

PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 17

1 9 5 8

Publicação subsidiada por

Publication subventionnée par

Publication sponsored by

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA e SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Edição de

«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua Nova da Trindade, 1, 5.º-S
LISBOA-2 (PORTUGAL)

HERMANN & C.^{te}, Editeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5^{em})

SUR L'ESPACE DES FONCTIONS HOLOMORPHES A CROISSANCE LENTE A DROITE *

PAR J. SEBASTIÃO E SILVA
Lisbonne

Dans une conversation récente⁽¹⁾, M. LAURENT SCHWARTZ a bien voulu m'indiquer quelques améliorations importantes de certains de mes résultats exposés dans «Le calcul opérationnel au point de vue des distributions» (voir Bibliographie, [7]). Le but essentiel de la présente note est d'exposer ces points de vue, vraiment féconds, dûs à M. SCHWARTZ, et d'en développer quelques conséquences. Naturellement, ces améliorations peuvent se généraliser au cas de plusieurs variables (cf. [9]); cela fera l'objet d'un prochain travail. En outre, elles ont facilité mon étude des ultra-distributions, dans [8].

1. Recherche des opérations linéaires continues définies dans \mathfrak{A}_ω . Dans [7] j'ai commencé par définir l'espace localement convexe \mathfrak{A}_ω des «fonctions holomorphes à croissance lente à droite», de la façon suivante: soit \mathfrak{A}_k , pour $k=0, 1, 2, \dots$, l'espace vectoriel des fonctions complexes $\varphi(z)$ de la variable complexe z , telles que $\varphi(z)/z^k$ résulte continue et bornée dans le demi-plan droit $\Re z \geq k$ et holomorphe pour $\Re z > k$, cet espace étant muni de la topologie associée à la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{\Re z > k} |\varphi(z)|;$$

alors \mathfrak{A}_ω est, par définition, la limite inductive des \mathfrak{A}_k par rapport aux applications canoniques $\mathfrak{A}_k \rightarrow \mathfrak{A}_{k+1}$ (qui sont totalement continues).

Je me suis posé d'abord le problème suivant: *Déterminer l'expression générale des applications linéaires continues de \mathfrak{A}_ω dans un espace localement convexe E donné, qui, pour simplifier, est supposé complet par rapport aux suites.*

Pour résoudre ce problème, j'ai employé une méthode générale, de nature métamathématique (cf. [5]), qui a réussi dans plusieurs autres

* Reçu le 1^{er} octobre 1957.

(1) Eue en Février 1957, à Lisbonne.

questions de même genre⁽¹⁾. On commence par chercher une «base» de la structure \mathfrak{A}_ω , c'est-à-dire un système d'éléments de \mathfrak{A}_ω , en fonction desquels on puisse exprimer tout élément de \mathfrak{A}_ω , au moyen des seules notions primitives de cette structure: *somme, multiplications scalaires et limite* (de suites). Or, les fonctions de z du type $(z - \lambda)^{-1}$, où λ est un nombre complexe quelconque, forment justement une «base» de \mathfrak{A}_ω en ce sens-là — ou, comme on dit dans le cas présent: *un ensemble total* de l'espace vectoriel topologique \mathfrak{A}_ω . En effet, désignons par $\mathbf{h}(\lambda)$ l'application $\lambda \rightarrow (\hat{z} - \lambda)^{-1}$ de la droite complexe \mathbf{C} dans \mathfrak{A}_ω et par C_k la droite $\Re z = k$ orientée vers le haut; on démontre que, pour tout $k = 0, 1, \dots$ et toute $\varphi \in \mathfrak{A}_k$, on a la «formule de représentation»⁽²⁾

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\lambda) \mathbf{h}(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\hat{z} - \lambda} d\lambda,$$

cette intégrale ayant le sens usuel, par rapport à la topologie de \mathfrak{A}_ω , si la fonction $z\varphi(z)$ est bornée sur C_k (on désigne par \mathfrak{A}_k^* l'ensemble de telles fonctions et on pose $\mathfrak{A}_\omega^* = \bigcup_1^\infty \mathfrak{A}_k^*$) et, en posant, par définition, dans le cas général:

$$\int_{C_k} \varphi(\lambda) \mathbf{h}(\lambda) d\lambda = \lim_{\zeta \rightarrow \varphi} \int_{C_k} \zeta(\lambda) \mathbf{h}(\lambda) d\lambda, \text{ avec } \zeta \in \mathfrak{A}_\omega^*$$

(on démontre que \mathfrak{A}_ω^* est dense dans \mathfrak{A}_ω).

Cela étant, on voit aussitôt que toute application linéaire continue F de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} est nécessairement donnée par la formule

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\lambda) F[\mathbf{h}(\lambda)] d\lambda$$

ou encore

$$(1.1) \quad F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\lambda) \mathbf{f}(\lambda) d\lambda,$$

où la fonction de λ

$$\mathbf{f}(\lambda) = F[\mathbf{h}(\lambda)] = F\left(\frac{1}{\hat{z} - \lambda}\right),$$

⁽¹⁾ Dans [6] je ne me suis occupé que des automorphismes d'une structure. Mais, dans un travail non publié, dont [5] n'est qu'un résumé partiel, j'ai envisagé le cas général des «homomorphismes» d'une structure dans une autre.

⁽²⁾ Le signe \frown sur z indique que z est une variable muette.

définie dans \mathbf{C} et à valeurs dans \mathbf{E} est dite l'indicatrice de l'opérateur F .

Pour achever la résolution du problème, il reste à trouver un système de conditions nécessaires et suffisantes, auxquelles doit satisfaire une fonction vectorielle $f(\lambda)$, donnée d'avance, pour qu'elle soit, réciproquement, l'indicatrice d'une certaine application linéaire continue F de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} . À cet effet nous n'avons qu'à suivre notre méthode métamathématique générale :

On essaiera de faire une «description» de la base $h(\lambda)$, en dressant une liste de propriétés de cette entité exprimables en termes primitifs de la structure \mathfrak{A}_ω («somme», «multiplicateurs scalaires» et «limite»). Parmi ces propriétés, on choisira⁽¹⁾ celles qui sont «conservées» par n'importe quelle application linéaire continue F de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} — c'est-à-dire celles qui se retrouvent encore dans l'image $f(\lambda)$ de $h(\lambda)$ par F , exprimées en termes correspondants de la structure \mathbf{E} . On obtient ainsi un système de conditions nécessaires pour que l'application $f(\lambda)$ de \mathbf{C} dans \mathbf{E} soit l'indicatrice d'une application $F \in L(\mathfrak{A}_\omega, \mathbf{E})$. Enfin, il reste à voir si ces conditions sont suffisantes, en vérifiant directement si, ces conditions étant vérifiées par la fonction $f(\lambda)$ donnée, la formule (1.1) définit en effet une application F , linéaire et continue, de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} .

