

ATTI DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLXXI - 1974

MEMORIE

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

SERIE VIII - VOLUME XII

SEZIONE I^a (Matematica, meccanica, astronomia, geodesia e geofisica)

FASCICOLO 5

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

Sur l'intervention du calcul symbolique
et des distributions dans l'étude
de l'équation de Boltzmann



ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1974

PRESENTAZIONE

Con profonda mestizia ho l'onore di presentare all'Accademia un lavoro postumo del compianto Collega ed Amico José Sebastião e Silva, già professore di matematica nell'Università di Lisbona, recante il titolo Sur l'intervention du calcul symbolique et des distributions dans l'étude de l'équation de Boltzmann: un lavoro che, oltre a comprovare le doti scientifiche eminenti dell'A., viene a porgere una commovente testimonianza dell'ammirevole forza d'animo da lui manifestata negli ultimi mesi di vita.

Sebastião e Silva era particolarmente noto ed apprezzato in Italia, dove aveva vissuto per parecchi anni. L'ultimo suo soggiorno nel nostro Paese avvenne a Roma nel 1971-72, essendo egli allora stato invitato con un assegno di ricerca dall'Accademia dei Lincei allo scopo di redigere un trattato sulla teoria delle distribuzioni, ispirato a vedute originali collegate col calcolo simbolico. Ma qui ebbero a manifestarsi i primi sintomi allarmanti del male incurabile che l'avrebbe portato prematuramente alla tomba. Incurante di ciò, egli si dedicò con fervore al compito suddetto, incominciando da uno studio approfondito dell'equazione di Boltzmann relativa al trasporto dei neutroni; studio che ebbe poi ad assorbirlo e distrarlo fino al giorno della morte, avvenuta a Lisbona il 25 maggio 1972 presso l'Istituto Portoghese di Oncologia.

Il presente lavoro, pur essendo soltanto un frammento di quello ch'egli avrebbe desiderato di compiere, mostra già la grandiosità delle concezioni cui l'A. si sarebbe in questo attenuto. La redazione è stata amorevolmente messa a punto da alcuni suoi discepoli, fra cui il dott. Silva Oliveira, e dal suo amico prof. G. Köthe, ed è preceduta da un'Avvertenza toccante del prof. Jaime Campos Ferreira. Nonostante l'incompletezza del lavoro, esso presenta un notevole interesse in quanto viene a completare in modo essenziale precedenti sviluppi di Lafore e Millot sull'analisi spettrale dell'operatore di Boltzmann e sul modo di ottenere un integrale di tale operatore a partire dai relativi autovalori; lo ritengo quindi altamente degno di venire pubblicato, e ne propongo l'inserzione nelle Memorie della nostra Accademia.

BENIAMINO SEGRE

RELAZIONE

letta e approvata nella seduta del 12 gennaio 1974, sulla Memoria di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, presentata nella seduta del 15 dicembre 1973 dal Socio B. SEGRE, intitolata: *Sur l'intervention du calcul symbolique et des distributions dans l'étude de l'équation de Boltzmann*.

La Memoria si compone di due parti di lunghezza press'a poco uguale. La prima è dedicata a una esposizione di carattere generale intorno a quelle funzioni generalizzate sull'asse reale, a valori in uno spazio di Banach, che dall'A. sono dette « distribuzioni temperate », e intorno a tutto un ampio complesso di nozioni, che ad esse si connettono: trasformazione bilatera di Laplace, convoluzione, calcolo simbolico sull'operatore di derivazione. Lo scopo di questa prima parte della Memoria è quello di arrivare per via simbolica alla risoluzione di equazioni operazionali lineari, con un dettagliato studio della teoria spettrale relativa, in condizioni di notevole generalità, attraverso un « metodo euristico » per la determinazione di un sistema ortogonale di autovettori, in cui « si adotta il punto di vista ingenuo dei fisici e degli ingegneri in questo genere di questioni ».

Nella seconda parte della Memoria viene applicato il metodo esposto nella prima parte al caso delle equazioni di Boltzmann unidimensionale relativa al trasporto dei neutroni: si tratta di una equazione integrodifferenziale lineare, nella quale la funzione incognita può essere interpretata come una distribuzione temperata a valori nello spazio hilbertiano delle funzioni complesse di quadrato sommabile su un intervallo illimitato dell'asse reale.

La Memoria, pur essendo soltanto un frammento del lavoro che l'A. si proponeva di condurre a termine, dà già una idea della ampiezza della sua concezione. La redazione è stata amorevolmente riveduta e migliorata da alcuni suoi discepoli, fra cui il Dott. Silva Oliveira, e del suo amico Prof. G. Köthe, ed è preceduta da una *Avvertenza* toccante del Prof. Jaime Campos Ferreira.

Nonostante l'incompletezza del lavoro, esso presenta un notevole interesse, sia perché rispecchia vedute originali dell'A. sulla teoria delle distribuzioni in collegamento col calcolo simbolico, sia perché viene a completare precedenti sviluppi di Lafore e Millot sull'analisi spettrale dell'operatore di Boltzmann e sul modo di ottenere le soluzioni dei relativi problemi di frontiera a partire del sistema degli autovettori.

Lo riteniamo quindi altamente degno di essere pubblicato, e ne proponiamo l'inserzione nelle Memorie della nostra Accademia.

BENIAMINO SEGRE
MAURO PICONE
GIANFRANCO CIMMINO

Sur l'intervention du calcul symbolique et des distributions dans l'étude de l'équation de Boltzmann

Memoria di J. SEBASTIÃO E SILVA

RIASSUNTO. — Lo studio dell'equazione di Boltzmann in fisica nucleare ha dato origine a delle difficoltà piuttosto serie, anche in casi semplici, quando si cerchi di applicarvi il metodo dei vettori propri, essendo allora questi vettori delle distribuzioni e non delle funzioni. L'oggetto di questa memoria è di chiarire il problema in un caso particolare tipico, impiegando, a questo scopo, il calcolo simbolico dell'operatore D applicato a delle distribuzioni temperate a valori in uno spazio di Hilbert.

AVERTISSEMENT

Cet ouvrage est le dernier travail de José Sebastião e Silva, decédé le 25 Mai 1972. Il a été rédigé à l'Institut Portugais d'Oncologie, où son Auteur, malgré les souffrances morales et physiques qui l'accablaient alors, se consacra avec enthousiasme jusqu'au dernier moment de sa vie, à son élaboration.

Sebastião e Silva n'a pas eu le temps de terminer son ouvrage: l'introduction est incomplète et il ne nous reste à peine que le titre du dernier paragraphe de l'Appendice, « Sur la notion de valeur principale d'une fonction » (omis dans cette publication). Il ne l'a même pas été possible de revoir le manuscrit auquel, bien que rédigé de façon pratiquement définitive, manquaient certaines adaptations et précisions importantes.

Des disciples de Sebastião e Silva se chargèrent de cette revision; parmi ces derniers il convient de citer M. Silva Oliveira, qui contribua d'une façon décisive à ce travail. Après cette première revision l'ouvrage a été envoyé au Prof. G. Köthe, grand ami de Sebastião e Silva, qui en fit une minutieuse analyse et suggéra plusieurs améliorations.

Sebastião e Silva a toujours ressenti une vive admiration pour l'Italie, pays où il vécut plusieurs années et où il cria de profondes amitiés. C'est pour répondre à son désir tout exprès formulé que ce travail est offert à l'Accademia Nazionale dei Lincei.

Lisboa, Novembre 1973

J. CAMPOS FERREIRA

1. Introduction.

J'ai pris connaissance de ce problème pour la première fois en 1963, à travers un article de P. LAFORE et J. P. MILLOT [1], en dirigeant des travaux de recherches dans le « Laboratório de Física e Engenharia Nucleares » de Sacavém (Lisbonne). Il existe à présent une vaste bibliographie sur l'équation de Boltzmann, dont se sont occupés, non seulement des physiciens et des ingénieurs, d'une façon plus ou moins empirique, mais aussi des mathématiciens. Le travail le plus récent que je connais sur ce sujet est la Thèse de BARDOS [2], où cette équation figure à titre d'application de résultats très généraux et assez précis sur un type d'équations intégral-différentielles. Mais, bien que le susdit travail de LAFORE et MILLOT ait été publié en 1958, je n'ai encore nulle part trouvé une réponse satisfaisante aux difficultés d'ordre mathématique suscitées par ce travail. C'est pourquoi j'ai repris ce thème, incité à plusieurs reprises à m'en occuper par F. DI PASQUANTONIO, qui s'était déjà adressé à d'autres mathématiciens pour la même raison et à qui je suis vivement reconnaissant pour ses renseignements précieux et ses remarques d'une touchante amitié.

Il s'agit de l'équation de Boltzmann unidimensionnelle, relative au transport de neutrons,

$$(1.1) \quad \mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Sigma_T \Phi(x, \mu) - \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^1 p(\mu, \mu') \Phi(x, \mu') d\mu' = S(x, \mu),$$

où l'inconnue, $\Phi(x, \mu)$, est le flux de neutrons par élément d'angle solide dans le cas où celui-ci ne dépend que de la variable spatiale x et du cosinus μ de l'angle avec l'axe Ox , $S(x, \mu)$ étant la source, Σ_T la section efficace totale, Σ_s la section efficace de « scattering » et $p(\mu, \mu')$ la densité de probabilité qu'un neutron, dans un heurt suivant la direction μ , prenne ensuite la direction μ' . On se borne d'abord au cas où $p(\mu, \mu') \equiv 1$.

À propos de ces restrictions, les physiciens CASE et ZWEIFEL, qui considèrent le même cas dans le chapitre 4 de leur livre « Linear Transport Theory », écrivent:

« These many restrictions seem rather severe, and indeed they are. However there are good reasons for so narrowing the scope of our study. In the first place this is the simplest nontrivial problem in neutron transport; exact solutions can be found [...]. Furthermore, the exact solutions thus obtained can serve as the basis testing various approximation schemes which may then be applied to more physically meaningful cases.

There are also mathematical reasons for studying such a simplified problem ».

On verra par la suite quelles sont ces raisons. Dans mon premier travail sur ce sujet [3], j'ai commencé par donner à l'équation (1.1) une forme

plus commode pour les calculs. En posant $\Sigma_s = a$ et $\Sigma_T = b$, le changement de variable

$$\mu = \frac{b}{y}$$

permet de donner à (1.1) la forme

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) + y \varphi(x, y) - \frac{ay}{2} \int_I \frac{\varphi(x, \eta)}{\eta^2} d\eta = f(x, y),$$

où I est la réunion des intervalles $] -\infty, -b]$ et $[b, +\infty[$ et

$$\varphi(x, y) = \Phi\left(x, \frac{b}{y}\right), \quad f(x, y) = \frac{y}{b} S\left(x, \frac{b}{y}\right).$$

À son tour, l'équation (1.2) peut s'écrire sous la forme

$$(1.3) \quad (D + A) \varphi = f,$$

où D est l'opérateur de dérivation par rapport à x et A l'opérateur défini par la formule

$$(1.4) \quad A_y \varphi(x, y) = y \varphi(x, y) - \frac{ay}{2} \int_I \frac{\varphi(x, \eta)}{\eta^2} d\eta.$$

En employant un calcul symbolique général dont je me suis occupé [4], j'ai pu démontrer un théorème d'existence et d'unicité de la solution de (1.3) dans des conditions assez générales. La formule résolvante est alors

$$\varphi(x, y) = L_{x|\lambda}^{-1} [(\lambda - A_y)^{-1}] *_x f(x, y),$$

où L est la transformation bilatérale de Laplace appliquée à des distributions vectorielles tempérées sur \mathbb{R} . Ensuite, l'intégration sur l'axe imaginaire qui donne, d'après la formule usuelle, l'image inverse de Laplace de $(\lambda - A)^{-1}$, est remplacée par l'intégration sur \mathbb{R} d'une distribution dont $(\lambda - A)^{-1}$, fonction homomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, est l'image de Stieltjes, et qu'il est naturel de représenter par $\delta(s - A)$, s appartenant au spectre de A . J'ai vu là une possibilité d'exprimer la solution de l'équation de Boltzmann au moyen du système de vecteurs propres trouvé par LAFORE et MILLOT. Trois chercheurs du «Laboratório de Física e Engenharia Nucleares», J. SILVA OLIVEIRA, F. SEQUEIRA e A. VAZ FERREIRA, se sont attelés à cette tâche, mais leurs résultats [5] ne coïncident pas, d'une façon visible, avec ceux obtenus par LAFORE et MILLOT.

