, si l'espace dont il s'agit est formé, tout au moins, de deux points.

3. En utilisant la relation  $i(A) = \bar{\text{I}} - \bar{A}$ , on traduit facilement l'axiome D en termes d'intérieur. Cependant, la condition que l'on obtient de cette manière n'a pas une forme aussi simple que celle de  $\bar{\text{III}}$ . Pour que l'on obtienne un énoncé, en termes d'intérieur, semblable à celui de  $\bar{\text{III}}$ , il faut faire intervenir la condition 2° de F. Riesz :

**THÉORÈME 2.2** — *Dans un espace (V) qui vérifie la condition 2° de F. Riesz, l'axiome D est équivalent à la condition suivante: «Quels que soient les points distincts  $a_1$  et  $a_2$ , intérieurs à l'ensemble arbitraire  $A$ , on peut décomposer  $A$  dans la somme de deux ensembles  $A_1$  et  $A_2$  dis-joints, tels que  $a_1 \in i(A_1)$  et  $a_2 \in i(A_2)$ ».*

*Dém.* Si l'axiome D est vérifié, il existe, en vertu de L), un ensemble E, tel que  $a_1 \in i(E)$ ,  $a_2 \in i(1-E)$ . Alors posons  $A_1 = AE$ ,  $A_2 = A(1-E)$ ; on aura  $A_1 + A_2 = A$ ,  $A_1 A_2 = 0$ . D'autre part, puisque l'espace donné vérifie la condition 2° de F. Riesz, on aura  $a_1 \in i(A)$ .  $i(E) = i(AE)$ ,

<sup>1</sup> H. Ribeiro, *Sur l'axiomatique des espaces topologiques de M. Fréchet*, «Port. Math.» vol. I, fas. 4.

et, par suite,  $a_1 \in i(A_1)$ . De la même manière, on démontre que  $a_2 \in i(A_2)$ . La condition du théorème est donc vérifiée.

Réciproquement, supposons que cette condition est remplie, et posons  $\Lambda = 1$ . Dans ces conditions, puisque tous les points sont intérieurs à  $\Lambda$ , si l'on se donne deux points  $a_1$  et  $a_2$  distincts, il y aura deux ensembles  $A_1$  et  $A_2 = 1 - A_1$ , tels que  $a_1 \in i(A_1)$ ,  $a_2 \in i(1 - A_1) = i(A_2)$ ; cela veut dire, d'après L), que l'axiome D est aussi vérifié.

4. Il est évident qu'on ne peut pas avoir, à la fois,  $a_1 \in i(A_1)$  et  $a_1 \in i(A_2)$ ,  $A_1$  et  $A_2$  étant des ensembles disjoints. Il est donc permis d'écrire, dans l'énoncé,  $a_1 \in i(A_1) - i(A_2)$ ,  $a_2 \in i(A_2) - i(A_1)$ , au lieu de  $a_1 \in i(A_1)$ ,  $a_2 \in i(A_2)$ .

THÉOREME 2.3' — Dans un espace (V), vérifiant la condition 2° de F. Riesz, l'axiome D est équivalent à l'ensemble des conditions suivantes : a) «  $A' = 0$ , si  $a$  est formé d'un seul point (condition 3° de F. Riesz) » ; b) « Quels que soient les points distincts  $a_1$  et  $a_2$ , appartenant à la fois à l'ensemble dérivé d'un ensemble  $A$  donné, on peut décomposer  $A$  dans la somme de deux ensembles disjoints  $A_1$  et  $A_2$ , tels que  $a_1 \notin A'_2$ ,  $a_2 \notin A'_1$  ».

Dém. Supposons d'abord que l'axiome D est vérifié ; proposons-nous d'établir que les conditions a) et b) du théorème sont aussi remplies. On sait que la condition 3° de F. Riesz (condition a)) est impliquée par la condition D. Quant à b) remarquons que, si l'on a :  $a_1 \in A'$ ,  $a_2 \in A'$ , on aura aussi  $a_1 \in \bar{A}$ ,  $a_2 \in \bar{A}$  ; par conséquent, on peut (théorème 2.2) trouver deux ensembles  $A_1$  et  $A_2$ , tels que  $A_1 + A_2 = A$ ,  $A_1 A_2 = 0$ ,  $a_1 \notin \bar{A}_2$ ,  $a_2 \notin \bar{A}_1$ . De ces deux dernières conditions, il s'ensuit que  $a_1 \notin A'_2$ ,  $a_2 \notin A'_1$ . La condition b) est donc remplie.

Réciproquement, si les conditions a) et b) sont remplies, l'axiome D est aussi vérifié. Soient, en effet,  $a_1$  et  $a_2$  deux points distincts donnés, et considérons les deux cas suivants :

1<sup>er</sup> cas — L'un, au moins, des points  $a_1$  et  $a_2$  est un point isolé de l'espace. Soit  $a_1$  ce point. Alors, on doit prendre l'ensemble  $(a_1)$  pour voisinage de  $a_1$  :  $V(a_1) = (a_1)$ . D'ailleurs, il existe, d'après a), un voisinage  $V(a_2)$  de  $a_2$  tel que  $a_1 \notin V(a_2)$ , d'où  $V(a_1) \cdot V(a_2) = 0$ , ce qui veut dire que l'axiome D est vérifié.

2<sup>e</sup> cas — Les points  $a_1$  et  $a_2$  sont, tous deux, des points d'accumulation de l'espace. Si donc on pose  $\Lambda = 1$ , on pourra, d'après b), décomposer  $A$  en deux parties disjointes  $A_1$  et  $A_2$ , telles que  $a_1 \notin A'_2$ ,  $a_2 \notin A'_1$ .

<sup>1</sup> Ce théorème ne diffère pas, au fond, de celui que M. A. Monteiro établit dans le commencement de son travail déjà cité.