Nous allons voir comment on peut exécuter ce programme.

2. Caractérisation vectoriel-topologique des fonctions indicatrices. Nous avons donnée dans [7] une «description» de la base $h(\lambda)$, au moyen de trois propriétés, dont voici les deux premières :

P1. $h(\lambda)$ est une fonction (à valeurs dans \mathfrak{A}_ω), définie et analytique dans tout le plan de la variable complexe.

P2. Le produit de λ par $h(\lambda)$ est une fonction de λ bornée sur tout demi-plan gauche $\Re z \leq k$.

La troisième propriété — que nous désignons dans [7] par P3 — quoiqu'étant conservée ainsi que P1 et P2, par toute application $F \in L(\mathfrak{A}_\omega, \mathbf{E})$, n'est pas entièrement satisfaisante : elle est presque la traduction littérale du fait que l'application F définie par (1.1) soit continue.

(1) Ce choix ne serait évidemment pas nécessaire s'il s'agissait seulement des isomorphismes de la structure \mathfrak{A}_ω sur la structure \mathbf{E} . Mais nous cherchons, plus généralement, les homomorphismes (au sens général) de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} .

Eh bien, l'idée essentielle de M. SCHWARTZ, que nous nous proposons d'exposer ici, consiste à remplacer P 2 et P 3 par une seule propriété, qui traduit exactement le noeud de la question :

P' 2. *Pour tout $k=0, 1, \dots$, il existe k éléments $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ de \mathfrak{A}_ω et une partie bornée \mathfrak{L}_k de \mathfrak{A}_ω tels que*

$$h(\lambda) - \frac{\zeta_1}{\lambda} - \frac{\zeta_2}{\lambda^2} - \dots - \frac{\zeta_k}{\lambda^k} \in \frac{1}{\lambda^{k+1}} \mathfrak{L}_k, \quad \text{pour } \Re \lambda \leq k.$$

Pour la démonstration, il suffit d'employer la formule

$$\frac{1}{z - \lambda} = -\frac{1}{\lambda} - \frac{z}{\lambda^2} - \dots - \frac{z^{k-1}}{\lambda^k} - \frac{z^k}{\lambda^{k+1}} \frac{\lambda}{z - \lambda}, \quad (\text{pour } \lambda \neq z),$$

en tenant compte de P 2. En effet, d'après P 2, la fonction $\lambda(\hat{z} - \lambda)^{-1}$ de λ (à valeurs dans \mathfrak{A}_ω) est bornée sur tout demi-plan gauche; donc, il en sera de même de la fonction $\lambda \hat{z}^k (\hat{z} - \lambda)^{-1}$ de λ , étant donné que l'application $\varphi \rightarrow \hat{z}^k \varphi$ de \mathfrak{A}_ω dans \mathfrak{A}_ω est continue. Alors, si l'on pose $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = -z$, \dots , $\zeta_k = -z^{k-1}$, on arrive aisément à P' 2.

D'autre part, il est immédiat que cette propriété est conservée par n'importe quelle application $F \in L(\mathfrak{A}_\omega, \mathbf{E})$; c'est-à-dire, toute fonction indicatrice $f(\lambda)$ d'un tel opérateur vérifie nécessairement les conditions suivantes :

P 1. $f(\lambda)$ est une fonction entière de λ (à valeurs dans \mathbf{E}).

P' 2. *Pour tout $k=0, 1, \dots$, il existe k éléments $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ et une partie bornée \mathbf{M}_k de \mathbf{E} , tels que*

$$f(\lambda) - \frac{\mathbf{a}_1}{\lambda} - \frac{\mathbf{a}_2}{\lambda^2} - \dots - \frac{\mathbf{a}_k}{\lambda^k} \in \frac{1}{\lambda^{k+1}} \mathbf{M}_k, \quad \text{pour } \Re \lambda \leq k.$$

On aura évidemment $\mathbf{a}_\nu = F(\zeta_\nu)$, $\nu = 1, \dots, k$, et $\mathbf{M}_k = F(\mathfrak{L}_k)$.

3. Conclusion de la recherche des applications linéaires continues de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} . Il reste à vérifier si P 1 et P' 2 donnent déjà des conditions suffisantes pour que $f(\lambda)$ soit l'indicatrice d'une application $F \in L(\mathfrak{A}_\omega, \mathbf{E})$. Commençons par observer que, si $f(\lambda)$ est une fonction à valeurs dans \mathbf{E} vérifiant P' 2, les coefficients $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots$ sont univoquement déterminés par $f(\lambda)$ (indépendamment de k), puisque l'on a, sur tout demi-plan $\Re \lambda \leq k$:

$$\mathbf{a}_1 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda f(\lambda), \quad \dots, \quad \mathbf{a}_n = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^n \left[f(\lambda) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\mathbf{a}_j}{\lambda^j} \right], \dots$$