Je n'ai pas pu reprendre ce thème pendant une longue période, surtout pour des raisons de santé. L'an dernier j'ai fait un séjour de quelques mois à Rome, en bénéficiant d'une généreuse subvention de l'Accademia Nazionale dei Lincei, dans le but de poursuivre des recherches liées à la rédaction finale d'un livre que je projette de publier sur la théorie des distributions d'après mon point de vue. C'est alors que j'ai fait la connaissance de F. Di Pasquan-

tonio, qui m'a convaincu de donner la priorité, dans mes recherches, à l'étude de l'équation de Boltzmann. En peu de temps j'ai pu vérifier, par des calculs non triviaux, mais pas tellement difficiles, que la solution de l'équation obtenue dans mon premier travail [3] confirme les résultats de LAFORE et MILLOT en ce qui concerne l'analyse spectrale de l'opérateur de Boltzmann, mais pas en ce qui regarde la façon de construire la solution à partir du système de vecteurs propres utilisé. Pour expliquer ce que je viens de dire, il est commode de considérer l'équation de Boltzmann dans la forme (1.2). D'après la méthode de LAFORE et MILLOT, on considère d'abord le cas où $f(x, y) = 0$ pour $x \geq 0$ et on cherche toutes les solutions de la forme $e^{-sx} w(s, y)$, ce qui, par substitution dans (1.2), conduit à l'équation

$$(1.5) \quad (y - s) w(s, y) = \frac{ay}{2} \int_I \frac{w(s, \eta)}{\eta^2} d\eta$$

ce qui, d'après (1.4), équivaut à

$$A_y w(s, y) = s w(s, y).$$

Il s'agit donc de déterminer les valeurs propres s et les vecteurs propres correspondants $w(s, y)$ de l'opérateur A . Désignons par $c(s)$ la valeur de $a/2 \cdot \int_I \frac{w(s, \eta)}{\eta^2} d\eta$. Si $s \in I$, c'est-à-dire si $-b < s < b$, une solution possible sera

$$w(s, y) = c(s) \frac{y}{y-s}.$$

Puisqu'il s'agit d'un vecteur propre, la constante $c(s)$ peut être remplacée par 1. Alors, par substitution dans (1.5), on obtient

$$(1.6) \quad 1 = \frac{a}{2s} \log \frac{b+s}{b-s}.$$

Donc, s sera une valeur propre de A , comprise entre $-b$ et b , si et seulement si s vérifie cette équation. Or on démontre (cf. n° 9, b) que (1.6) admet deux et seulement deux solutions réelles, s_0 et $-s_0$, entre $-b$ et b , et aucune racine complexe. On trouve ainsi deux valeurs propres entre $-b$ et b , et les correspondants vecteurs propres

$$w(s_0, y) = \frac{y}{y-s_0}, \quad w(-s_0, y) = \frac{y}{y+s_0}.$$

Si $s \in I$, on aura $(y-s)^{-1} = \infty$ pour $y = s$ et, si s est une valeur propre, le vecteur propre devra être de la forme suivante, d'après la théorie des distributions,

$$(1.7) \quad w(s, y) = y \cdot \nu p \frac{1}{y-s} + C(s) y \delta(y-s), \quad (y \in I),$$

où $C(s)$ est une constante dépendante de s [on a remplacé par 1 la constante

$c(s)$]. Par substitution dans (1.5), on obtient

$$1 = \frac{2s}{a} \log \left| \frac{b+s}{b-s} \right| + \frac{a}{2s} C(s),$$

ce qui permet de déterminer $C(s)$:

$$(1.8) \quad C(s) = \frac{2s}{a} - \log \left| \frac{b+s}{b-s} \right|.$$

Donc, tout point s de I est une valeur propre de A , dont le vecteur propre correspondant, à moins d'une constante multiplicative, est donné par (1.7), où $C(s)$ est défini par (1.8). Observons encore que, pour $s = s_0$, on a $v p(y-s)^{-1} = (y-s)^{-1}$ et $\delta(y-s) = 0$, puisque $y \in I$; et de même pour $s = -s_0$. Par conséquent, (1.7) avec (1.8) donne l'expression générale des vecteurs propres de A , soit pour le spectre continu I , soit pour le spectre discret $\{s_0, -s_0\}$. On a ainsi l'impression que le système $w(s, y)$ de vecteurs propres de A obtenu est *complet* (il faut toutefois préciser l'espace ou les espaces par rapport auxquels il est complet).

LAFORE et MILLOT admettent que le système est complet, démontrent qu'il est orthogonal et calculent les constantes de normalisation. Mais ici ces calculs laissent lieu à des doutes.

Dans leur livre déjà cité [6], CASE et ZWEIFEL trouvent des constantes de normalisation apparemment différentes, mais DI PASQUANTONIO et LAVOINE [7] ont vérifié que ces résultats coïncident avec ceux de LAFORE et MILLOT. En outre, CASE et ZWEIFEL présentent une démonstration de la complétude du système $w(s, y)$ par rapport à un certain espace G de fonctions (pp. 71-74 et Appendice G); mais je dois avouer que cette démonstration est compliquée et peu claire pour moi. D'ailleurs, l'orthogonalité et la complétude du système ne suffisent pas pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation de Boltzmann, construite à partir de ce système. *Il s'agit là seulement d'une méthode heuristique* (cf. ici n° 8).

D'autre part, LAFORE et MILLOT admettent que toute solution de l'équation de Boltzmann homogène, est de la forme

$$\varphi(x, y) = \int_I e^{-sx} c(s) w(s, y) ds + e^{-s_0 x} c^+ w(s_0, y) + e^{s_0 x} c^- w(-s_0, y)$$

[en nous rapportant toujours à la forme (1.2) de l'équation]. CASE et ZWEIFEL admettent une hypothèse équivalente. Mais c'est là aussi un point délicat. S'il s'agit de résoudre un problème de frontière dans l'intervalle $[0, +\infty[$, en se donnant la valeur $v_0(y)$ de $\varphi(x, y)$ pour $x = 0$, la fonction v_0 ne peut pas être choisie arbitrairement: en particulier la partie de la représentation spectrale de $v_0(y)$ correspondante aux valeurs propres négatives de A doit être nulle; cela rend, au moins superflue, une partie de la formule résolvante donnée dans ce cas par LAFORE et MILLOT. Ce point sera éclairci au n° 11,

théorème I, remarque II. Dans la résolution des problèmes de frontière considérés dans ce n° II, interviennent des semigroupes continus (et même analytiques) d'opérateurs.

2. Transformation bilatérale de Laplace pour des distributions tempérées à valeurs dans un espace de Banach.

Soit U un espace de Banach complexe. Une distribution f sur \mathbb{R} à valeurs dans U est dite tempérée s'il existe deux nombres naturels n, p , une fonction F continue sur \mathbb{R} à valeurs dans U et une constante positive M tels que $f = D^n F$ et

$$\|F(x)\| < M(1 + |x|)^p \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Désignons par $\check{D}(\mathbb{R}, U)$ l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R} à valeurs dans U . On définit d'une façon analogue l'espace des distributions tempérées sur l'axe imaginaire $i\mathbb{R}$, à valeurs dans U , que nous désignerons par $\check{D}(i\mathbb{R}, U)$.

Soit f un élément de $\check{D}(\mathbb{R}, U)$. L'intégrale paramétrique

$$(2.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x) dx$$

est une extension immédiate de l'intégrale de Fourier dans le cas scalaire, possédant les mêmes propriétés élémentaires (cf. [8]). Elle définit donc une distribution $\hat{f} \in \check{D}(\mathbb{R}, U)$, que l'on appelle la transformée de Fourier de f . Nous désignerons encore par \mathcal{F} l'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ de $\check{D}(\mathbb{R}, U)$ dans $\check{D}(\mathbb{R}, U)$ (transformation de Fourier). On écrira donc $\hat{f} = \mathcal{F}f$ où, plus précisément

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}_{\xi|x} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x) dx.$$

Cette transformation est une application biunivoque de $\check{D}(\mathbb{R}, U)$ dans $\check{D}(\mathbb{R}, U)$, dont l'inverse est donnée par la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi.$$

En particulier, si \hat{f} est une *fonction indéfiniment différentiable à croissance lente* [c'est-à-dire, telle que, pour tout nombre naturel n il existe M et p positifs tels que, $\|\hat{f}^{(n)}(\xi)\| < M(1 + |\xi|)^p$ sur \mathbb{R}], alors f est une distribution à *décroissance rapide*, c'est-à-dire, pour tout nombre naturel p , il existe un

entier n et une fonction F continue sur \mathbb{R} à valeurs dans U tels que $f = (I + D)^n F$ et

$$x^p F(x) \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow \infty.$$

Posons $\xi = i\lambda$ dans (2.1). Alors cette intégrale définit une distribution $\varphi \in \tilde{D}(i\mathbb{R}, U)$

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx.$$

L'application biunivoque $f \mapsto \varphi$ de $\tilde{D}(\mathbb{R}, U)$ dans $\tilde{D}(i\mathbb{R}, U)$ s'appelle transformation (bilatérale) de Laplace (pour des distributions tempérées sur \mathbb{R} à valeurs dans U). Nous la désignerons par \mathcal{L} . Donc on peut écrire $\varphi = \mathcal{L}f$ ou, plus précisément,

$$\varphi(\lambda) = \mathcal{L}_{\lambda|x} f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx.$$

L'inverse, \mathcal{L}^{-1} , de \mathcal{L} est donnée par la formule

$$f(x) = \mathcal{L}_{x|\lambda}^{-1} \varphi(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda.$$

3. Transformation de Laplace et convolution.

Soient U et V deux espaces de Banach. Considérons l'espace $L(U, V)$ des applications linéaires continues (ou bornées) de U dans V muni de la norme usuelle:

$$(3.1) \quad \|\Theta\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|\Theta(u)\| \quad \Theta \in L(U, V), u \in U.$$

Si f est une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans U et $\Theta \in L(U, V)$ on définit Θf par la formule

$$(\Theta f)(x) = \Theta(f(x)), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Si en outre f est continûment dérivable, on aura évidemment $D(\Theta f) = \Theta(Df)$. Alors, si f est une distribution sur \mathbb{R} à valeurs dans U , $f = D^n F$, où n est un entier et F une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans U , on définit Θf (distribution sur \mathbb{R} à valeurs dans V), en posant

$$(3.2) \quad \Theta f = D^n(\Theta F).$$

Soient maintenant f une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans $L(U, V)$ et g une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans U . On définit le produit fg