Posons encore  $E_1 = A_1 + (a_1) - (a_2)$ ,  $E_2 = A_2 + (a_2) - (a_1)$ ; puisque l'espace donné satisfait aux conditions 2° et 3° de F. Riesz (nous supposons que la condition a) est remplie) on aura  $E'_1 = A'_1$ ,  $E'_2 = A'_2$ , et, par suite, d'après ce qui précède,  $a_1 \notin E'_2$ ,  $a_2 \notin E'_1$ , d'où  $a_1 \notin \bar{E}_2$ ,  $a_2 \notin \bar{E}_1$ , vu que  $a_1 \notin E_2$ ,  $a_1 \notin E_1$ . D'ailleurs, on a  $E_2 = 1 - E_1$ . On voit donc, en tenant compte de L), que l'axiome D est vérifié.

5. On voit tout de suite que la condition b) énoncée plus haut n'est que la condition IV' du système I'-IV' (§ 1). Dans le travail déjà cité, M. A. Monteiro commence par observer que l'axiome D est équivalent, dans un espace accessible (même dans un espace (V) qui vérifie la condition 2° de F. Riesz) à l'ensemble des conditions suivantes: D\* «Deux points  $a_1$  et  $a_2$  distincts étant donnés, il existe un voisinage de  $a_1$  qui ne contient pas  $a_2$  (condition 3° de F. Riesz, dans un espace (V))»; D<sup>(w)</sup> «Pour tout couple de points distincts  $a_1$  et  $a_2$ , il existe deux voisinages respectifs  $V(a_1)$  et  $V(a_2)$ , tels que  $V(a_1) \cdot V(a_2) - (a_1) - (a_2) = 0$ ». Ensuite, M. A. Monteiro établit l'équivalence des conditions D<sup>(w)</sup> et IV', dans un espace (V) quelconque.

6. Il serait intéressant de trouver une condition qui traduise l'axiome D en termes de dérivé, plus directement que IV'. Nous avons trouvé que, dans un espace topologique, vérifiant les conditions 1° et 2° de F. Riesz<sup>1</sup>, la condition D est équivalente à chacune des conditions suivantes:

D'. «Quels que soient les points distincts  $a_1$  et  $a_2$ , et l'ensemble  $A$ , formé au moins de deux points, on peut toujours décomposer, au moins de deux façons distinctes, l'ensemble  $A$ , en deux parties  $A_1$  et  $A_2$ , disjointes et non vides, telles que  $a_1 \notin A'_2$ ,  $a_2 \notin A'_1$ ».

D'<sub>bis</sub>. «Si l'on se donne deux points  $a_1$  et  $a_2$  distincts, et un ensemble  $A$  quelconque, on peut décomposer  $A$  dans la somme de deux ensembles  $A_1$  et  $A_2$  disjoints, tels que  $a_1$  ne soit pas point d'accumulation de  $A_2 + (a_2)$  et  $a_2$  ne soit pas point d'accumulation de  $A_1 + (a_1)$ ».

Nous nous bornerons à démontrer l'équivalence entre D et D'. Supposons d'abord que l'axiome D est vérifié, et soit  $A$  un ensemble quelconque. On peut alors considérer les deux cas suivants:

1<sup>er</sup> cas — *L'un, au moins, des points  $a_1$  et  $a_2$  n'appartient pas à  $A'$ .* Alors, considérons les ensembles  $A_1 = (p)$  et  $A_2 = A - (p)$ , où  $p$  désigne un point quelconque de  $A$ : on a, évidemment,  $A_1 + A_2 = A$ ,  $A_1 A_2 = 0$ . D'autre part, puisque  $a_1 \notin A'$ ,  $a_1$  ne peut pas être point d'accumulation de  $A_2 \subset A$ ; c'est-à-dire,  $a_1 \notin A'_2$ . D'ailleurs, puisque

<sup>1</sup> Dans ce travail, nous appelons espaces topologiques les espaces topologiques au sens de M. Fréchet.

l'espace donné satisfait à la condition 3° de F. Riesz, on aura  $a_2 \notin A'_1$ .

2<sup>e</sup> cas — Les deux points  $a_1$  et  $a_2$  appartiennent, à la fois, à l'ensemble  $A'$ . On peut, évidemment, appliquer à ce cas le théorème antérieur.

Par conséquent, on peut, dans tous les cas, décomposer  $A$  dans la somme de deux ensembles  $A_1$  et  $A_2$  disjoints et non vides, tels que  $a_1 \notin A'_2$ ,  $a_2 \notin A'_1$ . Soient maintenant  $p$  et  $q$ , respectivement, un point de  $A_1$  et un point de  $A_2$ , et posons  $E_1 = A_1 - (p) + (q)$ ,  $E_2 = A_2 - (q) + (p)$ . On aura  $E_1 + E_2 = A$ ,  $E_1 E_2 = 0$ , d'une part; et, d'autre part,  $E'_1 = A'_1$ ,  $E'_2 = A'_2$ , puisque l'espace donné satisfait aux conditions 2° et 3° de F. Riesz. Il en découle que  $a_1 \notin E'_2$ ,  $a_2 \notin E'_1$ . D'ailleurs on a  $E_1 \neq A_1$ ,  $E_2 \neq A_2$ . La condition D' est donc remplie.

Réciproquement, D' entraîne D. Pour s'en convaincre, observons que la condition b) du théorème 2.3 est impliqué par D': il nous reste donc à prouver que D' implique la condition 3° de F. Riesz. Soient alors  $a_1$  et  $b_1$  deux points quelconques: proposons-nous d'établir que  $b_1$  n'appartient pas à l'ensemble dérivé de  $(a_1)$ . À cet effet, prenons encore deux points  $a_2$  et  $b_2$ , tels  $a_2 \neq a_1$ ,  $b_2 \neq b_1$  (on peut avoir  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2$ ). Alors, on peut décomposer l'ensemble  $A = (a_1) + (a_2)$ , au moins de deux façons distinctes, en deux parties  $A_1$  et  $A_2$ , disjointes et non vides, tels que  $b_1 \notin A'_2$ ,  $b_2 \notin A'_1$ : on a donc, nécessairement,  $b_1 \notin (a_1)'$ , c. q. f. d.

On voit sans peine que les conditions D' et D' bis ne permettent pas de simplifier considérablement le système I'-IV', quand on la met au lieu de IV': on peut, tout au plus, remplacer III' par la condition plus faible «Un point ne peut pas être point d'accumulation de lui-même». Cependant, l'axiome III' devient superflu, si l'espace donné a plus d'un point.