Supposons donc ces deux conditions vérifiées par la fonction $f(\lambda)$, donnée d'avance, et posons

$$(3.1) \quad F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\lambda) \left[f(\lambda) - \sum_{v=1}^{k+1} \frac{a_v}{\lambda^v} \right] d\lambda,$$

pour $k = 1, 1, \dots$ et $\varphi \in \mathfrak{A}_k$. Alors il est aisé de voir que cette formule définit, justement, une application F , linéaire et continue, de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} . En effet, puisque $f(\lambda)$ vérifie $P'2$ et que $\varphi(z)/z^k$ est bornée pour $\Re z \geq k$ (car $\varphi \in \mathfrak{A}_k$), on voit, compte tenu de $P'2$, que la fonction intégrande dans (3.1), multipliée par λ^2 , reste bornée sur C_k . Donc l'intégrale existe: elle est même convertible en une intégrale de RIEMANN par le changement de variable $\lambda = k + i \operatorname{tg} t$, ce qui permet de voir que la restriction de F à \mathfrak{A}_k est une application linéaire continue de \mathfrak{A}_k dans \mathbf{E} . Pour montrer que $F \in L(\mathfrak{A}_\omega, \mathbf{E})$, il suffit maintenant de vérifier que la valeur de $F(\varphi)$ donnée par (3.1), avec $\varphi \in \mathfrak{A}_k$, ne change pas, si l'on substitue à k un entier quelconque $k' > k$. On peut le faire en deux étapes successives: on suppose d'abord la substitution effectuée seulement dans la fonction intégrande; on considère ensuite la substitution effectuée aussi en C_k . Pour la première vérification, il suffit de remarquer que, dans cette étape, on introduit seulement des termes nuls, puisque l'on a

$$\int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda^r} d\lambda = 0, \quad \text{pour tout } r \geq k+2.$$

Pour la deuxième vérification, il suffit d'employer le théorème de CAUCHY, comme dans [7], p. 115.

On reconnaît maintenant sans difficulté que $f(\lambda)$ est, précisément, l'indicatrice de F , c'est-à-dire que

$$F\left(\frac{1}{z-\lambda}\right) = f(\lambda), \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{C}.$$

Enfin, si l'on pose

$$F^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \zeta(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour } k=0, 1, \dots \text{ et } \zeta \in \mathfrak{A}_k^*,$$

on voit, d'une façon analogue, que F^* coïncide avec la restriction de F à \mathfrak{A}_ω^* et que, par suite, F est le prolongement de F^* à \mathfrak{A}_ω , par continuité.

On a donc démontré le théorème suivant :

THÉOREME 1. *Il existe une correspondance biunivoque $F \leftrightarrow f$, entre les applications linéaires continues F de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{E} et les applications f de \mathbf{C} dans \mathbf{E} ayant les propriétés P'1 et P'2. Cette correspondance est définie par les formules réciproques :*

$$f(\lambda) = F\left(\frac{1}{\hat{z} - \lambda}\right), \quad \text{pour } \lambda \in \mathbf{C},$$

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour } k=1, 2, \dots \text{ et } \varphi \in \mathfrak{A}_k.$$

où l'intégrale du second membre est l'abréviation de

$$\lim_{\zeta \rightarrow \varphi} \int_{C_k} \zeta(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad \text{avec } \zeta \in \mathfrak{A}_\omega^*.$$

REMARQUE. Il est aisé de voir que, dans cet énoncé, on peut remplacer P'2 par une quelconque des propriétés suivantes :

P''2. *Pour tout $k=0, 1, \dots$, il existe k éléments $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ de \mathbf{E} tels que le produit de $f(\lambda) - \sum_1^k \mathbf{a}_r \lambda^{-r}$ par λ^{k+1} est borné sur tout demi-plan gauche.*

P'''2. *Pour tout $k=0, 1, \dots$, il existe k éléments $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ de \mathbf{E} tels que le produit de $f(\lambda) - \sum_1^k \mathbf{a}_r \lambda^{-r}$ par λ^k tend vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ sur un demi-plan gauche quelconque.*

Cette propriété s'exprime encore, en disant que $f(\lambda)$ admet, sur tout demi-plan gauche, le «développement asymptotique»

$$f(\lambda) \approx \frac{\mathbf{a}_1}{\lambda} + \frac{\mathbf{a}_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{\mathbf{a}_n}{\lambda^n} + \dots, \quad \text{pour } \lambda \rightarrow \infty.$$

4. Justification de la définition d'intégrale qui intervient dans l'énoncé du théorème 1. Nous avons posé, par définition :

$$(4.1) \quad \int_k \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda = \lim_{\zeta \rightarrow \varphi} \int_{C_k} \zeta(\lambda) f(\lambda) d\lambda, \quad \text{avec } \zeta \in \mathfrak{A}_\omega^*.$$

M. SCHWARTZ nous a observé que, pour que cette généralisation soit acceptable sans risque de confusion, il serait nécessaire de montrer,

au moins, que, dans le cas où l'intégrale existe au sens de LEBESGUE (généralisée pour les fonctions vectorielles), sa valeur usuelle coïncide avec celle donnée par (4. 1). C'est ce que nous allons faire maintenant, en nous rapportant à la notion assez générale de «fonction scalairement intégrable». Plus précisément, nous allons montrer que, si, pour tout élément \mathbf{u} du dual \mathbf{E}' de \mathbf{E} , la fonction scalaire de λ

$$\langle \mathbf{u}, \varphi(\lambda) \mathbf{f}(\lambda) \rangle = \varphi(\lambda) \langle \mathbf{u}, \mathbf{f}(\lambda) \rangle$$

est intégrable sur C_k et que l'on pose

$$f_{\mathbf{u}}(\lambda) \equiv \langle \mathbf{u}, \mathbf{f}(\lambda) \rangle, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{C} \text{ et tout } \mathbf{u} \in \mathbf{E}',$$

on aura précisément (quel que soit $\mathbf{u} \in \mathbf{E}'$):

$$(4. 2) \quad (L) \int_{C_k} \varphi(\lambda) f_{\mathbf{u}}(\lambda) d\lambda = \lim \int_{C_k} \zeta(\lambda) f_{\mathbf{u}}(\lambda) d\lambda, \quad \text{avec } \zeta \in \mathfrak{A}_{\omega}^*$$

où le symbole (L) rappelle que l'intégrale est prise au sens de LEBESGUE (évidemment, $f_{\mathbf{u}}(\lambda)$ sera, pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{E}'$, l'indicatrice d'une application linéaire continue de \mathfrak{A}_{ω} dans \mathbf{C} , ce qui assure l'existence de la limite du second membre).