(fonction continue à valeurs dans V), en posant

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = f(x)(g(x)), \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On aura de même

$$f(x-t)g(t) = f(x-t)(g(t)), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Si f est une fonction indéfiniment différentiable sur \mathbb{R} à valeurs dans $L(U, V)$ et $g = D^m G$, où m est un entier et G une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans U , on définit fg par la formule

$$fg = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} (D^k f \cdot G).$$

D'une façon analogue, si $f = D^m F$ et $g = D^n G$, où m, n sont des entiers et F, G des fonctions continues sur \mathbb{R} , à valeurs respectivement dans $L(U, V)$ et dans U , $f(x-t)$ définit une fonction $t \mapsto f(x-t)$ indéfiniment différentiable sur \mathbb{R} à valeurs dans l'espace des distributions sur \mathbb{R} à valeurs dans $L(U, V)$, telle que

$$D_t^k f(x-t) = (-1)^k D_x^k f(x-t) = (-1)^k D_x^{m+k} F(x-t),$$

et on aura par définition

$$\begin{aligned} f(x-t)g(t) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} D_t^{n-k} [D_t^k f(x-t) \cdot G(t)] = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_x^{m+k} D_t^{n-k} [F(x-t) \cdot G(t)]. \end{aligned}$$

Cela posé, on appelle *convolution de f par g* et on désigne par $f * g$ la distribution sur \mathbb{R} à valeurs dans V définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt,$$

pourvu que l'intégrale paramétrique du 2^d membre soit convergente sur \mathbb{R} *au sens des distributions*: il s'agit donc ici d'une extension immédiate de la notion de convolution dans le cas des distributions scalaires (cf. [8]). En particulier, si f et g sont des fonctions continues (à valeurs respectivement dans $L(U, V)$ et U) telles que

$$\|f(x)\| \leq M/(1 + |x|)^2 \quad ; \quad \|g(x)\| \leq N/(1 + |x|)^2$$

sur \mathbb{R} , où M et N sont des constantes, il est aisé de voir que *les transformées de Laplace $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ sont des fonctions continues bornées sur $i\mathbb{R}$* , et on démontre, comme pour la transformation de Fourier dans le cas scalaire ([8], p. 376) qu'il existe $f * g$ et on a

$$(3.3) \quad \mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g),$$

le produit des fonctions $\mathcal{L}f$ et $\mathcal{L}g$ sur $i\mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $L(U, V)$ et U étant défini comme l'on a fait sur \mathbb{R} .

On en déduit encore comme dans le cas scalaire ([8], p. 377) l'existence de $f * g$ et la formule (3.3), lorsque f est une *distribution à décroissance rapide* et g une *distribution tempérée quelconque*. Donc:

Si f est une distribution à décroissance rapide et g une distribution tempérée, il existe $f * g$ et on a (3.3), c'est-à-dire: *la transformation de Laplace transforme la convolution en produit usuel*.

Il convient de remarquer que, si φ est une fonction indéfiniment différentiable à croissance lente sur $i\mathbb{R}$ et à valeurs dans $L(U, V)$, et f une distribution tempérée sur $i\mathbb{R}$ à valeurs dans U (donc de la forme $f = D^n F$, où n est un entier et F une fonction continue sur $i\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un entier p tel que $F(\lambda)/(1 + |\lambda|)^p$ est bornée sur $i\mathbb{R}$) le produit φf est encore une distribution tempérée (à valeurs dans V) donnée par

$$\varphi f = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} D^{n-k} (\varphi^{(k)} F).$$

Dans cette hypothèse, on déduit de ce qui précède:

$$(3.4) \quad \mathcal{L}^{-1}(\varphi f) = (\mathcal{L}^{-1}\varphi) * (\mathcal{L}^{-1}f),$$

c'est-à-dire: *la transformation inverse de Laplace transforme le produit usuel en convolution*.

En particulier, si φ et f sont deux fonctions indéfiniment différentiables à croissance lente sur $i\mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $L(U, V)$ et dans U , φf est une fonction indéfiniment différentiable à croissance lente à valeurs dans V , et, en appliquant (3.4), on voit que *la convolution de deux distributions à décroissance rapide sur \mathbb{R} (resp. à valeurs dans $L(U, V)$ et U) est encore une distribution à décroissance rapide (à valeurs dans V)*.

Considérons maintenant trois espaces de Banach U, V, W . Tous les résultats précédents, concernant la convolution et la transformée de Laplace de la convolution peuvent s'étendre au cas où f et g sont des distributions sur \mathbb{R} à valeurs respectivement dans $L(V, W)$ et $L(U, V)$. En particulier si f et g sont des fonctions continues, on définit fg en posant

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)g(x)$ est le *produit* ou la *composée* de $f(x)$ par $g(x)$ [que l'on désigne aussi par $f(x) \circ g(x)$]. C'est-à-dire

$$[f(x)g(x)]u = f(x)[g(x)u], \quad \text{pour tout } u \in U \text{ et tout } x \in \mathbb{R}.$$

On adopte, évidemment, une convention analogue sur l'axe imaginaire.

On aura de même, par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$[f(x-t)g(t)]u = f(x-t)[g(t)u], \quad \text{pour tout } u \in U.$$

Cela posé, l'extension des résultats précédents au cas considéré est immédiate.

4. Calcul symbolique de l'opérateur D appliqué à des distributions tempérées.

Soient encore U et V deux espaces de Banach et soit $\Phi(\lambda)$ une fonction indéfiniment différentiable à croissance lente sur $i\mathbb{R}$ à valeurs dans $L(U, V)$. Il est naturel de poser, par définition:

$$(4.1) \quad \Phi(D)f = \mathcal{L}^{-1}(\Phi) * f$$

pour toute distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, U)$.

Cette définition est justifiée par un ensemble de propriétés, dont nous indiquerons celles qui nous intéressent dans ce travail:

1) Si Φ et Ψ sont deux fonctions indéfiniment différentiables à croissance lente sur $i\mathbb{R}$ à valeurs dans $L(U, V)$, on a

$$(\Phi + \Psi)(D) = \Phi(D) + \Psi(D).$$

Cela résulte du fait que $\mathcal{L}^{-1}(\Phi + \Psi) = \mathcal{L}^{-1}(\Phi) + \mathcal{L}^{-1}(\Psi)$.

2) Si W est un troisième espace de Banach, et Φ, Ψ sont deux fonctions indéfiniment différentiables à croissance lente sur $i\mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $L(V, W)$ et $L(U, V)$, on a

$$(\Phi\Psi)(D) = \Phi(D)\Psi(D).$$

En effet, on a pour toute distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, U)$,

$$(\Phi\Psi)(\mathcal{L}f) = \Phi[\Psi(\mathcal{L}f)],$$

d'où, en appliquant \mathcal{L}^{-1} aux deux membres,

$$(4.2) \quad \mathcal{L}^{-1}(\Phi\Psi) * f = \mathcal{L}^{-1}(\Phi) * [\mathcal{L}^{-1}\Psi * f],$$

ou, d'après la définition (4.1),

$$[(\Phi\Psi)(D)]f = \Phi(D)[\Psi(D)f]$$

c'est-à-dire

$$(\Phi\Psi)(D) = \Phi(D)\Psi(D).$$

En particulier, on peut considérer le cas où $U = V$. Alors, l'espace $L(U, V)$, que l'on peut désigner simplement par $L(U)$, est une algèbre de Banach, et l'ensemble des opérateurs zI_U , où z est un nombre complexe quelconque et I_U l'opérateur identique de U , est une sous-algèbre de $L(U)$, isomorphe au corps complexe. On a dans ce cas les deux propriétés suivantes:

3) Si $\Phi(\lambda) = I_U$, alors $\Phi(D)f = f$ pour toute distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}, U)$.

En effet,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda x} I_U d\lambda = \delta(x) I_U,$$

donc

$$L^{-1}(\Phi) * f = (\delta I_U) * f = I_U (\delta * f) = f$$

pour toute distribution f tempérée à valeurs dans U .

4) Si $\Phi(\lambda) = \lambda I_U$, alors $\Phi(D) = D$.

En effet,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{\lambda x} \lambda I_U d\lambda = \delta'(x) I_U,$$

donc

$$\mathcal{L}^{-1}(\Phi) * f = (\delta' I_U) * f = I_U (\delta' * f) = Df$$

pour toute distribution tempérée f à valeurs dans U .

De 2), 3) et 4), on déduit:

5) PROPRIÉTÉ DE L'INVERSION. Soit $\Phi(\lambda)$, pour tout $\lambda \in i\mathbb{R}$, une application biunivoque de U sur V et soit $\Phi(\lambda) = [\Psi(\lambda)]^{-1}$, c'est-à-dire

$$\Phi(\lambda) \Psi(\lambda) = I_V, \Psi(\lambda) \Phi(\lambda) = I_U, \text{ pour tout } \lambda \in i\mathbb{R}.$$

Si en outre Φ et Ψ sont des fonctions indéfiniment différentiables à croissance lente sur $i\mathbb{R}$ à valeurs respectivement dans $L(U, V)$ et $L(V, U)$, on a $\Psi(D) = [\Phi(D)]^{-1}$, c'est-à-dire

$$\Psi(D) \Phi(D) f = f, \text{ pour chaque } f \in \check{D}(R, U)$$

et

$$\Phi(D) \Psi(D) g = g, \text{ pour chaque } g \in \check{D}(R, V).$$

5. Application du calcul symbolique aux équations opérationnelles du type $(D + A)u = f$.

Soit U un espace de Banach et soit A une application linéaire d'un sous-espace vectoriel V de U sur U . Désignons encore par $\check{D}(R, U)$ l'espace des distributions tempérées sur R à valeurs dans U et considérons l'équation

$$(D + A)\varphi = f^{(1)},$$

où f est un élément donné dans $\check{D}(R, U)$. Cette équation aura une solution φ et une seule dans $\check{D}(R, U)$ (et plus précisément dans $\check{D}(R, V)$), si l'opérateur $D + A$ est invertible. Alors on pourra écrire

$$\varphi = \frac{1}{D + A} f.$$

(1) Dans cette équation, on sousentend que l'opérateur A est prolongé à $\check{D}(R, V)$ d'après la définition (3.2), V étant muni d'une norme que l'on va préciser.

Pour savoir si $D + A$ est invertible et déterminer son inverse, on peut employer le calcul symbolique précédent. Pour simplifier l'écriture, nous poserons $zI_V = z$ pour tout nombre complexe z ; alors $z + A$ sera une application linéaire de V dans U pour tout $z \in \mathbb{C}$. *Supposons que, pour tout $\lambda \in i\mathbb{R}$, $\lambda + A$ est une application biunivoque de V sur U et $(\lambda + A)^{-1}$ une application continue de U dans U .*

Considérons l'espace V muni de la norme image de celle de U par A^{-1} . En désignant par $\|\cdot\|$ la norme définie dans U et par $\|\cdot\|^*$ la norme définie dans V , cela veut dire que, pour tout $v \in V$, $\|v\|^*$ est la norme $\|u\|$ de l'élément u de U tel que $v = A^{-1}u$. Alors V est un espace de Banach et la norme $\|\cdot\|$ dans U sera aussi l'image de la norme $\|\cdot\|^*$ dans V par l'application A . En outre, puisque A^{-1} est une application continue de U dans U , la topologie de V est plus fine que celle induite dans V par la topologie de U , c'est-à-dire, il existe une constante M telle que

$$(5.1) \quad \|v\| \leq M \|v\|^*, \quad \text{pour tout } v \in V.$$

Il s'ensuit que la norme $\|\cdot\|$ sur U est équivalente à la norme image de $\|\cdot\|^*$ par $\lambda + A$ pour tout $\lambda \in i\mathbb{R}$ et que, par suite, $\lambda + A$ est une application linéaire bicontinue de V sur U pour tout $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Cela posé, il est évident que $\lambda + A$ est une fonction de λ à valeurs dans $L(V, U)$. Nous définissons dans l'espace $L(U, V)$ une norme $\|\cdot\|^*$, en posant

$$\|\Theta\|^* = \sup_{\|u\| \leq 1} \|\Theta u\|^* \quad \text{pour tout } \Theta \in L(U, V).$$

Il s'ensuit que, pour appliquer le calcul symbolique, il suffit que $(\lambda + A)^{-1}$ soit une fonction de λ indéfiniment différentiable à croissance lente sur $i\mathbb{R}$ à valeurs dans $L(U, V)$.