### 3. DÉFINITION AXIOMATIQUE DES ESPACES DE HAUSDORFF AU MOYEN DE LA NOTION DE «FRONTIÈRE»

Un opérateur  $\overline{\phantom{x}}$  étant défini dans un ensemble fondamental 1, nous convenons de représenter par  $f(E)$  l'ensemble  $f(E) = \overline{E(1 - E)}$ , où  $E \subset 1$ . Si le système  $(1, \overline{\phantom{x}})$  définit un espace (V),  $f(E)$  devient la *frontière* de  $E$ .

Dans ce §, nous nous proposons de caractériser les espaces de Hausdorff, en prenant pour notion primitive la notion de «frontière». M. Zarycki<sup>1</sup> a déjà partiellement résolu ce problème, en définissant,

<sup>1</sup> «Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique.» Fund. Math. 9. 1927, p. 3-15.



par l'intermédiaire de l'opérateur  $f$ , les espaces de Kuratowski, c'est-à-dire, les espaces  $(V)$  qui vérifient la condition  $2^o$  de F. Riesz et la condition  $\alpha$  suivante: «  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ , quel que soit  $A \subset 1$  ». Cette catégorie d'espaces devient la catégorie des espaces accessibles, quand on adjoint aux conditions précédentes la condition  $3^o$  de F. Riesz. Si l'on remplace  $3^o$  par la condition D, plus forte, on obtient les espaces de Hausdorff qui sont des espaces accessibles particuliers. Ce sont les suivants, abstraction faite des notations, les axiomes que M. Zarzcki emploie, pour caractériser, en termes de frontière, les espaces de Kuratowski:

- 1<sub>f</sub>.  $AB f(AB) = AB [f(A) + f(B)]$ ,
- 2<sub>f</sub>.  $f(A) = f(1 - A)$ ,
- 3<sub>f</sub>.  $f(0) = 0$ ,
- 4<sub>f</sub>.  $f^2(A) \subset f(A)^1$ ,

où  $A$  et  $B$  désignent des ensembles arbitraires.

On voit sans peine que la condition 1<sub>f</sub> est équivalente à l'ensemble des conditions 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup> de F. Riesz. Pour chacune de ces conditions, il existe des conditions équivalentes, portant directement sur l'opérateur  $f$ . En effet, on sait que la condition 1<sup>o</sup> est équivalente à l'une quelconque, des conditions suivantes:

- a<sub>1</sub>) Si  $A \subset B$ , on a  $A f(B) \subset f(A)$ ,
- a<sub>2</sub>)  $AB [f(A) + f(B)] \subset f(AB)$ ,
- a<sub>3</sub>) Si  $A \subset B$ , on a  $f(A) \subset B + f(B)$ ,
- a<sub>4</sub>)  $f(A) + f(B) \subset A + B + f(A + B)$ ,

où  $A$  et  $B$  désignent des ensembles quelconques.

D'autre part, la condition 2<sup>o</sup> est équivalente à chacune des conditions suivantes:

- b<sub>1</sub>)  $f(A + B) \subset f(A) + f(B)$ ,
- b<sub>2</sub>)  $f(AB) \subset f(A) + f(B)$ ,
- b<sub>3</sub>)  $f(A) + f(B) = f(A - B) + f(B - A) + f(AB)$ ,
- b<sub>4</sub>)  $f(A) + f(B) = f(A + B) + f(AB) + f(A).(B)$ ,

$A$  et  $B$  étant des ensembles quelconques.

Nous n'avons trouvé nulle part les conditions b<sub>3</sub>) et b<sub>4</sub>); nous établirons, à la fin de ce §, l'équivalence entre chacune de ces conditions et la condition 2<sup>o</sup>.

Quant aux conditions 2<sub>f</sub> et 3<sub>f</sub>, elles ne sont que les axiomes que M. H. Ribeiro (travail déjà cité) introduit pour définir les espaces topologiques par l'intermédiaire de l'opérateur  $f$ .

<sup>1</sup> En général,  $\varphi$  étant un opérateur qui à chaque ensemble  $A \subset 1$ , fait correspondre un ensemble  $\varphi(A) \subset 1$ , nous convenons de représenter  $\varphi(\varphi(A))$ , par  $\varphi^2(A)$ ;  $\varphi(\varphi(\varphi(A)))$ , par  $\varphi^3(A)$ , et ainsi de suite.

Enfin, la condition  $4_1$  est équivalente à la condition  $\alpha$ , dans un espace (V) qui vérifie la condition 2° de F. Riesz, c'est-à-dire, dans un espace que vérifie les conditions  $1_1$ ,  $2_1$ ,  $3_1$ .

Il nous reste donc à renforcer le système  $1_1$ - $4_1$ , de façon à obtenir une caractérisation des espaces de Hausdorff. Pour cela, nous allons utiliser le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.1** — *Dans un espace (V) que vérifie la condition 2° de F. Riesz, l'axiome D est équivalent à l'ensemble des deux conditions suivantes : I) « $f(A) \subset A$ , si  $A$  est formé d'un seul point» ; II) «Si deux points distincts donnés  $a_1$  et  $a_2$  appartiennent à la fois à la frontière d'un ensemble  $A$  quelconque, on peut décomposer  $A$  dans la somme de deux ensembles  $A_1$  et  $A_2$  disjoints, tels que  $a_1 \notin f(A_2)$ ,  $a_2 \notin f(A_1)$ ».*

*Dém.* En premier lieu, observons que, dans un espace topologique, la condition I) est équivalente à la condition 3° de F. Riesz. Alors, si l'espace donné satisfait à l'axiome D, nous savons déjà qu'il vérifie aussi la condition 3° de F. Riesz et, par suite, la condition I) ; en outre, il vérifie la condition II). En effet, soit  $A$  un ensemble quelconque, et soient  $a_1$  et  $a_2$  deux points appartenant à  $f(A)$ . On a, d'après la définition de «frontière»,  $a_1 \notin \bar{A}$ ,  $a_2 \notin \bar{A}$ , ce qui nous permet d'appliquer ici le théorème 2.1 : il existe, nécessairement, deux ensembles  $A_1$  et  $A_2$ , tels que :  $A_1 + A_2 = A$ ,  $A_1 A_2 = 0$ ,  $a_1 \notin \bar{A}_2$ ,  $a_2 \notin \bar{A}_1$ . Mais de ces deux dernières conditions il s'ensuit :  $a_1 \notin f(A_2)$ ,  $a_2 \notin f(A_1)$  ; la condition II) est donc aussi vérifiée.