En effet, si $\varphi \in \mathfrak{A}_k$ et que l'on pose

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{k+1}} \varphi(z), \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots,$$

on aura $\varphi_n \in \mathfrak{A}_k^*$ pour tout n et, comme nous l'avons démontré dans [7], p. 111, φ_n converge vers φ , au sens de la topologie de \mathfrak{A}_{ω} . En particulier, on voit que $\varphi_n(z) \rightarrow \varphi(z)$, pour chaque $z \in C_k$, et puisque

$$|\varphi_n(z)| \leq |\varphi(z)|, \quad \text{pour tout } n,$$

on aura sûrement, pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{E}'$,

$$(4. 3) \quad (L) \int_{C_k} \varphi(\lambda) f_{\mathbf{u}}(\lambda) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_k} \varphi_n(\lambda) f_{\mathbf{u}}(\lambda) d\lambda$$

les fonctions $\varphi_n(\lambda) f_{\mathbf{u}}(\lambda)$ et $\varphi(\lambda) f_{\mathbf{u}}(\lambda)$ étant sommables sur C_k , en vertu de l'hypothèse et du fait que $\varphi_n \in \mathfrak{A}_{\omega}^*$ pour tout n . Or (4. 3) implique (4. 2), l'existence de la limite du second membre étant assurée d'avance.

Toutefois, pour marquer qu'il s'agit d'une généralisation de la notion d'intégrale — si quelque confusion est à craindre — on pourra

écrire, dans le cas général, pour noter cette «intégrale», par exemple :

$$\text{V. L.} \int_{C_k} \varphi(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

où V. L. est l'abréviation de «valeur limite». Mais il ne faut pas confondre cette valeur limite avec la «valeur principale» de CAUCHY (si celle-ci existe), puisque c'est là, justement, l'un des cas où les deux valeurs peuvent ne pas coïncider ! Considérons, par exemple, l'indicatrice, $h(\lambda) = (\hat{z} - \lambda)^{-1}$, de l'application identique. Alors on a, par rapport à la topologie de \mathfrak{A}_ω ,

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda)}{\hat{z} - \lambda} d\lambda, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{A}_\omega.$$

Cependant, si $\varphi(z) \equiv 1$, la valeur principale de CAUCHY est, pour tout k :

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow \infty} \int_{k-iy}^{k+iy} \frac{d\lambda}{z - \lambda} = \frac{1}{2},$$

au lieu de 1.

Mais, naturellement, la valeur principale de CAUCHY n'est pas à envisager comme une intégrale généralisée.

5. Le dual de l'espace \mathfrak{A}_ω . Il résulte du théorème 1 (en posant $\mathbf{E} = \mathbf{C}$) que le dual de l'espace \mathfrak{A}_ω est (algébriquement) isomorphe à l'espace des fonctions $f(\lambda)$ complexes entières qui, sur tout demi-plan gauche, admettent un développement asymptotique du type

$$f(\lambda) \approx \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2}{\lambda^2} + \dots + \frac{a_n}{\lambda^n} + \dots \quad \text{pour } \lambda \rightarrow \infty$$

Il est maintenant aisé de voir que la topologie forte dans \mathfrak{A}_ω est donnée par la famille de semi-normes définies par

$$\|f\|_k = \sup_{\Re \lambda < k} \left| \lambda^{k+1} \left(f(\lambda) - \sum_1^k a_r \lambda^{-r} \right) \right|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Cela corrige des affirmations erronées que nous avons faites dans [7] (remarques finales ; p. 130). En particulier, il est faux que toute indicatrice $f(\lambda)$ d'une fonctionnelle $F \in \mathfrak{A}_\omega$ soit à décroissance rapide sur toute verticale. Par exemple, la fonction $(e^\lambda - 1)/\lambda$ est une indicatrice, sans qu'elle soit à décroissance rapide sur les verticales.

6. Le calcul opérationnel modelé sur l'algèbre \mathfrak{A}_ω . Le perfectionnement introduit par M. SCHWARTZ dans le théorème 1 se répercute, d'une façon remarquable, dans les fondements du calcul opérationnel relatif à l'espace fonctionnel \mathfrak{A}_ω , muni de sa structure d'algèbre topologique considérée dans [7]. Soit \mathbf{A} une algèbre complexe, munie d'un élément unité, \mathbf{e} , et d'une topologie d'espace localement convexe, par rapport à laquelle le produit soit séparément continu [c'est-à-dire, tel que les applications $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a} \mathbf{x}$ et $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} \mathbf{a}$ de \mathbf{A} dans \mathbf{A} soient continues pour tout $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$]. Supposons en outre que l'espace \mathbf{A} soit complet pour les suites. Il s'agit maintenant de déterminer les homomorphismes continus⁽¹⁾ de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{A} , faisant correspondre à la fonction $\varphi(z) \equiv 1$ l'unité de \mathbf{A} . Puisque l'on a fait l'adjonction du concept de produit aux notions primitives considérées dans \mathfrak{A}_ω («somme», «opérateurs scalaires» et «limites»), une base de la structure ainsi obtenue sera, par exemple, le seul élément \hat{z} de \mathfrak{A}_ω ,⁽²⁾ étant donné que

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\lambda) (\hat{z} - \lambda \hat{1})^{-1} d\lambda, \quad \text{pour } \varphi \in \mathfrak{A}_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Alors, tout homomorphisme continu F de \mathfrak{A}_ω en \mathbf{A} , tel que $F(\hat{1}) = \mathbf{e}$, est nécessairement défini par

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \varphi(\lambda) (\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1} d\lambda$$

où \mathbf{a} est l'image de la base \hat{z} par F :

$$\mathbf{a} = F(\hat{z})$$

Une «description» de la base \hat{z} est donnée par les propriétés:

Q1. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, l'élément $\hat{z} - \lambda \cdot \hat{1}$ (de \mathfrak{A}_ω) est régulier (c'est-à-dire inversible);

Q2. La fonction $(\hat{z} - \lambda \cdot \hat{1})^{-1}$ de λ est localement bornée;

Q3. La fonction $(\hat{z} - \lambda \cdot \hat{1})^{-1}$ de λ est bornée sur toute demi-plan gauche.

(1) C'est-à-dire les applications linéaires continues F de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{A} telles que $F(\varphi \psi) = F(\varphi) \cdot F(\psi)$, quelles que soient $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}_\omega$.