Sous cette hypothèse, on aura donc:

$$\varphi = \frac{1}{D + A} f = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda + A} \right) * f,$$

où

$$(5.2) \quad \mathcal{L}_{x|\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{\lambda + A} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{e^{\lambda x}}{\lambda + A} d\lambda.$$

6. Cas où $(\lambda + A)^{-1}$ se prolonge comme fonction holomorphe à valeurs dans $L(U, V)$.

Supposons maintenant que $(\lambda + A)^{-1}$ est une fonction holomorphe à valeurs dans $L(U, V)$ de la variable complexe $\lambda = s + it$ ($s, t \in \mathbb{R}$) dans une bande ouverte Ω contenant $i\mathbb{R}$. On dit que $(\lambda + A)^{-1}$ est à croissance

lente sur Ω (par rapport à la norme $\|\cdot\|^*$), s'il existent deux nombres positifs M et α tels que

$$(6.1) \quad \|(\lambda + A)^{-1}\|^* \leq M (1 + |\lambda|)^\alpha \quad \text{sur } \Omega^{(2)}.$$

Il est aisé de voir que, si cette condition est vérifiée, $(\lambda + A)^{-1}$ est une fonction de λ indéfiniment différentiable, à *croissance lente sur* $i\mathbb{R}$, à valeurs dans $L(U, V)$ [cela veut dire que, pour toute dérivée de $(\lambda + A)^{-1}$ par rapport à λ , il existe deux constantes positives (dépendant de l'ordre de dérivation) telles que cette dérivée vérifie une condition du type (6.1)].

En outre, on peut établir deux propositions qui sont assez commodes pour les applications:

PROPOSITION 1. *Pour que la fonction $(\lambda + A)^{-1}$ de λ soit à croissance lente dans Ω par rapport à la norme $\|\cdot\|^*$, il faut et il suffit qu'elle soit à croissance lente dans Ω par rapport à la norme $\|\cdot\|$.*

La condition est évidemment nécessaire: il suffit de rappeler (5.1). Supposons maintenant que $(\lambda + A)^{-1}$ est à croissance lente dans Ω par rapport à la norme $\|\cdot\|$. Alors, il en est de même de la fonction $A(\lambda + A)^{-1}$. En effet, on a

$$\frac{A}{\lambda + A} = 1 - \frac{\lambda}{\lambda + A},$$

d'où, en rappelant la définition (3.1):

$$\|A(\lambda + A)^{-1}\| \leq 1 + |\lambda| \|(\lambda + A)^{-1}\| \quad \text{pour tout } \lambda \in \Omega.$$

Puisque $(\lambda + A)^{-1}$ est à croissance lente sur Ω par rapport à la norme $\|\cdot\|$, on en déduit aisément que $A(\lambda + A)^{-1}$ est aussi à croissance lente sur Ω par rapport à cette norme. Il s'ensuit que $(\lambda + A)^{-1}$ est à croissance lente sur Ω par rapport à la norme $\|\cdot\|^*$, puisque

$$(\lambda + A)^{-1} = A^{-1} [A(\lambda + A)^{-1}],$$

et par conséquent

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|^* \leq \|A^{-1}\|^* \|A(\lambda + A)^{-1}\|, \quad \text{pour tout } \lambda \in \Omega.$$

PROPOSITION 2. *Pour que la fonction $(\lambda + A)^{-1}$ de λ à valeurs dans $L(U, V)$ soit holomorphe dans Ω par rapport à la norme $\|\cdot\|^*$, il faut et il suffit qu'elle soit localement bornée dans Ω par rapport à la norme $\|\cdot\|$.*

On dit que $(\lambda + A)^{-1}$ est *localement bornée* dans Ω par rapport à la norme $\|\cdot\|$, si pour tout $\lambda_0 \in \Omega$, il existe un $\varepsilon > 0$ et un $M > 0$ (dépendants de λ_0), tels que

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| < M \quad \text{dès que } |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon.$$

(2) On définit de même façon croissance lente par rapport à la norme $\|\cdot\|$, compte tenu que $(\lambda + A)^{-1} \in L(U)$ pour tout $\lambda \in \Omega$.

On voit que la condition est nécessaire, en tenant compte de (5.1) et du fait que

$$\frac{1}{\lambda + A} = \frac{1}{\lambda_0 + A} + (\lambda - \lambda_0) \left(D_\lambda \frac{1}{\lambda + A} \right)_{\lambda=\lambda_0} + (\lambda - \lambda_0) \omega(\lambda)$$

où $\omega(\lambda)$ est une fonction à valeurs dans $L(U, V)$ qui tend vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$.

Supposons maintenant que $(\lambda + A)^{-1}$ est localement bornée dans Ω par rapport à $\|\cdot\|$. Or on a, pour tout $\lambda_0 \in \Omega$:

$$\frac{1}{\lambda + A} - \frac{1}{\lambda_0 + A} = -(\lambda - \lambda_0) \frac{1}{\lambda + A} \cdot \frac{1}{\lambda_0 + A},$$

d'où l'on déduit, en tenant compte du fait que $(\lambda + A)^{-1}$ est bornée dans un voisinage de λ_0 pour la norme $\|\cdot\|$:

$$(\lambda + A)^{-1} \rightarrow (\lambda_0 + A)^{-1} \text{ lorsque } \lambda \rightarrow \lambda_0.$$

Donc la fonction de λ

$$\frac{1}{\lambda - \lambda_0} \left(\frac{1}{\lambda + A} - \frac{1}{\lambda_0 + A} \right)$$

tend vers $-(\lambda_0 + A)^{-2}$ dans $L(U)$ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$. Par conséquent $(\lambda + A)^{-1}$ est holomorphe dans Ω par rapport à $\|\cdot\|$ et il en est de même pour la fonction $A(\lambda + A)^{-1}$ de λ puisque

$$A(\lambda + A)^{-1} = 1 - \lambda(\lambda + A)^{-1}.$$

Finalement, comme $(\lambda + A)^{-1} = A^{-1}[A(\lambda + A)^{-1}]$ et A^{-1} est une application linéaire continue de U sur V , il en résulte que $(\lambda + A)^{-1}$ est holomorphe dans Ω par rapport à la norme $\|\cdot\|^*$.

7. Cas où l'ensemble des singularités de $(\lambda + A)^{-1}$ est contenu dans l'axe réel.

Considérons maintenant le cas où l'ensemble S , des singularités de $(\lambda + A)^{-1}$ (c'est-à-dire des points de C où cette fonction n'est pas définie ou n'est pas analytique) est contenu dans R et supposons que $0 \notin S$. Alors $(\lambda + A)^{-1}$ est holomorphe dans l'ouvert $\Omega = C \setminus S$ et, par suite, dans une bande verticale ouverte contenant iR ,

$$(7.1) \quad -\varepsilon < \operatorname{Re} \lambda < \varepsilon,$$

puisque $0 \notin S$. Nous supposerons en outre que $(\lambda + A)^{-1}$ est à croissance lente sur iR . Pour des raisons de commodité que l'on comprendra par la suite,

on changera λ en $-\lambda$ dans l'intégrale de $e^{\lambda x} (\lambda + A)^{-1}$ sur $i\mathbb{R}$. On aura

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{e^{\lambda x}}{\lambda + A} d\lambda = \int_{-\infty i}^{+\infty i} \frac{e^{-\lambda x}}{A - \lambda} d\lambda$$

et nous dirons que $(A - \lambda)^{-1}$ est la *fonction résolvante* de A .

Choisissons θ positif quelconque. L'intégrale de la fonction $e^{-\lambda x} (A - \lambda)^{-1}$ de λ sur $i\mathbb{R}$ — paramétrique en x sur \mathbb{R} au sens des distributions (cf. [8], p. 358) — se décompose en trois intégrales

$$(7.2) \quad \int_{i\mathbb{R}} = \int_{-\infty i}^{-\theta i} + \int_{-\theta i}^{\theta i} + \int_{\theta i}^{+\infty i}.$$

Nous supposons maintenant que la fonction résolvante de A est à *croissance lente* sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ vers l'infini et vers l'axe réel, c'est-à-dire qu'il existe des nombres positifs K, p, q tels que

$$\| (A - \lambda)^{-1} \| < K \frac{(1 + |\lambda|)^p}{|\operatorname{Im} \lambda|^q}, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Alors il existe L et m positifs tels que

$$(7.3) \quad \|\lambda^{-m} (A - \lambda)^{-1}\| \leq L (1 + |\lambda|)^{-2} |\operatorname{Im} \lambda|^{-q}, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

En appliquant la propriété de dérivation des intégrales paramétriques de distributions ([8], p. 358), on aura

$$(7.4) \quad \int_{\theta i}^{+\infty i} \frac{e^{-\lambda x}}{A - \lambda} d\lambda = (-D_x)^m \int_{\theta i}^{+\infty i} e^{-\lambda x} \lambda^{-m} (A - \lambda)^{-1} d\lambda$$

et, compte tenu de (7.3), on voit que l'intégrale paramétrique en x du 2^d membre converge au sens usuel, uniformément sur \mathbb{R} [par rapport à la norme de $L(U)$]. Pour l'intégrale sur $]-\infty i, \theta i]$, on aura évidemment une conclusion analogue. Quant à l'intégrale sur $[-\theta i, \theta i]$, la situation est tout autre. Posons

$$(7.5) \quad e_+^{-\lambda x} = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & \text{pour } x > 0 \text{ et } \operatorname{Re} \lambda \geq 0 \\ 0, & \text{pour } x < 0 \text{ et } \operatorname{Re} \lambda \geq 0 \end{cases}$$

$$(7.6) \quad e_-^{-\lambda x} = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & \text{pour } x < 0 \text{ et } \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \\ 0, & \text{pour } x > 0 \text{ et } \operatorname{Re} \lambda \leq 0. \end{cases}$$

Alors, pour tout $\lambda \in i\mathbb{R}$, on aura

$$e^{-\lambda x} = e_+^{-\lambda x} + e_-^{-\lambda x} \quad \text{pour tout } x \text{ réel } \neq 0,$$

c'est-à-dire, la distribution $e^{-\lambda x}$ de x (fonction continue) est la somme des distributions $e_+^{-\lambda x}$ et $e_-^{-\lambda x}$ de x (fonctions discontinues, localement sommables).