Supposons maintenant que les conditions I) et II) sont vérifiées. Alors, si  $a_1$  et  $a_2$  sont deux points arbitraires, deux cas peuvent se présenter :

1<sup>er</sup> cas — *L'un des points  $a_1$  et  $a_2$  est un point isolé de l'espace.* Soit  $a_1$  ce point. Comme nous l'avons vu à propos du théorème 2.3, l'axiome D est vérifié, puisque l'espace donné satisfait à la condition 3° de F. Riesz.

2<sup>e</sup> cas — *Les points  $a_1$  et  $a_2$  sont des points d'accumulation de l'espace.* Dans ce cas, posons  $A = 1 - (a_1) - (a_2)$ . Puisque les conditions 2° et 3° de F. Riesz sont remplies, on a :  $a_1 \in A'$ ,  $a_2 \in A'$  ; d'où  $a_1 \in \bar{A}$ ,  $a_2 \in \bar{A}$ . D'ailleurs on a :  $a_1 \in 1 - A$ ,  $a_2 \in 1 - A$ , d'où  $a_1 \in \overline{1 - A}$ ,  $a_2 \in \overline{1 - A}$ . On peut donc écrire,  $a_1 \in f(A)$ ,  $a_2 \in f(A)$ , et d'après l'hypothèse, on peut décomposer  $A$  en deux parties disjointes  $A_1$  et  $A_2$ , de façon que  $a_1 \notin f(A_2)$ ,  $a_2 \notin f(A_1)$ . Il en découle que  $a_1 \notin \bar{A}_2$ ,  $a_2 \notin \bar{A}_1$ , puisque l'on a  $\bar{E} = E + f(E)$  et que  $a_1 \notin A_2$ ,  $a_2 \notin A_1$ . D'autre part, on a, en tenant compte des con-

ditions 2° et 3°,  $a_1 \notin \overline{\Lambda_2 + (a_2)}$ ,  $a_2 \notin \overline{\Lambda_1 + (a_1)}$ . Or  $\Lambda_2 + (a_2) = 1 - [\Lambda_1 + (a_1)]$  et il existe donc un ensemble  $E = \Lambda_2 + (a_2)$ , tel que  $a_1 \notin E$ ,  $a_2 \notin \overline{1 - E}$ , ce qui veut dire, d'après I), que l'axiome D est vérifié.

REMARQUES. 1. Puisque l'espace dont il s'agit dans le théorème 3.1 satisfait à la condition 2° de F. Riesz, on peut remplacer dans l'énoncé  $a_1 \notin f(\Lambda_2)$  et  $a_2 \notin f(\Lambda_1)$ , respectivement par  $a_1 \in f(\Lambda_1) - f(\Lambda_2)$  et  $a_2 \in f(\Lambda_2) - f(\Lambda_1)$ .

2. On peut remplacer l'ensemble des deux conditions 1<sub>f</sub> et 2<sub>f</sub> par la condition suivante:

$$I_f. \quad ABf(AB) = AB[f(1 - A) + f(1 - B)],$$

si la condition 3<sub>f</sub> est remplie.

Pour s'en convaincre, posons  $B = 1$  et laissons  $A$  indéterminé. Alors, on déduit de  $I_f$ :  $Af(A) = Af(1 - A)$ , ou, ce qui revient au même,

$$1) \quad f(A) \supset Af(1 - A)$$

et  $f(1 - A) \supset Af(A)$ . De cette dernière inclusion, il résulte, en substituant  $A$  par  $1 - A$  (ce qui est permis,  $A$  étant un ensemble arbitraire),

$$2) \quad f(A) \supset (1 - A)f(1 - A).$$

De 1) et 2), on déduit  $f(A) + f(A) \supset Af(1 - A) + (1 - A)f(1 - A)$  ou  $f(A) \supset f(1 - A)$ , et, par suite,  $f(A) = f(1 - A)$ , puisque l'ensemble  $A$  est arbitraire. Par conséquent,  $I_f$  entraîne 2<sub>f</sub>. D'autre part, il est évident que  $I_f$  implique 1<sub>f</sub> et que, réciproquement, l'ensemble des conditions 1<sub>f</sub> et 2<sub>f</sub> implique la condition  $I_f$ .

3. L'ensemble de la conditions I) du théorème 3.1 et de la condition 3<sub>f</sub> peut-être remplacé par la condition suivante: « $f(A) \subset A$  si l'ensemble  $A$  est contenu dans un point».

Si l'espace dont il s'agit est formé, tout au moins, de deux points, et si la condition  $I_f$  est vérifiée, la condition I) du théorème 3.1 implique la condition 3<sub>f</sub>.

En effet, nous savons que  $I_f$  implique 1<sub>f</sub> et 2<sub>f</sub>; si donc on pose  $B = 1 - A$ , on a  $f[A(1 - A)] \subset f(A) + f(1 - A)$ , ou  $f(0) \subset f(A)$ ,  $A$  étant arbitraire. Dans ces conditions, si  $A_1$  et  $A_2$  désignent deux ensembles distincts formés d'un seul point, on a  $f(0) \subset f(A_1)$ ,  $f(0) \subset f(A_2)$ , d'où, en tenant compte de la condition I) du théorème 3.1,  $f(0) \subset A_1$ ,  $f(0) \subset A_2$ , ou  $f(0) \subset A_1 \cap A_2 = 0$ ; on a, donc,  $f(0) = 0$ , c. q. f. d.