(2) Naturellement, nous désignons par \hat{z} la fonction $\varphi(z) \equiv z$ et par $\hat{1}$ la fonction $\varphi(z) \equiv 1$ (élément unité de \mathfrak{A}_ω).

D'où l'on déduit des conditions nécessaires pour qu'un élément \mathbf{a} de \mathbf{A} soit l'image d'un homomorphisme continu F de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{A} tel que $F(\hat{1}) = \mathbf{e}$:

Q 1. L'élément $\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e}$ de \mathbf{A} est régulier pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$;

Q 2. La fonction $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1}$ de λ $\left[\text{que nous écrirons aussi } \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e}} \right]$ est localement bornée ;

Q 3. La fonction $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1}$ de λ est bornée sur tout demi-plan gauche.

La propriété Q 1 peut encore s'exprimer en disant : le spectre de \mathbf{a} est vide dans \mathbf{C} ; ou encore : l'ensemble résolvant de \mathbf{a} est \mathbf{C} .

De Q 2, en tenant compte du fait que le produit dans \mathbf{A} est séparément continu (par hypothèse), on déduit :

P 1. La fonction $\mathbf{f}(\lambda) \equiv (\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1}$ est entière.

Pour s'en convaincre, il suffit d'employer les identités :

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1} - (\mathbf{a} - \lambda_0 \mathbf{e})^{-1}}{\lambda - \lambda_0} &\equiv (\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1} (\mathbf{a} - \lambda_0 \mathbf{e})^{-1} \\ &\equiv (\mathbf{a} - \lambda_0 \mathbf{e})^{-2} - (\lambda - \lambda_0) (\mathbf{a} - \lambda_0 \mathbf{e})^{-2} (\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1}. \end{aligned}$$

De Q 3, en employant l'identité

$$(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1} = -\frac{\mathbf{e}}{\lambda} - \frac{\mathbf{a}}{\lambda^2} - \dots - \frac{\mathbf{a}^{k-1}}{\lambda^k} - \frac{1}{\lambda^{k+1}} \cdot \lambda (\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1},$$

on déduit :

Q' 3. Pour tout $k = 0, 1, \dots$, la fonction de

$$\lambda^{k+1} \left(\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e}} - \sum_i^k \frac{\mathbf{a}^{i-1}}{\lambda^i} \right)$$

est bornée sur tout demi-plan gauche :

En particulier on a, sur tout demi-plan gauche :

$$(6.1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda \mathbf{e}}{\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e}} = -1.$$

La fonction $\mathbf{f}(\lambda) \equiv (\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1}$ vérifie donc les conditions P 1, P' 2 (no. 2) : elle est l'indicatrice d'une application linéaire continue de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{A} . On démontre maintenant sans difficulté le

THÉOREME 2. *Il existe une correspondance biunivoque $\mathbf{a} \leftrightarrow F$ entre les éléments \mathbf{a} de \mathbf{A} vérifiant Q 1, Q 2, Q 3, et les homomorphismes continus de l'algèbre \mathfrak{A}_ω dans l'algèbre \mathbf{A} , tels que $F(\hat{1}) = \mathbf{e}$. Cette correspondance est définie par les formules réciproques*

$$\mathbf{a} = F(\hat{z}), \quad F(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} \frac{\varphi(\lambda) \mathbf{e}}{\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e}} d\lambda \quad (\varphi \in \mathfrak{A}_k, k=1, 2, \dots).$$

On pose alors

$$\varphi(\mathbf{a}) = F(\varphi).$$

REMARQUE I. Les propriétés Q 2 et Q 3 peuvent être remplacées par la seule propriété suivante, qui les implique :

Q' 2. *La fonction $(1 + |\lambda|)(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1}$ de λ est bornée sur tout demi-plan gauche.*

REMARQUE II. Si l'élément \mathbf{a} vérifie les conditions Q 1 et Q' 2, une condition nécessaire et suffisante pour que l'homomorphisme F déterminé par $\mathbf{a} = F(\hat{z})$ soit une application biunivoque de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{A} (donc un isomorphisme algébrique «dans»), est qu'il n'existe pas un nombre fini n de nombres complexes c_0, c_1, \dots, c_n tels que $\sum_0^n c_k \mathbf{a}^k = 0$. Alors l'algèbre des fonctions rationnelles de \mathbf{a} est isomorphe au corps des fonctions rationnelles de la variable z et l'algèbre des éléments $\varphi(\mathbf{a}) \in \mathbf{A}$, avec $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega$, est (algébriquement) isomorphe à \mathfrak{A}_ω .

REMARQUE III. Le seul fait que F respecte la multiplication n'entraîne pas que F fasse coïncider les éléments unité de \mathfrak{A}_ω et \mathbf{A} , mais seulement que F transforme l'unité de \mathfrak{A}_ω en un élément \mathbf{j} de \mathbf{A} idempotent, c'est à dire tel que $\mathbf{j}^2 = \mathbf{j}$. Cependant, cet idempotent joue le rôle d'unité dans l'image $\mathbf{A}^* \subset \mathbf{A}$ de \mathfrak{A}_ω par F (cf. [6], p. 64-67). On sait que tout idempotent différent de l'unité est un diviseur de zéro. Donc, si, en particulier, l'algèbre \mathbf{A} est un domaine d'intégrité, on peut supprimer la condition $F(\hat{1}) = \mathbf{e}$ dans l'énoncé du théorème 2.

7. Possibilités d'application du théorème 2. a) Le premier exemple d'application qui se présente, naturellement, est celui où $\mathbf{A} = \mathfrak{A}_\omega$. Dans ce cas les homomorphismes en question sont les isomorphismes donnés par des changements de variable $\varphi(z) \rightarrow \varphi[\theta(z)]$, où $\theta = F(\hat{z})$.

On peut prendre par exemple: $\theta(z) \equiv az + b$, avec a, b constants et $a \neq 0$.