Prenons maintenant c tel que $0 < c < \varepsilon$ [cf. (7.1)] et désignons par P la polygonale orientée dont les sommets successifs sont $-\theta i$, $c - \theta i$, $c + \theta i$, θi . Puisque selon (7.5), pour tout x réel $\neq 0$, la fonction $e_+^{-\lambda x}$ de λ est analytique sur le demiplan fermé $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, on a (d'après le théorème de Cauchy appliqué à des fonctions analytiques à valeurs dans un Banach):

$$\int_{-\theta i}^{\theta i} e_+^{-\lambda x} (A - \lambda)^{-1} d\lambda = \int_P e_+^{-\lambda x} (A - \lambda)^{-1} d\lambda,$$

d'où, en observant qu'il s'agit d'intégrales paramétriques usuels sur des intervalles bornées,

$$(7.7) \quad \int_{-\theta i}^{\theta i} e_+^{-\lambda x} (A - \lambda)^{-1} d\lambda = (-D_x)^m \int_P e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m} (A - \lambda)^{-1} d\lambda + \\ + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left[\int_P \lambda^{-k-1} (A - \lambda)^{-1} d\lambda \right] \delta^{(k)}(x).$$

Analoguement, si l'on désigne par P^* la polygonale orientée dont les sommets successifs sont $-\theta i$, $-c - \theta i$, $-c + \theta i$, θi , on trouve analoguement,

$$(7.8) \quad \int_{-\theta i}^{\theta i} e_-^{-\lambda x} (A - \lambda)^{-1} d\lambda = (-D_x)^m \int_{P^*} e_-^{-\lambda x} \lambda^{-m} (A - \lambda)^{-1} d\lambda - \\ - \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left[\int_{P^*} \lambda^{-k-1} (A - \lambda)^{-1} d\lambda \right] \delta^{(k)}(x).$$

Donc en tenant compte de (7.7) et (7.8),

$$(7.9) \quad \int_{-\theta i}^{\theta i} e^{-\lambda x} (A - \lambda)^{-1} d\lambda = \\ = (-D_x)^m \left[\int_P e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m} (A - \lambda)^{-1} d\lambda + \int_{P^*} e_-^{-\lambda x} \lambda^{-m} (A - \lambda)^{-1} d\lambda \right] + \\ + 2\pi i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k A^{-k-1} \delta_{(x)}^{(k)},$$

parce que $\int_Q \lambda^{-k-1} (A - \lambda)^{-1} d\lambda = 2\pi i A^{-k-1}$, où Q désigne la polygonale orientée dont les sommets successifs sont $c - \theta i$, $c + \theta i$, $-c + \theta i$, $-c - \theta i$.

Revenons maintenant à (7.4). En observant que, dans le 2^d membre, il s'agit d'une intégrale paramétrique au sens usuel, on voit également que

$$(7.10) \quad \int_{\theta i}^{+\infty i} \frac{e^{-\lambda x}}{A-\lambda} d\lambda = (-D_x^m) \left[\int_{\theta i}^{+\infty i} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda + \int_{\theta i}^{+\infty i} \frac{e_-^{-\lambda x} \lambda^m}{A-\lambda} d\lambda \right]$$

et de même pour l'intégrale sur $] -\infty i, -\theta i]$. D'autre part, en appliquant le théorème de Cauchy, on trouve, compte tenu de (7.3),

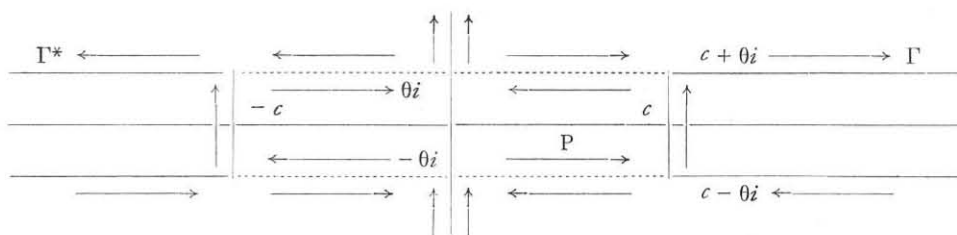
$$\begin{aligned} \int_{\theta i}^{+\infty i} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda &= \int_{\theta i}^{\theta i + \infty} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda, \\ \int_{-\infty i}^{-\theta i} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda &= \int_{-\infty + \theta i}^{-\theta i} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda, \end{aligned}$$

où les intégrales du 2^d membre sont prises évidemment sur les demidroites $\{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = \theta, \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$, $\{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = -\theta, \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ orientées de façon à laisser l'axe réel à droite. Pour la fonction $e^{-\lambda x} \lambda^{-m} (A-\lambda)^{-1}$ on arrive à des résultats analogues dans le demiplan $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Alors, si l'on désigne par Γ la ligne formée par le segment $[c - \theta i, c + \theta i]$ et par les demidroites

$$\{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = \theta, \operatorname{Re} \lambda > c\}, \{\lambda : \operatorname{Im} \lambda = -\theta, \operatorname{Re} \lambda > c\},$$

orientée de façon à laisser à droite l'axe réel, on trouve, en rappelant (7.2), et les résultats précédents,

$$(7.11) \quad \int_{i\mathbb{R}} \frac{e^{-\lambda x}}{A-\lambda} d\lambda = (-D_x)^m \left[\int_{\Gamma} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda + \int_{\Gamma^*} \frac{e_-^{-\lambda x} \lambda^m}{A-\lambda} d\lambda \right] + \\ + 2\pi i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k A^{-k-1} \delta^{(k)}(x).$$



Pour des raisons que l'on comprendra par la suite, il est convenable de changer le sens du chemin d'intégration Γ^* . On obtient alors la ligne orientée

— Γ , symétrique de Γ par rapport à 0, et la formule (7.11) s'écrit

$$(7.12) \quad \int_{i\mathbb{R}} \frac{e^{-\lambda x}}{A-\lambda} d\lambda = (-D_x)^m \left[\int_{\Gamma} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda - \int_{\Gamma} \frac{e_-^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda \right] + \\ + 2\pi i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k A^{-k-1} \delta^{(k)}(x).$$

Observons maintenant que, en vertu de (7.3), la fonction $(A-\lambda)^{-1}$ tend (au sens des distributions) vers deux distributions tempérées sur \mathbb{R} à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{U})$ lorsque $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow 0^+$ et $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow 0^-$. Pour la démonstration, on peut employer la technique utilisée dans l'inversion de la transformation de Stieltjes ([9], p. 121), qui se généralise immédiatement au cas des distributions à valeurs dans un Banach. Posons $\lambda = s + it$ ($s, t \in \mathbb{R}$) et

$$(7.13) \quad \delta^+(s-A) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{A-(s+it)}$$

$$\delta^-(s-A) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{A-(s+it)}$$

$$\delta(s-A) = \delta^+(s-A) - \delta^-(s-A).$$

Alors, en rappelant que $(A-\lambda)^{-1}$ est holomorphe dans la bande $-\varepsilon < \operatorname{Re} \lambda < \varepsilon$ et que $0 < c < \varepsilon$, il est aisé de voir [9] que l'on a, compte tenu de (7.13)

$$\int_{c+\theta i}^{+\infty+\theta i} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda = 2\pi i \int_c^{+\infty} e_+^{-sx} s^{-m} \delta^+(s-A) ds \\ \int_{+\infty-\theta i}^{c-\theta i} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda = 2\pi i \int_{+\infty}^c e_+^{-sx} s^{-m} \delta^-(s-A) ds$$

où les intégrales du 2^d membre sont convergentes par rapport à x sur \mathbb{R} au sens des distributions. Donc

$$(7.14) \quad \int_{\Gamma} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda = 2\pi i \int_c^{+\infty} e_+^{-sx} s^{-m} \delta(s-A) ds,$$

puisque

$$\int_{c-i\theta}^{c+\theta i} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A-\lambda} d\lambda \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \theta \rightarrow 0.$$

Analoguement

$$(7.15) \quad \int_{-\Gamma}^{\cdot} \frac{e_+^{-\lambda x} \lambda^{-m}}{A - \lambda} d\lambda = 2\pi i \int_{-\infty}^{-\epsilon} e_+^{-sx} s^{-m} \delta(s - A) ds.$$

Donc, on aura, en vertu de (5.2) et (7.12),

$$(7.16) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{x|\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{A - \lambda} \right) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{iR}^{\cdot} \frac{e^{-\lambda x}}{A - \lambda} d\lambda = \\ &= (-D_x)^m \left[\int_{\epsilon}^{+\infty} e_+^{-sx} s^{-m} \delta(s - A) ds - \int_{-\infty}^{-\epsilon} e_-^{-sx} s^{-m} \delta(s - A) ds \right] + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k A^{-k-1} \delta^{(k)}(x), \end{aligned}$$

où encore

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x|\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{A - \lambda} \right) &= \int_{\epsilon}^{+\infty} e_+^{-sx} \delta(s - A) ds + \int_{\epsilon}^{+\infty} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{s^{k+1}} \delta(s - A) \delta^{(k)}(x) ds - \\ &\quad - \int_{-\infty}^{-\epsilon} e_-^{-sx} \delta(s - A) ds - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \frac{1}{s^{k+1}} \delta(s - A) \delta^{(k)}(x) ds + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k A^{-k-1} \delta^{(k)}(x). \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on tient compte que la distribution $\delta(s - A)$ est nulle dans l'intervalle $] -\epsilon, \epsilon[$, (puisque son image de Stieltjes, $\frac{1}{2\pi i} (A - \lambda)^{-1}$, est une fonction holomorphe dans la bande $-\epsilon < \operatorname{Re} \lambda < \epsilon$, cf. [9]) et que $\epsilon \in]0, \epsilon[$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x|\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{A - \lambda} \right) &= \int_{\epsilon}^{+\infty} e_+^{-sx} \delta(s - A) ds - \int_{-\infty}^{-\epsilon} e_-^{-sx} \delta(s - A) ds + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{k+1} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s^{k+1}} \delta(s - A) ds \delta^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k A^{-k-1} \delta^{(k)}(x), \end{aligned}$$

où encore

$$(7.17) \quad \mathcal{L}_{x|\lambda}^{-1} \left(\frac{1}{A - \lambda} \right) = \int_{\epsilon}^{+\infty} e_+^{-sx} \delta(s - A) ds - \int_{-\infty}^{-\epsilon} e_-^{-sx} \delta(s - A) ds,$$

puisqu'on a, pour chaque entier $k \geq 0$ ⁽³⁾,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s^{k+1}} \delta(s-A) ds = A^{-k-1}.$$

En désignant par $E(x, A)$ le deuxième membre de (7.17), on arrive finalement au

THÉORÈME 1. *Si la fonction résolvante de A est holomorphe dans le complémentaire d'un ensemble S contenu dans \mathbb{R} tel que $0 \notin S$, et si, en outre, cette fonction est à croissance lente sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ vers l'infini et vers l'axe réel [c'est-à-dire, vérifie une condition de la forme (7.3)], alors, pour toute distribution f tempérée sur \mathbb{R} à valeurs dans U , il existe une et une seule distribution φ tempérée sur \mathbb{R} à valeurs dans U (et plus précisément dans V), telle que*

$$(D + A) \varphi = f.$$

La solution est donnée par la formule

$$\varphi(x) = E(x, A) * f(x) = \int_{\mathbb{R}} E(x - \xi, A) f(\xi) d\xi$$

où $E(x, A)$ est l'image inverse de Laplace de $(\lambda + A)^{-1}$. Celle-ci peut être calculée suivant le dernier membre de la formule (7.17).