---

Nous pouvons maintenant donner la suivante

DÉFINITION — Soient  $1$  un ensemble abstrait et  $f$  un opérateur qui, à chaque ensemble  $A \subset 1$ , fait correspondre un ensemble  $f(A) \subset 1$ ,

nommé *frontière* de  $A$ ; on dit que le système  $(1, f)$  constitue un espace de Hausdorff, si l'on a :

- I<sub>f</sub>.  $AB \cap f(AB) = AB[f(1 - A) + f(1 - B)]$ , quels que soient les ensembles  $A \subset 1$  et  $B \subset 1$ .
- II<sub>f</sub>.  $f^2(A) \subset f(A)$ , quel que soit  $A \subset 1$ .
- III<sub>f</sub>.  $f(A) \subset A$ , si  $A$  est l'ensemble vide ou un ensemble formé d'un seul point.
- IV<sub>f</sub>. Si les points distincts  $a_1$  et  $a_2$  appartiennent, à la fois, à la frontière d'un ensemble arbitraire  $A$ , on peut décomposer  $A$  en deux parties disjointes, telles que  $a_1 \notin f(A_2)$ ,  $a_2 \notin f(A_1)$ .

En outre, on doit convenir d'appeler «ensemble dérivé» d'un ensemble  $A$  quelconque l'ensemble  $A'$  des points  $x$  tels que  $x \in f[A - (x)]$ ; ou, ce qui revient au même d'appeler «ensemble de fermeture» de  $A$  l'ensemble  $\bar{A}$  défini par l'égalité  $\bar{A} = A + f(A)$ .

D'ailleurs, on voit sans peine que les axiomes I<sub>f</sub>-IV<sub>f</sub> sont indépendants.

Nous allons maintenant établir l'équivalence entre chacune des conditions b<sub>3</sub>) et b<sub>4</sub>) et la condition 2° de F. Riesz :

1. Dans un espace topologique, la condition 2° de F. Riesz est équivalente à la condition b<sub>3</sub>).

Nous savons que chacune des conditions b<sub>1</sub>) et b<sub>2</sub>) est équivalente à 2°: alors il est évident que b<sub>3</sub>) implique 2°. Réciproquement, la condition 2° entraîne b<sub>3</sub>). En effet, puisque  $A - B = A(1 - B)$  et que  $f(1 - B) = f(B)$ , on a, en tenant compte de b<sub>2</sub>),  $f(A - B) \subset f(A) + f(B)$ . On a donc aussi  $f(B - A) \subset f(A) + f(B)$  et, par suite,

$$f(A - B) + f(B - A) + f(AB) \subset f(A) + f(B),$$

puisque  $f(AB) \subset f(A) + f(B)$ . D'autre part, on a  $A = A - B + AB$ , d'où, en tenant compte de b<sub>1</sub>),  $f(A) \subset f(A - B) + f(AB)$  et, de même,  $f(B) \subset f(B - A) + f(AB)$ . On a donc

$$f(A) + f(B) \subset f(A - B) + f(B - A) + f(AB).$$

2. Dans un espace topologique, les conditions 2° de F. Riesz et b<sub>4</sub>) sont équivalentes.

On voit sans peine que b<sub>4</sub>) implique 2°. Supposons maintenant que la condition 2° est remplie. Alors, puisque  $f(A + B) \subset f(A) + f(B)$ ,  $f(AB) \subset f(A) + f(B)$  et  $f(A).f(B) \subset f(A) + f(B)$ , on a

$$f(A + B) + f(AB) + f(A).f(B) \subset f(A) + f(B).$$

D'autre part, on a  $A = (A + B) \cap [1 - (B(1 - AB))]$ , d'où, en tenant compte de b<sub>2</sub>),  $f(A) \subset f(A + B) + f[B(1 - AB)] \subset f(A + B) + f(B) + f(AB)$ , ou bien  $f(A) + f(B) \subset f(A + B) + f(AB) + f(B)$ . On aura,

de même,  $f(A) + f(B) \subset f(A + B) + f(AB) + f(A)$ . De ces deux dernières inclusions, il s'ensuit  $f(A) + f(B) \subset [f(A + B) + f(AB) + f(B)] \cdot [f(A + B) + f(AB) + f(A)]$ , d'où

$$f(A) + f(B) \subset f(A + B) + f(AB) + f(A) \cdot f(A).$$

La condition  $b_4$  est donc aussi vérifiée.

#### 4. DÉFINITION AXIOMATIQUE DES ESPACES DE HAUSDORFF AU MOYEN DES NOTIONS D'«ORLE» ET DE «BORD»

Un opérateur  $\bar{\phantom{x}}$  étant défini dans un ensemble abstrait  $I$ , nous convenons de représenter par  $\alpha(A)$  l'ensemble  $\alpha(A) = (1 - A) \cdot \bar{A}$ , et par  $\mathfrak{b}(A)$  l'ensemble  $\mathfrak{b}(A) = A \cdot \overline{(1 - A)}$ . On a, évidemment,  $\alpha(A) = (1 - A)f(A)$ ,  $\mathfrak{b}(A) = Af(A)$  et  $\alpha(A) = \mathfrak{b}(1 - A)$ , où  $A$  désigne un sous-ensemble de  $I$ . Si le système  $(I, \bar{\phantom{x}})$  constitue un espace  $(V)$ , on appelle  $\alpha(A)$  et  $\mathfrak{b}(A)$ , respectivement, l'*orle* et le *bord* de  $A$ .

M. Zarycki a donné une définition axiomatique des espaces que vérifient les conditions  $1_f$ - $4_f$ , en prenant pour notion primitive la notion de *bord*. Abstraction faite des notations, les axiomes que M. Zarycki emploie dans cette définition sont les suivants :

- 1<sub>b</sub>.  $\mathfrak{b}(AB) = A\mathfrak{b}(B) + B\mathfrak{b}(A)$ ,
- 2<sub>b</sub>.  $\mathfrak{b}(1) = 0$ ,
- 3<sub>b</sub>.  $\mathfrak{b}[1 - \mathfrak{b}(1 - A)] \subset A$ ,

où  $A$  et  $B$  désignent des ensembles arbitraires.

La condition 1<sub>b</sub> est équivalente à l'ensemble des conditions 1° et 2° F. Riesz. D'ailleurs, la condition 1° est, elle-même, équivalente à la condition «  $A \subset B$  implique  $A\mathfrak{b}(B) \subset \mathfrak{b}(A)$  » et la condition 2°, équivalente à la condition «  $\mathfrak{b}(AB) \subset \mathfrak{b}(A) + \mathfrak{b}(B)$ , quels que soient  $A$  et  $B$  ».