Est-ce qu'il y a d'autres endomorphismes continus de l'algèbre \mathfrak{A}_ω ? Voilà une question à résoudre.

b) L'exemple d'application du th. 2 le plus important est celui où \mathbf{A} est l'algèbre de convolution \mathfrak{D}'_+ des distributions sur \mathbf{R} , de support limité à gauche, avec sa topologie naturelle (dans [7] nous désignons cette algèbre par \mathfrak{E}^+_π). L'homomorphisme continu de \mathfrak{A}_ω dans \mathfrak{D}'_+ , transformant la fonction 1 en δ (élément unité de \mathfrak{D}'_+ , pour la convolution) et la fonction z en δ' , est l'inverse \mathcal{L}^{-1} de la transformation de LAPLACE⁽¹⁾. L'image de \mathfrak{A}_ω par \mathcal{L}^{-1} est l'espace \mathfrak{F}_ω étudié dans [7].

c) On peut, plus généralement, considérer les homomorphismes de \mathfrak{A}_ω dans \mathfrak{D}'_+ qui transforment z en $a\delta' + b$, avec $a \neq 0$. *Est-ce qu'il y a d'autres homomorphismes de \mathfrak{A}_ω dans \mathfrak{D}'_+ ? Voilà une question posée par M. SCHWARTZ et qui se ramène à celle qui précède.*

d) L'algèbre topologique de convolution \mathfrak{D}'_+ est isomorphe à un sous-espace de l'espace $L(\mathfrak{D}'_+)$ des applications linéaires continues de \mathfrak{D}'_+ dans lui-même, muni de la topologie de la convergence bornée (l'élément δ' correspondant à l'opérateur de dérivation, D , dans cet isomorphisme). On pourrait essayer, par exemple, d'étendre le calcul symbolique aux opérateurs différentiels de 1.^{er} ordre à coefficients variables, c'est-à-dire aux opérateurs Θ de la forme

$$\Theta(T) \equiv \alpha D T + \beta, \quad \text{pour } T \in \mathfrak{D}'_+,$$

α et β étant des fonctions indéfiniment dérivables et α n'ayant pas de zéros.

e) Lorsqu'on cherche à baser sur \mathfrak{A}_ω un calcul symbolique pour les opérateurs différentiels linéaires du second ordre, on se heurte immédiatement à une impossibilité, même dans le cas simple de l'opérateur D^2 . Mais remarquons que le changement de variable $\varphi(z) \rightarrow \varphi(z^2)$, avec $\varphi \in \mathfrak{A}_\omega$, transforme l'algèbre topologique \mathfrak{A}_ω , en une autre algèbre topologique, dont il est facile d'explicitier la structure, et que nous désignerons par $\mathfrak{A}_\omega^{(2)}$. Alors on peut songer à établir un calcul des opérateurs différentiels du second ordre, modelé sur l'algèbre topologique $\mathfrak{A}_\omega^{(2)}$.

(1) Puisque l'algèbre de convolution \mathfrak{D}'_+ ne contient pas de diviseur de zéro, la condition $F(\hat{1}) = \delta$ est impliquée par le fait que F soit un homomorphisme.

8 Introduction de l'exponentielle symbolique. Soit \mathbf{A} une algèbre vérifiant les conditions indiquées au n.º 6 et soit \mathbf{a} un élément de \mathbf{A} possédant les propriétés Q 1 et Q 2. Il est alors facile de résoudre l'équation différentielle

$$(8.1) \quad \mathbf{v}'(t) = -\mathbf{a} \mathbf{v}(t), \quad \text{pour } t \geq 0,$$

avec la condition initiale $\mathbf{v}(0) = \mathbf{e}$, $\mathbf{v}(t)$ étant une fonction inconnue de la variable réelle t , à valeurs dans \mathbf{A} . En effet, il est aisé de voir que l'équation analogue pour \mathfrak{A}_ω :

$$(8.2) \quad \mathbf{u}(t) = -\hat{z} \mathbf{u}(t) \quad (t \geq 0),$$

avec la condition initiale correspondante, admet la solution unique:

$$\mathbf{u}'(t) = e^{-t\hat{z}}$$

(par rapport à la topologie de \mathfrak{A}_ω).

Or il est évident que l'homomorphisme opérationnel $\varphi \rightarrow \varphi(\mathbf{a})$ de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{A} transforme la solution $e^{-t\hat{z}}$ de (8.2) en une solution de (8.1) qui vérifie la condition initiale $\mathbf{v}(0) = \mathbf{e}$. D'après le calcul opérationnel modelé sur \mathfrak{A}_ω , cette solution de (8.1), qui sera désignée par $e^{-t\mathbf{a}}$ ou par $\exp(-t\mathbf{a})$, est définie par la formule:

$$\exp(-t\mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{\exp(-t\lambda) \mathbf{e}}{\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e}} d\lambda, \quad t \geq 0,$$

et possède les propriétés suivantes (pour $t \geq 0$):

- I) $\mathbf{v}(t_1 + t_2) = \mathbf{v}(t_1) \mathbf{v}(t_2)$
- II) $\frac{d^n}{dt^n} \mathbf{v}(t) = (-\mathbf{a})^n \mathbf{v}(t)$
- III) $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{kt} \mathbf{v}(t) = 0$, pour tout k positif.

Cela peut s'exprimer encore, en disant que: I) les valeurs de $\exp(-t\mathbf{a})$, pour $t \geq 0$, forment dans \mathbf{A} un semi-groupe à un paramètre t ; II) cette fonction de t est indéfiniment dérivable; III) elle est à décroissance rapide, pour $t \rightarrow +\infty$, par rapport aux exponentielles réelles (ainsi que chacune de ses dérivées).

Mais il reste encore le «problème de l'unicité»:

La fonction $\exp(-t\mathbf{a})$ de t est-elle l'unique solution de (8.2) prenant la valeur 1 pour $t = 0$?