Il ne faut pas oublier que, dans cette formule, les intégrales paramétriques sont convergentes sur \mathbb{R} au sens des distributions [à valeurs dans $L(U)$]

(3) La formule

$$(i) \quad (A - \lambda)^{-1} - A^{-1} - \lambda A^{-2} - \dots - \lambda^{n-1} A^{-n} = \lambda^n A^{-n} (A - \lambda)^{-1} \quad (\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

montre que les fonctions $(A - \lambda)^{-1}$ et $\lambda^n A^{-n} (A - \lambda)^{-1}$, dont la différence est un polynôme en λ , sont des images de Stieltjes d'une même distribution tempérée sur \mathbb{R} (cf. [9]); on en déduit qu'on a, pour chaque entier $n \geq 0$,

$$(ii) \quad s^{-n} \delta(s-A) = A^{-n} \delta(s-A).$$

Divisons maintenant les deux membres de (i) par λ^n , en supposant n choisi de façon que $\lambda^{2-n} (A - \lambda)^{-1}$ soit bornée pour $|\operatorname{Im} \lambda| \geq \varepsilon > 0$, et désignons par $\varphi(\lambda)$ le premier membre de l'égalité obtenue. En posant $\lambda = s + i\varepsilon$, on aura

$$\int_{\mathbb{R}} [\varphi(s+i\varepsilon) - \varphi(s-i\varepsilon)] ds = -A^{-n} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{s+i\varepsilon} - \frac{1}{s-i\varepsilon} \right) ds = 2\pi i A^{-n}$$

et alors

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{A-s-i\varepsilon} - \frac{1}{A-s+i\varepsilon} \right] ds + 2\pi i.$$

d'où on déduit, compte tenue de [9], Th. 6.2 et de (ii), qu'on a, pour chaque entier $n \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} s^{-n} \delta(s-A) ds = A^{-n}.$$

et non pas pour toute valeur de x . Toutefois, dans la pratique, on peut faire recours à la proposition suivante:

THÉORÈME 2. La distribution $E(x, A)$ de x sur R à valeurs dans $L(U)$ est une fonction indéfiniment différentiable (et même analytique) dans le complémentaire de l'origine et on a

$$E(x, A) = \begin{cases} -\int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{-sx} \delta(s-A) ds, & \text{pour tout } x < 0 \\ \int_{\epsilon}^{+\infty} e^{-sx} \delta(s-A) ds, & \text{pour tout } x > 0. \end{cases}$$

Cette fonction est à décroissance exponentielle sur R , c'est-à-dire, il existe deux nombres positifs M et k tels que

$$\|E(x, A)\| < M e^{-k|x|} \quad \text{pour tout } x \in R \setminus \{0\}.$$

Démonstration. Commençons par observer que:

1) $\delta(s-A)$ est une distribution tempérée sur R à valeurs dans $L(U)$ et nulle dans $] -\epsilon, \epsilon[$, donc de la forme

$$\delta(s-A) = D_s^p \Delta(s-A),$$

où p est un entier et $\Delta(s-A)$ une fonction continue à croissance lente sur R à valeurs dans $L(U)$ et nulle dans $] -\epsilon, \epsilon[$.

2) Pour tout $s < 0$ [resp. $s > 0$], e^{-sz} , où $z = x + iy$, représente une fonction holomorphe de z dans le demiplan ouvert $\operatorname{Re} z < 0$ [resp. $\operatorname{Re} z > 0$].

On aura donc, pour tout z tel que $\operatorname{Re} z < 0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{-sz} \delta(s-A) ds &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{-sz} D_s^p \Delta(s-A) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} D_s^{p-k} [\Delta(s-A) z^k e^{-sz}] ds \end{aligned}$$

et comme $\Delta(s-A)$ est une fonction à croissance lente à gauche, qui est nulle dans un voisinage du point ϵ , tous les termes de la somme antérieure, pour $k < p$, ont une intégrale nulle. On aura donc

$$(7.18) \quad \int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{-sz} \delta(s-A) ds = z^p \int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{-sz} \Delta(s-A) ds.$$

Cette dernière intégrale converge au sens usuel, définissant une fonction holomorphe de z pour $\operatorname{Re} z < 0$, donc analytique de x sur $] -\infty, 0[$. Pour $x > 0$ la démonstration est analogue.

Pour voir que $E(x, A)$ est à décroissance exponentielle à l'infini, il suffit de rappeler que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe L positif tel que $|s^n e^{-sx}| < Le^{-s(1-\varepsilon)x}$ lorsque $\varepsilon > 0$, $sx > 0$, et d'employer cette propriété dans le 2^d membre de (7.18) et dans l'intégrale correspondante entre c et $+\infty$, en remplaçant z par x et en tenant compte du fait que $\Delta(s - A)$ est à croissance lente sur \mathbb{R} .

COROLLAIRE. *Sous les hypothèses du théorème, la distribution $\varphi = (D + A)^{-1}f$ est une fonction analytique [resp. indéfiniment différentiable] dans tout intervalle ouvert de \mathbb{R} où f est nulle [resp. indéfiniment différentiable].*

Démonstration. a) Supposons que f est nulle dans un intervalle borné $I =]\alpha, \beta[$. Puisque f est tempérée sur \mathbb{R} , on peut choisir n entier et F continue à croissance lente sur \mathbb{R} à valeurs dans U , nulle dans I , tels que $f = D^n F$. Alors on a, d'après la propriété de dérivation de la convolution, en rappelant que $E(x, A)$ est à décroissance exponentielle,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= E(x, A) * f(x) = D_x^n [E(x, A) * F(x)] = \\ &= D_x^n \left[\int_{-\infty}^{\alpha^+} E(x - \xi, A) F(\xi) d\xi + \int_{\beta^-}^{+\infty} E(x - \xi, A) F(\xi) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Or, si l'on remplace dans ces intégrales x par $z = x + iy$ on a $\operatorname{Re}(z - \xi) \neq 0$ pour tout z tel que $\operatorname{Re} z \in I$, puisque $\xi \notin I$. Par suite, d'après le théorème 2, $E(z - \xi, A)$ est une fonction analytique de z sur I (plus précisément dans l'ouvert $\operatorname{Re} z \in I$ de \mathbb{C}). Donc, il en est de même pour $\varphi(z)$, compte tenu que F est à croissance lente sur \mathbb{R} et que, pour tout intervalle fermé $J \subset I$, il existe deux constantes M et k positives telles que

$$\|E(z - \xi, A)\| < M e^{-k|\xi|} \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}, \text{ lorsque } \operatorname{Re} z \in J,$$

ce qui rend ces intégrales uniformément convergentes sur l'ensemble $\operatorname{Re} z \in J$.

b) Supposons que f est indéfiniment différentiable dans l'intervalle $I =]\alpha, \beta[$ et prenons arbitrairement α', β' tels que $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. Alors on peut mettre f sous la forme $f = f_1 + f_2$, où f_1 est une fonction indéfiniment différentiable sur $J = [\alpha', \beta']$ et nulle dans $\mathbb{R} \setminus J$, et f_2 est une distribution nulle dans $]\alpha', \beta'[,$ Dans ces conditions, la distribution $(D + A)^{-1} f_2$ est une fonction analytique dans $]\alpha', \beta'[,$ et il reste à montrer que la distribution $\varphi_1 = (D + A)^{-1} f_1$ est indéfiniment différentiable dans $]\alpha', \beta'[,$ Or on a sur \mathbb{R} , au sens des distributions,

$$\varphi_1(x) = \int_{\alpha'}^{\beta'} E(x - \xi, A) f_1(\xi) d\xi.$$

On en déduit, compte tenu que $E(x, A)$ peut se mettre sous la forme $E(x, A) = D^m \tilde{E}(x, A)$, où $\tilde{E}(x, A)$ est une fonction continue sur R à valeurs dans $L(U)$:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= D_x^m \int_{\alpha'}^{\beta'} \tilde{E}(x - \xi, A) f_1(\xi) d\xi = \\ &= -D_x^m \int_{x-\alpha'}^{x-\beta'} \tilde{E}(\xi, A) f_1(x - \xi) d\xi.\end{aligned}$$

Or, si l'on pose $\Phi_1(x) = \int_{x-\alpha'}^{x-\beta'} \tilde{E}(\xi, A) f_1(x - \xi) d\xi$, on a dans $] \alpha', \beta' [$, suivant les règles usuelles de dérivation des intégrales,

$$\begin{aligned}\Phi_1'(x) &= \int_{x-\alpha'}^{x-\beta'} \tilde{E}(\xi, A) f_1'(x - \xi) d\xi + \tilde{E}(x - \beta', A) f_1(\beta') - \\ &\quad - \tilde{E}(x - \alpha', A) f_1(\alpha')\end{aligned}$$

et, en général, pour n naturel quelconque,

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(n)}(x) &= \int_{x-\alpha'}^{x-\beta'} \tilde{E}(\xi, A) f_1^{(n)}(x - \xi) d\xi + \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} [\tilde{E}^{(n-j)}(x - \beta', A) f_1^{(j)}(\beta') - \tilde{E}^{(n-j)}(x - \alpha', A) f_1^{(j)}(\alpha')].\end{aligned}$$

Puisque $E(x, A)$ est indéfiniment différentiable dans $R \setminus \{0\}$, il s'ensuit que Φ_1 (donc φ_1) est indéfiniment différentiable dans $] \alpha', \beta' [$, donc dans $] \alpha, \beta [$ c.q.f.d.

8. La méthode heuristique des vecteurs propres.

Les considérations qui suivent, dans ce n°^o, ont nécessairement un caractère intuitif, peu rigoureux. Elles sortent du cadre classique des opérateurs linéaires dans des espaces de Hilbert. On adopte ici le point de vue naïf des physiciens et des ingénieurs dans ce genre de questions.

Soit U un espace de Hilbert et A une application linéaire d'un sous-espace V de U sur U . Supposons que A admet un système orthogonal et complet de vecteurs propres $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. Cela veut dire que l'on a:

$Au_n = \lambda_n u_n$ ($\lambda_n \neq 0$, valeur propre de A) pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\langle u_m | u_n \rangle = 0$ pour $m \neq n$, et

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n, \quad \text{où } c_n = \frac{\langle u | u_n \rangle}{\langle u_n | u_n \rangle}, \quad \text{pour tout } u \in U.$$

Alors on aura, au moins formellement,

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n u_n$$

et il est naturel de poser, pour toute fonction scalaire Φ , définie au moins dans l'ensemble des valeurs propres de A ,

$$\Phi(A) u = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda_n) c_n u_n.$$

Observons que, d'après ce qui précède,

$$\langle u_m | u_n \rangle = \alpha_m \delta_{mn}, \quad \text{quels que soient } m, n \in \mathbb{N},$$

où $\alpha_m = \langle u_m | u_m \rangle$ et δ_{mn} est le symbole de Kronecker (égale à 0 pour $m \neq n$ et à 1 pour $m = n$).

Soit U , maintenant, *par exemple*, l'espace des fonctions à carré sommable sur R . On peut appeler vecteur propre de A , dans ce cas, toute distribution u sur R non nulle pour laquelle Av a un sens et telle que $Av = \lambda v$, où λ est un nombre réel ou complexe $\neq 0$. Supposons en particulier que l'ensemble des valeurs propres de A est R et que l'on connaît un système de vecteurs propres v_s de A sur R . Il est alors naturel de dire qu'un tel système est *orthogonal*, si l'on a au sens des distributions,

$$\langle v_s | v_{s'} \rangle = \int_R v_s(x) \overline{v_{s'}(x)} dx = \alpha_s \delta(s - s'),$$

où α_s est pour tout $s \in R$ un nombre complexe $\neq 0$ et δ la distribution de Dirac. Et on dira que ce système est *complet* dans U , si, pour toute fonction $f \in U$, on a

$$f(x) = \int_R c_s v_s(x) ds,$$

où

$$c_s = \frac{1}{\alpha_s} \langle f | v_s \rangle = \frac{1}{\alpha_s} \int_R f(x) \overline{v_s(x)} dx$$

au sens des distributions.

Le système sera dit *orthonormé*, si $\alpha_s = 1$ pour tout $s \in R$. Si α_s est $\neq 1$ on peut *normaliser* le système, en remplaçant v_s par v_s multiplié par une racine carrée de α_s (positive si α_s est réel positif).

Par exemple, si $A = -iD$, on voit que les valeurs propres de A sont tous les nombres réels et que l'on peut choisir dans ce cas $v_s(x) = e^{isx}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $Ae^{isx} = se^{isx}$. Ce système est orthogonal. En effet:

$$\int_{\mathbb{R}} v_s(x) \overline{v_{s'}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{isx} e^{-is'x} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ix(s-s')} dx = 2\pi \delta(s-s')$$

(donc $\alpha_s = 2\pi$ pour tout s).

En outre, il est complet dans U . En effet

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} c(s) e^{isx} ds$$

où

$$c(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-isx} f(x) dx,$$

ces intégrales étant convergentes même au sens de la norme de U (théorème de Plancherel pour la transformation de Fourier, où l'on emploie la constante de normalisation $1/\sqrt{2\pi}$).