L'axiome 2<sub>b</sub> est l'un des deux axiomes qui, suivant M. H. Ribeiro, servent à caractériser les espaces topologiques au moyen de l'opérateur  $\mathfrak{b}$ . De 1<sub>b</sub> il résulte le second axiome que M. H. Ribeiro introduit pour caractériser les espaces topologiques : «  $\mathfrak{b}(A) \subset A$ , quel que soit  $A$  ».

Enfin, la condition 3<sub>b</sub> est équivalente à la condition  $\alpha$  («  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ , quel que soit  $A$  »), si les conditions 1<sub>b</sub> et 2<sub>b</sub> sont vérifiées.

Nous allons indiquer une condition, autre que 3<sub>b</sub>, équivalente à la condition  $\alpha$ , dans des espaces très généraux :

*Dans un espace topologique, vérifiant les conditions 1° et 2° de F. Riesz, la condition  $\alpha$  est équivalente à la condition suivante : «  $\mathfrak{b}[1 - \mathfrak{b}(1 - A)] \subset \mathfrak{b}(A)$ , quel que soit  $A$  ».*

Pour établir cette équivalence, supposons d'abord que l'espace donné vérifie  $\alpha$ . Alors, puisque  $1 - b(1 - A) = 1 - (1 - A)\bar{A} = A + (1 - \bar{A})$ , on a, en tenant compte de  $1^\circ$ ,  $b[1 - b(1 - A)] = [A + (1 - \bar{A})](1 - \bar{A})\bar{A} \subset [A + (1 - \bar{A})](1 - \bar{A}) \cdot \bar{A} = A \cdot \bar{A}(1 - \bar{A})$ , d'où  $b[1 - b(1 - A)] \subset b(A)$ , vu que  $A \subset \bar{A}$ . La condition énoncée plus haut est donc aussi vérifiée.

En utilisant la relation  $\alpha(A) = b(1 - A)$ , on obtient immédiatement les conditions suivantes, dont l'ensemble est équivalent au système  $1_\alpha - 3_\alpha$ :

- 1 $_\alpha$ .  $\alpha(A + B) = (1 - A)\alpha(B) + (1 - B)\alpha(A)$ ,
- 2 $_\alpha$ .  $\alpha(0) = 0$ ,
- 3 $_\alpha$ .  $\alpha^2(A) \subset A$ ,

où  $A$  et  $B$  désignent des ensembles quelconques.

Nous allons maintenant renforcer le système  $1_\alpha - 3_\alpha$ , au moyen de deux conditions supplémentaires, de façon qu'il puisse servir à caractériser les espaces de Hausdorff, en prenant pour notion primitive la notion d'orle. Pour cela, il suffit d'établir les deux théorèmes suivants:

**THÉORÈME 4.1** — *Pour que, dans un espace topologique, la condition  $3^\circ$  de F. Riesz soit vérifiée, il faut et il suffit que l'on ait: «  $\alpha(A) = 0$ , si  $A$  est formé d'un seul point ».*

*Dém.* — Étant donné que, dans un espace topologique de M. Fréchet, la condition  $3^\circ$  de F. Riesz est équivalente à la condition «  $\bar{A} = A$ , si  $A$  est formé d'un seul point », et que l'on a, d'après la définition de l'opérateur  $\alpha$ ,  $\bar{A} = A + \alpha(A)$ , on pourra écrire l'égalité  $\bar{A} = A$  sous la forme  $A + \alpha(A) = A$ , ou, ce qui revient au même,  $\alpha(A) \subset A$ , ou bien, puisque  $\alpha(A) \subset 1 - A$ ,

$$\alpha(A) \subset A(1 - A) = 0. \quad \text{c. q. f. d.}$$

**THÉORÈME 4.2** — *Dans un espace  $(V)$  qui vérifie la condition  $2^\circ$  de F. Riesz, l'axiome D est équivalent à l'ensemble des conditions suivantes: i) «  $\alpha(A) = 0$  si  $A$  est formé d'un seul point »; j) « Quels que soient les points distincts  $a_1$  et  $a_2$ , appartenant à la fois à l'orle d'un ensemble arbitraire  $A$ , on peut décomposer  $A$  en deux parties disjointes  $A_1$  et  $A_2$ , telles que  $a_1 \notin \alpha(A_2)$ ,  $a_2 \notin \alpha(A_1)$  ».*

*Dém.* — Que l'axiome D implique la condition i), il est immédiat. Établissons que D implique aussi j). À cet effet, observons que, si D

<sup>1</sup> On peut aussi employer la condition  $\alpha^2(A) \subset \alpha(1 - A)$ , que l'on déduit de la condition:  $b[1 - b(1 - A)] \subset b(A)$ .

est vérifié, il en est de même de la condition IV (théorème 2.1): alors, si les points  $a_1$  et  $a_2$  appartiennent, à l'orle d'un ensemble  $A$  donné, on aussi  $a_1 \in \bar{A}$ ,  $a_2 \in \bar{A}$ , et, par suite, on peut décomposer  $A$  en deux parties disjointes  $A_1$  et  $A_2$ , telles que  $a_1 \notin \bar{A}_2$ ,  $a_2 \notin \bar{A}_1$ , d'où  $a_1 \notin \mathfrak{x}(A_2)$ ,  $a_2 \notin \mathfrak{x}(A_1)$ . La condition j) est donc aussi vérifiée.

Réciproquement, supposons que les conditions i) et j) sont remplies dans l'espace donné. Alors, deux points  $a_1$  et  $a_2$  distincts étant donnés, considérons les deux cas suivants:

1<sup>er</sup> cas — *L'un, au moins, des points  $a_1$  et  $a_2$  est un point isolé de l'espace.* Nous avons déjà vu (dém. du théorème 2.3) que dans ce cas, la condition 3° de F. Riesz (et par suite la condition i)), implique l'axiome D.