Nous ne savons pas si la réponse est affirmative dans le cas général; mais elle l'est, sûrement, dans les cas suivants (dont le premier est contenu dans le deuxième):

1) *La topologie de \mathbf{A} est l'image de la topologie de \mathfrak{A}_ω par l'application opérationnelle $\varphi \rightarrow \varphi(\mathbf{a})$. C'est ce qui arrive, par exemple, dans le cas où \mathbf{A} est l'espace \mathfrak{F}_ω , dont \mathfrak{A}_ω est l'image de LAPLACE.*

2) *L'algèbre \mathbf{A} est commutative, sans diviseurs de zéro, et un peu plus que séparément continue, par exemple, hypocontinue par rapport aux parties compactes⁽¹⁾.*

On dit que \mathbf{A} est hypocontinue par rapport aux parties compactes, si, pour toute partie compacte \mathbf{K} de \mathbf{A} , l'ensemble des applications $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}\mathbf{x}$ [resp. $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}\mathbf{a}$] de \mathbf{A} dans \mathbf{A} , lorsque \mathbf{a} parcourt \mathbf{K} , est équicontinu (cf. [1], chap. III). Dans ce cas, la règle usuelle de dérivation du produit est valable. Soit alors $\mathbf{z}(t)$ une solution de l'équation $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}\mathbf{v}(t)$, pour $t \geq 0$, nulle pour $t = 0$; dans ces conditions, la fonction $\mathbf{z}(t)\mathbf{z}(h-t)$ de t , avec h arbitraire et $0 \leq t \leq h$, a une dérivée nulle, donc est constante, et, comme $\mathbf{z}(0) = 0$, elle est nulle dans $[0, h]$. En particulier, pour $h = 2t$ (h et t étant arbitraires), on trouve $(\mathbf{z}(t))^2 = 0$, d'où $\mathbf{z}(t) = 0$, pour $t \geq 0$, si $\mathbf{z}(t)$ n'est pas diviseur de zéro. Cela démontre, évidemment, l'unicité en question.

Il est encore évident que, pour assurer l'unicité de la solution de $\mathbf{v}'(t) = -\mathbf{a}\mathbf{v}(t)$ vérifiant $\mathbf{v}(0) = \mathbf{e}$, il suffit d'imposer aux $\mathbf{v}(t)$ de commuter avec \mathbf{a} et de ne pas être diviseur de zéro (l'algèbre \mathbf{A} étant hypocontinue par rapport aux parties compactes).

En particulier, si toutes les valeurs de $\exp(-t\mathbf{a})$ sont des éléments réguliers de \mathbf{A} , on pose, par définition :

$$\exp(t\mathbf{a}) = [\exp(-t\mathbf{a})]^{-1}, \quad \text{pour } t \geq 0$$

Alors la fonction $\mathbf{v}(t) = \exp(-t\mathbf{a})$, définie pour t réel quelconque, possède la propriété plus forte :

$$\text{I')} \quad \mathbf{v}(t_1 - t_2) = \mathbf{v}(t_1)/\mathbf{v}(t_2),$$

ce qui veut dire que les valeurs de cette fonction forment maintenant un groupe à un paramètre. Mais nous ne savons pas si la restriction de $\mathbf{v}(t)$ à $] -\infty, 0]$ est dérivable, à moins que l'on n'admette l'hypothèse supplémentaire suivante :

(1) C'est là un résultat de MIKUSINSKI dans [3], que M. SCHWARTZ a bien voulu me signaler.

2') La fonction $\mathbf{v}(t) = \exp(-\mathbf{a}t)$ est localement bornée au point $t = 0$.

On peut alors écrire :

$$\text{II')} \quad \frac{d}{dt^n} \mathbf{v}(t) = (-\mathbf{a})^n \mathbf{v}(t), \quad \text{pour } t \text{ réel quelconque.}$$

9. Les espaces $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ et $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$; nouvelle forme de calcul opérationnel. Dans [7] j'ai défini $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ comme l'espace des fonctions de la forme $\varphi = e^{kt}\psi$, avec $\psi \in \mathfrak{A}_k$, $k = 0, 1, \dots$, muni de la topologie la plus fine qui rende continues les applications $\psi \rightarrow e^{kt}\psi$ de \mathfrak{A}_ω dans $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$. On démontre que $\tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ est l'image de LAPLACE de l'espace $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$ des distributions laplacisables, de support limité à gauche. Par conséquent, toute fonction $\varphi \in \tilde{\mathfrak{A}}_\omega$ admet la « formule de représentation réelle » :

$$(9.1) \quad \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tilde{z}} \Phi_t dt,$$

où Φ est la distribution donnée par

$$(9.2) \quad \Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-\infty i}^{k+\infty i} e^{\lambda t} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

Soit maintenant \mathbf{A} une algèbre vérifiant les conditions indiquées au n.º 6 et supposons en outre que \mathbf{A} est hypocontinue par rapport aux parties compactes de \mathbf{A} . Il est alors facile d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 3. Il existe une correspondance biunivoque $F \leftrightarrow \mathbf{a}$ entre les homomorphismes continus F de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{A} , tels que $F(\hat{1}) = \mathbf{e}$, et les éléments \mathbf{a} de \mathbf{A} possédant les trois propriétés suivantes :

E 1. L'équation $\mathbf{v}'(t) = -\mathbf{a}\mathbf{v}(t)$ admet, pour t réel quelconque, une solution $\mathbf{v}(t)$ [que l'on désigne par $e^{-t\mathbf{a}}$ ou par $\exp(-t\mathbf{a})$] telle que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{e}$ et que ;

E 2. Les valeurs de $\mathbf{v}(t)$ sont des éléments réguliers de \mathbf{A} , commutant avec \mathbf{a} .

E 3. $\mathbf{v}(t)$ est à décroissance rapide, pour $t \rightarrow +\infty$, par rapport aux exponentielles réelles.

Cette correspondance $F \leftrightarrow \mathbf{a}$ est définie par les formules :

$$\mathbf{a} = F(z), \quad F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t\mathbf{a}) \Phi_t dt,$$

où l'intégrale est prise au sens de la théorie des distributions, et où Φ est donnée par (9. 2). On aura en outre :

$$(9. 3) \quad \exp(-t \mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{\exp(-t\lambda)}{\mathbf{a} - \lambda} d\lambda$$

[On pose alors : $F(\varphi) = \varphi(\mathbf{a})$].