Un exemple trivial (dual du précédent en mécanique quantique) est celui de l'opérateur « multiplication par x ». Alors on a

$$x\delta(x-s) = s\delta(x-s) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}} \delta(x-s) \delta(x-s') dx = \delta(s-s')$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(s) \delta(x-s) ds \quad , \quad f(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \delta(x-s) dx.$$

Dans ce cas, on peut considérer $\delta(x-s)$ soit comme une fonction indéfiniment différentiable de s soit comme une distribution de s . Quoiqu'il en soit, il s'agit manifestement d'un système orthonormé et complet de vecteurs propres de l'opérateur considéré dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ (par exemple).

Considérons maintenant le cas plus général où le spectre de A (ensemble des valeurs propres) a une partie discrète, constitué par un ensemble fini ou dénombrable de nombres réels s_1, s_2, \dots et par un ouvert Ω de \mathbb{R} , U étant un espace hilbertien de fonctions ou distributions. Soient u_1, u_2, \dots des vecteurs propres de A choisis, respectivement, pour s_1, s_2, \dots et w_s un système de vecteurs propres de A défini dans Ω , ces vecteurs propres pouvant être des distributions ou des fonctions n'appartenant pas à U , comme dans le cas précédant. Alors on dira que le système de vecteurs

$\{u_1, u_2, \dots; w_s (s \in \Omega)\}$ est *orthogonal*, si l'on a

$$\langle u_j | u_k \rangle = \alpha_j \delta_{j,k} \quad (\alpha_j \neq 0), \quad \text{pour } j, k = 1, 2, \dots,$$

$$\langle u_j | w_s \rangle = 0, \quad \text{pour } j = 1, 2, \dots \text{ et } s \in \Omega,$$

$$\langle w_s | w_{s'} \rangle = \beta_s \delta(s - s')|_{\Omega}$$

où β_s est, pour tout $s \in \Omega$, un nombre complexe $\neq 0$, $\delta(s - s')|_{\Omega}$ la restriction de $\delta(s - s')$ à Ω pour tout $s' \in \mathbb{R}$ et où les produits internes peuvent être pris en un sens généralisé, dépendant de la nature du problème en question.

D'autre part, on dira que ce système est complet, si l'on a, pour tout élément u de U ,

$$(8.1) \quad u = \sum_j c_j u_j + \int_{\Omega} k_s w_s ds$$

où

$$c_j = \frac{1}{\alpha_j} \langle u | u_j \rangle \quad \text{et} \quad k_s = \frac{1}{\beta_s} \langle u | w_s \rangle,$$

les produits internes pouvant encore être pris en sens généralisé.

Voyons comment peut on établir, au moins formellement, un calcul symbolique sur une analyse spectrale de ce type. Soit $\{u_j, w_s\}$ un système orthogonal et complet de vecteurs propres de A dans U et Φ , par exemple, une fonction scalaire indéfiniment différentiable sur le spectre de A . Alors, puisque l'on a $Au_j = s_j u_j$, $j = 1, 2, \dots$, $Aw_s = sw_s$, pour $s \in \Omega$, il est naturel de poser, formellement,

$$\Phi(A) u = \sum_j \Phi(s_j) c_j u_j + \int_{\Omega} \Phi(s) k_s w_s ds.$$

Ces considérations peuvent s'étendre au cas de fonctions Φ vectorielles. Reprenons l'équation

$$(8.2) \quad (D_x + A) \varphi(x) = f(x),$$

où f est une distribution tempérée sur \mathbb{R} à valeurs dans l'espace hilbertien U . La recherche d'une solution φ (distribution tempérée sur \mathbb{R} à valeurs dans U) peut maintenant se faire en étudiant la fonction $(D + s)^{-1}$ de s , lorsque D est l'opérateur de dérivation sur les distributions tempérées sur \mathbb{R} à valeurs dans U , et en essayant d'interpréter la valeur de cette fonction quand on remplace s par A . Or on a, comme il est aisé de voir

$$\frac{1}{D + s} f(x) = E(x, s) *_x f(x),$$

où

$$E(x, s) = \begin{cases} e^{-sx} & \text{pour } s > 0 \text{ et } x > 0 \\ -e^{-sx} & \text{pour } s < 0 \text{ et } x < 0 \\ 0 & \text{pour } sx < 0. \end{cases}$$

[Pour $s = 0$, l'équation $(D + s)\psi = f$ n'a pas de solution unique dans l'espace des distributions tempérées sur \mathbb{R} à valeurs dans U , le spectre de D étant dans ce cas $i\mathbb{R}$].

Il s'agit donc de donner un sens à l'expression $E(x, A)$. Supposons que l'origine n'appartient pas au spectre de A . Il est alors naturel de poser formellement, pour tout $u \in U$,

$$E(x, A)u = \sum_j E(x, s_j) c_j v_j + \int_{\Omega} E(x, s) k_s w_s ds$$

et une solution de (8.2) devra être donnée par la formule

$$\varphi(x) = E(x, A) *_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} E(x - \xi, A) f(\xi) d\xi$$

où le produit de la fonction $E(x - \xi, A)$ de ξ [à valeurs dans $L(U)$] par la distribution $f(\xi)$ (à valeurs dans U) est pris au sens déjà précisé au n° 3.

Comme on le voit, cette méthode, bien que très suggestive, reste assez imprécise. Pour la justifier, on pourrait essayer de la ramener à la méthode rigoureuse exposée aux n.°s 5, 6 et 7, en posant

$$\frac{1}{\lambda - A} u = \sum_j \frac{c_j v_j}{\lambda - s_j} + \int_{\Omega} \frac{\gamma_s w_s}{\lambda - s} ds, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

et en cherchant à démontrer, à partir de cette formule, que la fonction $(\lambda - A)^{-1}$ de λ donne effectivement une solution unique $v \in U$ de l'équation $(\lambda - A)v = u$, pour tout $u \in U$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, et que cette fonction est:

1) localement bornée (donc holomorphe), par rapport à la norme de $L(U)$, dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;

2) à croissance lente vers l'infini et vers l'axe réel par rapport à cette norme.

Alors cette méthode hasardeuse des vecteurs propres aura vraiment une valeur heuristique en ce qui concerne la résolution de l'équation (8.2).

Dans ce qui suit, on suivra le chemin inverse, dans l'étude de l'équation de Boltzmann, c'est-à-dire, on appliquera d'abord directement la méthode exposée aux n.°s 5, 6 et 7 et on exprimera ensuite la solution en termes de vecteurs propres de A . Mais on pourrait aussi, au contraire, commencer par chercher un système orthogonal de vecteurs propres de A et en déduire la solution de l'équation de Boltzmann, ce qui serait justifié ensuite au moyen de la fonction $(\lambda - A)^{-1}$ exprimée en termes de vecteurs propres.

9. Application de la méthode des n.^{os} 5, 6 et 7 à l'équation de Boltzmann.

Retournons à l'équation de Boltzmann sous la forme

$$(9.1) \quad (D_x + A_y) \varphi(x, y) = f(x, y)$$

où

$$(9.2) \quad A_y \varphi(x, y) = y \varphi(x, y) - \frac{ay}{2} \int_I \frac{\varphi(x, \eta)}{\eta^2} d\eta,$$

I étant la réunion des intervalles $] -\infty, -b[$ et $]b, +\infty[$.

Pour appliquer la méthode exposée aux n.^{os} 5, 6 et 7 nous supposons maintenant que U est l'espace des fonctions complexes u à carré sommable sur I par rapport à la mesure dy/y^2 (i. e. des fonctions complexes $u(y)$ telles que $u(y)/y$ est à carré sommable sur I), muni de la structure hilbertienne donnée par le produit interne

$$\langle u | v \rangle = \int_I \frac{u(y) \overline{v(y)}}{y^2} dy.$$

Cela étant, nous supposons, dans (9.1), que $f(x, y)$ représente une distribution de x tempérée sur R, dont les valeurs sont des fonctions de y appartenant à U et que l'on cherche une solution $\varphi(x, y)$ du même type.

a) *Détermination de la fonction résolvante de A.* L'opérateur A est défini dans un sous espace V de U par la formule

$$A_y v(y) = y v(y) - \frac{ay}{2} \int_I \frac{v(\eta)}{\eta^2} d\eta.$$

La formule (3.2) définit l'extension de cet opérateur aux distributions $\varphi(x, y)$ de x tempérées sur R à valeurs dans U (et plus précisément dans V).

Dans ce cas, la recherche de $(A - \lambda)^{-1}$ consiste donc à résoudre l'équation $(A - \lambda)v = u$, c'est-à-dire, l'équation

$$(9.3) \quad (y - \lambda) v(y) - \frac{ay}{2} \int_I \frac{v(\eta)}{\eta^2} d\eta = u(y),$$

où l'on se donne u dans U et on cherche v aussi dans U. Quelle que soit la fonction $v(y)$ qui vérifie cette équation, l'intégrale du 1^{er} membre ne dépend pas de y , mais seulement de λ . En désignant par $k(\lambda)$ cette fonction de λ , l'équation (9.3) peut donc s'écrire:

$$(y - \lambda) v(y) - \frac{ay}{2} k(\lambda) = u(y),$$

ce qui est équivalent à

$$(9.4) \quad v(\gamma) = \frac{u(\gamma)}{\gamma - \lambda} + \frac{a\gamma k(\lambda)}{2(\gamma - \lambda)}.$$

En remplaçant v par cette expression dans (9.3), on obtient, après plusieurs réductions,

$$k(\lambda) - \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta - \lambda)} d\eta - \frac{ak(\lambda)}{2} \int_I \frac{d\eta}{\eta(\eta - \lambda)} = 0$$

d'où

$$(9.5) \quad k(\lambda) = \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta - \lambda)} d\eta \cdot \left[1 - \frac{a}{2} \int_I \frac{d\eta}{\eta(\eta - \lambda)} \right]^{-1}.$$

Quand on cherche une primitive de $[\eta(\eta - \lambda)]^{-1}$ par rapport à η on est conduit formellement à l'expression

$$\frac{1}{\lambda} [\log(\eta - \lambda) - \log \eta].$$

Or, pour chaque $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{I}$, l'expression $\log(\eta - \lambda)$ représente une fonction de η analytique au sens de Weierstrass ⁽⁴⁾, ayant λ comme point de ramification, et dont les branches sont données par l'expression

$$\log |\eta - \lambda| + i \arg_0(\eta - \lambda) + 2k\pi i \\ (-\pi < \arg_0(\eta - \lambda) \leq \pi \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Analogiquement, on a pour $\log \eta$ une infinité de branches données par l'expression

$$\log |\eta| + \arg_0 \eta + 2k\pi i.$$

Pour calculer l'intégrale de $[\eta(\eta - \lambda)]^{-1}$ entre b et $+\infty$, on peut prendre la primitive correspondante à $k = 0$:

$$\frac{1}{\lambda} [\log |\eta - \lambda| + i \arg_0(\eta - \lambda) - \log |\eta| - i \arg_0 \eta] = \\ = \frac{1}{\lambda} \left[\log \left| \frac{\eta - \lambda}{\eta} \right| + i \arg_0(\eta - \lambda) - i \arg_0 \eta \right]$$

et on trouve, pour chaque $\lambda \notin [b, +\infty[$

$$\int_b^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta(\eta - \lambda)} = \frac{1}{\lambda} [\log b - \log |\lambda - b| - i \arg_0(b - \lambda)].$$

(4) On considère ici provisoirement η comme variable complexe.