2<sup>e</sup> cas — *Les deux points  $a_1$  et  $a_2$  sont des points d'accumulation de l'espace.* Alors on a:  $a_1 \in \mathfrak{x}[1 - (a_1) - (a_2)]$ ,  $a_2 \in \mathfrak{x}[1 - (a_1) - (a_2)]$ . Posons, par commodité,  $A = 1 - (a_1) - (a_2)$ . Vu que la condition j) est vérifiée, on peut décomposer  $A$  en deux parties disjointes,  $A_1$  et  $A_2$ , de façon que  $a_1 \notin \mathfrak{x}(A_2)$ ,  $a_2 \notin \mathfrak{x}(A_1)$ , d'où  $a_1 \notin \bar{A}_2$ ,  $a_2 \notin \bar{A}_1$ , puisque  $a_1 \in 1 - A_2$ ,  $a_2 \in 1 - A_1$ . Alors, on a, en tenant compte de i) et de 2°:  $a_1 \notin \overline{A_2 + (a_2)}$ ,  $a_2 \notin \overline{A_1 + (a_1)}$ . Par conséquent, il existe un ensemble  $E = A_2 + (a_2)$ , tel que  $a_1 \notin \bar{E}$ ,  $a_1 \notin 1 - \bar{E}$ , ce qui veut dire, d'après I), que l'axiome D est vérifié.

REMARQUES. — Vu que l'espace donné satisfait à la condition 2° de F. Riesz, laquelle est équivalente à la condition «  $\mathfrak{x}(A + B) \subset \mathfrak{x}(A) + \mathfrak{x}(B)$ , quels que soient  $A$  et  $B$  », on peut mettre, dans l'énoncé du théorème, au lieu de «  $a_1 \notin \mathfrak{x}(A_2)$ ,  $a_2 \notin \mathfrak{x}(A_1)$  », les conditions suivantes: «  $a_1 \in \mathfrak{x}(A_1) - \mathfrak{x}(A_2)$ ,  $a_2 \in \mathfrak{x}(A_2) - \mathfrak{x}(A_1)$  ».

Observons enfin que l'on peut remplacer les conditions 2° et i), par la condition suivante: «  $\mathfrak{x}(A) = 0$ , si  $A$  est formé d'un seul point ou coïncide avec l'ensemble vide ». Cependant, si l'espace donné a au moins deux points, et si les conditions 1° et i) sont vérifiées, la condition 2° devient superflue.

Cela posé, nous pouvons donner la suivante

DÉFINITION. On appelle espace de Hausdorff tout système  $(I, \mathfrak{x})$ , constitué par un ensemble abstrait  $I$  et par un opérateur  $\mathfrak{x}$ , qui, à chaque ensemble  $A \subset I$ , fait correspondre un ensemble  $\mathfrak{x}(A) \subset I$ , nommé *orle* de  $A$ , de façon que:

I°.  $\mathfrak{x}(A + B) = (1 - B)\mathfrak{x}(A) + (1 - A)\mathfrak{x}(B)$  quels que soient  $A \subset I$  et  $B \subset I$ .

- II<sub>0</sub>.  $\mathfrak{a}^2(\Lambda) \subset \Lambda$ , pour tout ensemble  $\Lambda \subset 1$ .  
 III<sub>0</sub>.  $\mathfrak{a}(\Lambda) = 0$ , si  $\Lambda$  est formé d'un seul point ou coïncide avec l'ensemble 0.  
 IV<sub>0</sub>. Si les points distincts  $a_1$  et  $a_2$  appartiennent à l'orle d'un ensemble  $\Lambda$  donné, on peut décomposer  $\Lambda$  en deux parties disjointes  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  telles que  $a_1 \notin \mathfrak{a}(\Lambda_2)$ ,  $a_2 \notin \mathfrak{a}(\Lambda_1)$ .

D'ailleurs, on doit convenir d'appeler «ensemble de fermeture» de  $\Lambda$  l'ensemble  $\bar{\Lambda} = \Lambda + \mathfrak{a}(\Lambda)$  (d'où, en vertu de I<sub>0</sub>,  $\mathfrak{a}(\Lambda) = (1 - \Lambda)\bar{\Lambda}$ ).

Pour obtenir une définition des espaces de Hausdorff, au moyen de la notion de *bord*, il suffit de remarquer que l'axiome IV<sub>0</sub> peut-être remplacé par la suivante condition :

IV<sub>b</sub> — Quels que soient les points distincts  $a_1$  et  $a_2$ , appartenant au bord d'un ensemble  $\Lambda$  quelconque, on peut décomposer  $1 - \Lambda$  en deux parties disjointes  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ , telles que  $a_1 \notin \mathfrak{b}(1 - \Lambda_2)$ ,  $a_2 \notin \mathfrak{b}(1 - \Lambda_1)$ .

Remarquons que IV<sub>b</sub> n'a pas une forme aussi simple et suggestive que celle de IV<sub>0</sub>. Nous avons fait une remarque semblable à propos de l'opérateur  $\mathfrak{i}$ .

## 5. QUELQUES GÉNÉRALISATIONS

La condition D, et, de même, les conditions  $\bar{IV}$ , IV<sub>f</sub>, IV<sub>0</sub>, etc., peuvent être modifiées, de façon qu'ils s'appliquent à n'importe quel nombre fini  $n \geq 2$  de points distincts. Pour cela, il faut cependant admettre la condition 2° de F. Riesz. Observons que ces conditions ne déterminent pas l'exclusion des espaces qui n'ont pas  $n$  points distincts.

Cela dit, nous pouvons établir les généralisations suivantes :

THÉORÈME 5.1 — Dans un espace ( $V$ ) qui vérifie la condition 2° de F. Riesz, l'axiome  $\bar{IV}$  est équivalent à la condition suivante : «Étant donnés  $n \geq 2$  points distincts  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , appartenant à l'ensemble de fermeture d'un ensemble arbitraire  $A$ , il existe une répartition<sup>1</sup> de  $A$  constituée par  $n$  ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , telle que  $a_i \notin \bar{A}_j$ , pour  $i \neq j$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ )».

Dém. — Que la condition énoncée ci-dessus implique  $\bar{IV}$ , il est immédiat. Établissons que la condition du théorème est impliquée par  $\bar{IV}$ . Pour cela, nous allons employer la méthode de l'induction complète, en démontrant que, si le théorème est vrai pour  $n-1$ , il sera aussi vrai pour  $n$ .