Nous donnerons ici seulement une idée de la démonstration. Il suffit de montrer que, si l'élément \mathbf{a} vérifie les conditions E 1, E 2, E 3, il détermine un homomorphisme continu F (unique) de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{A} tel que $F(\hat{1}) = \mathbf{e}$, $F(\hat{z}) = \mathbf{a}$, au moyen de la formule

$$(9. 4) \quad F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t \mathbf{a}) \Phi_t dt$$

et, que l'on a encore (9. 3); l'unicité de cet homomorphisme résultera de ce que l'on a dit au n.º 8 (l'autre partie de la démonstration est immédiate). Soit donc \mathbf{a} un élément de \mathbf{A} vérifiant E 1, E 2, E 3. L'existence de l'intégrale du second membre de (9. 4) et la continuité (ainsi que la linéarité) de l'application F sont assurées par les conditions E 1 et E 3, qui permettent de voir également que $F(\hat{1}) = \mathbf{e}$, $F(\hat{z}) = \mathbf{a}$. [Rappelons que, dans (9. 4), l'intégrale est définie par continuité et que toute distribution laplacisable Φ est la limite, au sens de la topologie de $\tilde{\mathfrak{F}}_\omega$, d'une suite de fonctions α_n du type $\alpha_n(t) = D^k e^{kt} \beta_n(t)$, où k est un nombre naturel dépendant de Φ et les β_n sont des fonctions indéfiniment dérivables, de support compact convergeant uniformément vers une fonction continue bornée de support limité à gauche].

Cela posé, on établit (9. 3), en observant que la restriction de F à \mathfrak{A}_ω est encore un homomorphisme continu de \mathfrak{A}_ω dans \mathbf{A} , et en appliquant le théorème 2. On en déduit (cf. n.º 8) :

$$\mathbf{v}(t_1 + t_2) = \mathbf{v}(t_1) \mathbf{v}(t_2),$$

ce qui permet d'établir directement que $F(\varphi\psi) = F(\varphi)F(\psi)$, compte tenu du fait que $\mathfrak{L}^{-1}(\varphi\psi) = \mathfrak{L}^{-1}(\varphi) * \mathfrak{L}^{-1}(\psi)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres III, IV et V. Actual. Scient. Ind., 1229, Hermann Paris (1955).
- [2] E. HILLE, *Functional analysis and semi-groups*. Amer. Math. Soc. Coll Publ., New York (1948).

- [3] MIKUSINSKI, *Sur l'unicité des solutions de quelques équations différentielles dans les espaces abstraits*. Annales de la Soc. Polonaise de Math., **22** (1949), p. 257-160.
- [4] L. SCHWARTZ, *Transformation de Laplace des distributions*. Communication du Séminaire Math. de Lund, tome supplémentaire (1952), p. 196-206.
- [5] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque*. Comm. Pontifica Academia Scientiarum, **9** (1945) p. 327-357.
- [6] ———, *As funções analíticas e a análise funcional*. Thèse, 1948 (Portugaliae Math., **9**, 1950).
- [7] ———, *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*. Portugaliae Math., **14** (1955), p. 105-132.
- [8] ———, *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*. À paraître.
- [9] M. DA SILVEIRA, *General operational calculus in n variables*, I. Portugaliae Math., **15** (1957).
- [10] ———, *General operational calculus*, II (À paraître).

PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 18

1 9 5 9

Publicação subsidiada por

Publication subventionnée par

Publication sponsored by

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA, SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
e FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Edição de

«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua Nova da Trindade, 1, 5.º-S
LISBOA-2 (PORTUGAL)

HERMANN & C.^{te}, Editeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5^{eme})

CORRECTIONS ET COMPLÉMENTS DE L'ARTICLE «SUR L'ESPACE DES FONCTIONS HOLOMORPHES A CROISSANCE LENTE A DROITE»

PAR J. SEBASTIÃO F. SILVA
Lisbonne

À cause d'une revision hâtive, quelques erreurs typographiques se sont introduites dans notre article «Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite» Port. Math., 17 (1958), p. 1-17, où nous exposons surtout des résultats (inédits) dûs à M. L. SCHWARTZ. Nous indiquerons seulement les corrections qu'il vaille la peine de signaler ici :

| Page | Ligne | Au lieu de | On doit écrire |
|------|----------|--|--|
| 1 | 17 | $\varphi(z)$ | $\varphi(z); z^k$ |
| 9 | — 6 | $(\hat{z} - \lambda \cdot \hat{1})^{-1}$ | $\lambda (\hat{z} - \lambda \cdot \hat{1})^{-1}$ |
| 10 | 7 | $(a - \lambda e)^{-1}$ | $\lambda (a - \lambda e)^{-1}$ |
| 12 | 24 | $\alpha D T + \beta$ | $\alpha D T + \beta T$ |
| 13 | dernière | 1 | e |
| 15 | 24 | $v(0) = e$ | $v(0) = \mathbf{e}$ |

Page 4, lignes 6, 8 et 21: adjoindre la condition $\lambda \neq 0$

Mais il est curieux d'observer que les fautes des pages 9 et 10 ont dirigé notre attention vers un fait trivial qui nous avait échappé complètement auparavant :

Les conditions Q 1 et Q 3 (sans aucune correction) sont suffisantes pour qu'il existe l'homomorphisme dont il est question dans le théorème 2, la condition Q 2 (impliquée par Q 3) pouvant être supprimée.

En effet on a, pour tout λ :

$$\lambda (a - \lambda e)^{-1} = a (a - \lambda e)^{-1} - e$$

Alors, si la condition Q 3 est vérifiée, c'est-à-dire si la fonction $(a - \lambda e)^{-1}$ de λ est bornée sur tout demi-plan gauche, cette identité montre qu'il en sera de même de la fonction $\lambda (a - \lambda e)^{-1}$ de λ .

Cette observation simplifie, d'une façon appréciable, non seulement les bases du calcul opérationnel considéré, mais aussi les démonstrations qu'elles exigent. En effet, il n'est plus nécessaire de démontrer directement que *la fonction $\lambda(\hat{z} - \lambda)^{-1}$ de λ à valeurs dans \mathfrak{A}_0 est bornée sur tout demi-plan gauche*, ce que nous avons fait, d'une façon pas trop simple, dans notre article précédent «*Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*» Port. Math. **14** (1955) p. 105-132 ; il suffit maintenant d'établir cette propriété pour la fonction $(z - \lambda)^{-1}$ de λ , ce qui est presque immédiat.

Ainsi une faute de revision nous a conduit à une heureuse simplification de nos résultats.