<sup>1</sup> Un ensemble  $E$  étant donné, on dit qu'une famille quelconque d'ensembles  $\{R_i\}$  définit une répartition de  $E$ , si l'on a :  $\sum_i R_i = E$ ;  $R_i R_k = 0$ , pour  $i \neq k$ .



Soient  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, n$  points distincts quelconques appartenant à l'ensemble de fermeture d'un ensemble  $\Lambda$  donné. Supposons maintenant que le théorème est vrai pour  $n-1$ : alors, il existera une répartition de  $\Lambda$  constituée par  $n-1$  ensembles  $A_1^*, A_2^*, \dots, A_{n-1}^*$ , telle que

$$(1) \quad a_i \notin \bar{A}_j^* \text{ pour } i \neq j (i, j = 1, 2, \dots, n-1).$$

Mais, étant donné que  $a_n$  appartient aussi à  $\bar{\Lambda}$  et que l'on  $\Lambda = A_1^* + A_2^* + \dots + A_{n-1}^*$ , le point  $a_n$  doit appartenir, en vertu de 2°, à l'un, au moins, des ensembles  $\bar{A}_1^*, \bar{A}_2^*, \dots, \bar{A}_{n-1}^*$ : soient  $\bar{A}_1^*, \bar{A}_1^*, \dots, \bar{A}_p^*$ , ces ensembles auxquels  $a_n$  appartient. On a donc

$$(2) \quad \begin{aligned} a_n &\in \bar{A}_i^* \text{ pour } i = 1, 2, \dots, p; \\ a_n &\notin \bar{A}_i^* \text{ pour } i = p+1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

D'ailleurs, puisque la condition 2° est vérifiée, on a, en vertu de (1),  $a_i \in \bar{A}_i^* (i = 1, 2, \dots, n-1)$ : par conséquent, on peut, d'après le théorème 2.1, décomposer chaque ensemble  $A_i^* (i = 1, 2, \dots, p)$  en deux parties disjointes  $A_i$  et  $A_i^{**}$ , de façon que

$$(3) \quad a_i \notin \bar{A}_i^{**}, a_n \notin A_i (i = 1, 2, \dots, p).$$

Posons  $A_j = A_j^* (j = p+1, \dots, n-1)$ ,  $A_n = \sum_{i=1}^{i=p} A_i^{**}$ : on a, évidemment,  $\Lambda = \sum_{i=1}^{i=n} A_i$  et  $A_i A_k = 0$ , pour  $i \neq k$ . D'ailleurs on a, en tenant compte de (1),  $a_k \notin \bar{A}_i^{**} (i = 1, 2, \dots, p; k = p+1, \dots, n-1)$ , puisque  $A_i^{**} \subset A_i^*$  et que l'espace donné est un espace (V).

On a donc, en tenant compte de (3),

$$(4) \quad a_i \notin \bar{A}_n (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

On a, enfin, en vertu de la condition 1° de F. Riesz,

$$(5) \quad a_k \notin \bar{A}_l \text{ pour } k \neq l (k = 1, 2, \dots, n-1; l = 1, 2, \dots, p).$$

En tenant compte de (1), (2), (3), (4) et (5), on peut donc écrire:  $a_i \notin \bar{A}_j$  pour  $i \neq j (i, j = 1, 2, \dots, n)$ . Le théorème est, donc, démontré.

**THÉORÈME 5.2** — Dans un espace (V) qui vérifie la condition 2° de F. Riesz, on peut énoncer l'axiome D de la façon suivante: «Étant donnés  $n \geq 2$  points distincts  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , il existe  $n$  voisinages respectifs  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_n)$ , qui sont disjoints deux à deux».

*Dém.* — Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n, n$  points distincts quelconques. On sait que tous ces points appartiennent à l'ensemble de fermeture de l'en-

semble fondamental 1 : on peut donc, d'après le théorème précédent, trouver une répartition de 1, constituée par  $n$  ensembles  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ , telle que  $a_i \notin \overline{\Lambda_j}$  pour  $i \neq j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). Il s'ensuit, en tenant compte de 2°, que

$$a_i \notin \overline{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_{i-1} + \Lambda_{i+1} + \dots + \Lambda_n} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ou, ce qui revient au même,  $a_i \notin \overline{1 - \Lambda_i}$ , c'est-à-dire,  $a_i \in 1 - \overline{1 - \Lambda_i} = i(\Lambda_i)$ . Alors, pour chaque point  $a_i$ , il existera un voisinage  $V(a_i) \subset \Lambda_i$ , et on aura  $V(a_i) \cdot V(a_k) = 0$ , pour  $j \neq k$ , puisque  $\Lambda_j \cdot \Lambda_k = 0$ , pour  $j \neq k$ . Les voisinages  $V(a_1), V(a_2), \dots, V(a_n)$  sont donc disjoints deux à deux, ce qui prouve le théorème.

On démontre de même que, dans un espace topologique vérifiant les conditions 1° et 2° de F. Riesz, l'axiome D implique les propriétés suivantes :

a) Si les points distincts  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) sont intérieurs à un ensemble arbitraire  $\Lambda$ , il existe une répartition de  $\Lambda$ , en  $n$  ensembles  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ , telle que  $a_k \in i(\Lambda_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

b) Étant donné un ensemble  $\Lambda$  quelconque et  $n \geq 2$  points distincts  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , appartenant à l'ensemble  $\Lambda'$ , il existe une répartition de  $\Lambda$ , constituée par  $n$  ensembles  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$ , telle que  $a_i \notin \Lambda'_i$ , pour  $i \neq j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

La dernière condition reste encore valable, si l'on remplace l'opérateur par chacun des opérateurs  $f$  et  $x$ .

## E R R A T A

### Corrections à «Sur l'axiomatique des espaces de Hausdorff» par J. Sebastião e Silva

Remplacer les mots «espace topologique» par «espace (V)», dans les énoncés 1 et 2 (page 103).

Il y a aussi une erreur typographique importante à signaler, à la page 96.

À la place de  $i(A)=\overline{1-A}$ , on doit lire  $i(A)=1-\overline{1-A}$ .