Désignons par $\log_0(b - \lambda)$ la branche de la fonction analytique $\log(b - \lambda)$ de λ , qui est holomorphe dans l'ouvert $C \setminus [b, +\infty[$ et réelle sur $] -\infty, b[$. Alors on peut écrire plus simplement

$$\int_b^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta(\eta - \lambda)} = \frac{1}{\lambda} [\log b - \log_0(b - \lambda)].$$

On trouve, d'une façon analogue,

$$\int_{-\infty}^{-b} \frac{d\eta}{\eta(\eta - \lambda)} = \frac{1}{\lambda} [\log_0(b + \lambda) - \log b]$$

où $\log_0(b + \lambda)$ désigne la branche de $\log(b + \lambda)$ qui est holomorphe dans l'ouvert $C \setminus]-\infty, -b]$ et réelle sur $] -b, +\infty[$.

On aura donc

$$\int_I \frac{d\eta}{\eta(\eta - \lambda)} = \frac{1}{\lambda} \log_0 \frac{b + \lambda}{b - \lambda},$$

où $\log_0 \frac{b + \lambda}{b - \lambda}$ désigne la branche de $\log \frac{b + \lambda}{b - \lambda}$ qui est holomorphe dans l'ouvert $C \setminus \bar{I}$ et réelle sur $] -b, b[$. Par substitution dans (9.5), on obtient alors

$$(9.6) \quad k(\lambda) = \frac{1}{1 - \frac{a}{2\lambda} \log_0 \frac{b + \lambda}{b - \lambda}} \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta - \lambda)} d\eta,$$

et, par substitution dans (9.4),

$$(9.7) \quad v(y) = \frac{u(y)}{y - \lambda} + \frac{yg(\lambda)}{y - \lambda} \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta - \lambda)} d\eta \quad (y \in I)$$

où

$$(9.8) \quad g(\lambda) = \frac{\lambda}{\frac{2\lambda}{a} - \log_0 \frac{b + \lambda}{b - \lambda}}.$$

Observons que, dans l'intégrale du 2^d membre de (9.7), la fonction intégrande est le produit de deux fonctions à carré sommable sur I , donc sommable sur I , et que la fonction v appartient encore à U . La formule (9.7) donne donc la valeur (unique) de $v = (A - \lambda)^{-1} u$ ($u \in U$), pour tout $u \in U$ et tout $\lambda \in C \setminus R$.

b) *Étude du spectre de A*. La formule (9.7) montre aussitôt que l'ensemble \bar{I} est contenu dans le spectre de A . Il reste à voir s'il y a encore d'autres points du spectre de A . Ceux-ci ne peuvent être que des pôles réels de $g(\lambda)$.

Cherchons les racines de l'équation

$$\frac{2s}{a} - \log_0 \frac{b+s}{b-s} = 0, \quad \text{pour } -b < s < b,$$

laquelle est équivalente à l'équation

$$(9.9) \quad e^{2s/a} = \frac{b+s}{b-s}.$$

Observons que la fonction $(b+s)/(b-s)$ de s croît de 0 à $+\infty$ dans $] -b, b[$ et que $e^{2s/a}$ est aussi croissante et positive dans cet intervalle. Toutes les deux prennent la valeur 1 pour $s = 0$ et les dérivées de ces fonctions au point 0 sont, respectivement, $2/b$ et $2/a$. Puisque $a < b$ ⁽⁵⁾, il s'ensuit que l'on a, dans un demivoisinage droit de 0,

$$e^{2s/a} > \frac{b+s}{b-s}.$$

Comme, d'autre part, $(b+s)/(b-s)$ tend vers $+\infty$ lorsque $s \rightarrow b$ et $e^{2s/a}$ prend la valeur $e^{2b/a}$ pour $s = b$, on aura

$$e^{2s/a} < \frac{b+s}{b-s}$$

dans un demivoisinage gauche de b . On en déduit qu'il existe une (et une seule) racine de (9.9) dans $]0, b[$. Nous la désignerons par s_0 .

Observons maintenant que, si l'on change s en $-s$ dans (9.9), on obtient

$$e^{-2s/a} = \frac{b-s}{b+s},$$

ce qui est équivalent à

$$e^{2s/a} = \frac{b+s}{b-s}.$$

Cela montre qu'il existe aussi une racine unique de (9.9) dans $] -b, 0[$ et que cette racine est $-s_0$.

Quant à la racine 0 de (9.9), elle est d'ordre 1 et, compte tenu de l'expression (9.8) de $g(\lambda)$, on voit qu'elle ne donne lieu à aucun pôle de $g(\lambda)$.

D'autre part, on voit aisément qu'il n'existe pas d'autres pôles de $g(\lambda)$.

En conclusion: le spectre de A est constitué par une *partie continue* (l'ensemble \bar{I} , réunion des intervalles $] -\infty, -b]$ et $[b, +\infty[$) et par une *partie discrète* (les points $-s_0, s_0$ de l'intervalle $] -b, b[$). L'origine n'appartient au spectre de A , puisque $s_0 \neq 0$.

(5) Dans le cas concret considéré, b représente la *section efficace totale* et a la *section efficace de diffusion*.

c) *Étude de la fonction* $(A - \lambda)^{-1}$. Désignons par J le spectre de A . On a donc $J = \bar{I} \cup \{-s_0, s_0\}$. Comme nous l'avons vu, pour tout $u \in U$ et tout $\lambda \in C \setminus J$, le vecteur $v = (A - \lambda)^{-1}u$ de U est donné par la formule

$$(9.10) \quad v(y) = \frac{u(y)}{y - \lambda} + \frac{yg(\lambda)}{y - \lambda} \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta - \lambda)} d\eta \quad (y \in I)$$

où

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{\frac{2\lambda}{a} - \log_0 \frac{b + \lambda}{b - \lambda}}.$$

La fonction $(A - \lambda)^{-1}$ de λ sera bornée dans un sous-ensemble H de $C \setminus J$, s'il existe un L positif tel que

$$\|(A - \lambda)^{-1}u\| < L \quad \text{pour tout } u \text{ tel que } \|u\| \leq 1 \text{ et tout } \lambda \in H.$$

Supposons $\|u\| \leq 1$ dans l'espace hilbertien U , c'est-à-dire,

$$\left(\int_I |u(\eta)|^2 \frac{d\eta}{\eta^2} \right)^{1/2} \leq 1.$$

Alors, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en tenant compte que, pour tout $\lambda \in C \setminus J$, la fonction $(\eta - \lambda)^{-1}$ de η est à carré sommable sur I , par rapport à la mesure $1/\eta^2$, on trouve, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left| \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta - \lambda)} d\eta \right| \leq \left(\int_I \frac{1}{\eta^2|\eta - \lambda|} d\eta \right)^{1/2} \leq \left(\int_I \frac{1}{\eta^2\varepsilon^2} d\eta \right)^{1/2} = \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{b}},$$

quel que soit λ tel que $\text{dist}(\lambda, I) \geq \varepsilon$. D'autre part, on a

$$\left\| \frac{u(y)}{y - \lambda} \right\| \leq \text{Max} \left| \frac{1}{y - \lambda} \right| \cdot \|u\| \leq \frac{1}{\varepsilon},$$

pour tout $y \in I$ et tout λ tel que $\text{dist}(\lambda, I) \geq \varepsilon$. Finalement, $g(\lambda)$ est une fonction méromorphe ayant uniquement les deux pôles simples $-s_0, s_0$; donc il existe aussi K positif tel que $|g(\lambda)| < K/\varepsilon$ pour tout λ tel que $\text{dist}(\lambda, s_0) \geq \varepsilon$ et $\text{dist}(\lambda, -s_0) \geq \varepsilon$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, désignons par J_ε l'ensemble des points de C dont la distance à J est plus petite que ε . D'après tout ce que nous venons de voir, nous pouvons conclure:

I. Pour tout $\lambda \in C \setminus J$, $(A - \lambda)^{-1}$ est une application linéaire bornée de U dans U .

II. La fonction $(A - \lambda)^{-1}$ de λ , à valeurs dans $L(U)$, est bornée sur $C \setminus J_\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, et à croissance lente sur $C \setminus J$ vers l'infini et vers l'axe réel.

On en déduit, compte tenu de ce que l'on a établi aux nos 5, 6 et 7:

THÉORÈME. Pour toute distribution f tempérée sur \mathbb{R} à valeurs dans U , il existe une et une seule distribution φ tempérée sur \mathbb{R} à valeurs dans U , qui vérifie l'équation de Boltzmann $(D + A)\varphi = f$ dans le cas considéré. La solution φ est donnée par

$$\varphi(x, y) = \int_{\mathbb{R}} E(x - \xi, A_y) f(\xi, y) d\xi$$

où $E(x, A)$ est l'image inverse de Laplace de $(\lambda + A)^{-1}$ qui peut être calculée au moyen de la formule

$$(9.11) \quad E(x, A) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_+^{-sx} \delta(s - A) ds - \int_{-\infty}^{-c} e_-^{-sx} \delta(s - A) ds,$$

où $0 < c < s_0$ et

$$\delta(s - A) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{A - (s + it)} - \frac{1}{A - (s - it)} \right],$$

au sens des distributions.

10. Expression analytique de la solution de l'équation de Boltzmann au moyen de vecteurs propres.

Nous avons vu dans l'introduction que l'opérateur A de Boltzmann admet le système de vecteurs propres

$$w(s, y) = y v p \frac{1}{y - s} + C(s) y \delta(s - y) \quad (y \in I),$$

où

$$(10.1) \quad C(s) = \frac{2s}{a} - \log \left| \frac{b + s}{b - s} \right| \quad \text{et}$$

$$w(s_0, y) = \frac{y}{y - s_0}, \quad w(-s_0, y) = \frac{y}{y + s_0}.$$

Nous chercherons à exprimer, dans ce n° 10, la solution de l'équation de Boltzmann, au moyen de ces vecteurs propres, sans tâcher de savoir si ce système est orthogonal et complet. D'ailleurs, cette question sera éclaircie par la suite et dans l'Appendice.

Reprenons les formules qui donnent $(A - \lambda)^{-1}$ dans le cas considéré:

$$(A - \lambda)^{-1} u(y) = \frac{u(y)}{y - \lambda} + \frac{y g(\lambda)}{y - \lambda} \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2 (\eta - \lambda)} d\eta \quad (y \in I)$$

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{\frac{2\lambda}{a} - \log_0 \frac{b + \lambda}{b - \lambda}}.$$

a) *Calcul de $\delta(s - A)$ dans un voisinage du spectre discret de A .* Comme $(A - \lambda)^{-1}$ est holomorphe dans $C \setminus J$, il est aisé de voir que $\delta(s - A)$ est nulle dans les intervalles $] -b, -s_0[$, $] -s_0, s_0[$ et $]s_0, b[$. Commençons par calculer la restriction de $\delta(s - A)$ à un voisinage de $\{-s_0, s_0\}$. À cet effet, observons que, si $F(\lambda)$ est une fonction de λ méromorphe dans une bande $|\operatorname{Re} \lambda - \alpha| \leq \varepsilon$, α étant le seul pôle de F (et pôle simple) dans cette bande et c le résidu de $F(\lambda)$ en α , on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0^+} [F(s + it) - F(s - it)] &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0^+} c \left[\frac{1}{s + it - \alpha} - \frac{1}{s - it - \alpha} \right] = \\ &= -c\delta(s - \alpha), \quad \text{dans }]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[. \end{aligned}$$

Rappelons d'autre part que, si $F(\lambda) = N(\lambda)/D(\lambda)$, $N(\lambda)$ et $D(\lambda)$ étant deux fonctions holomorphes de λ dans un voisinage de α , tels que α est un zéro simple de $D(\lambda)$ et $N(\alpha) \neq 0$, on a $c = N(\alpha)/D'(\alpha)$. Or, dans le cas de $(A - \lambda)^{-1}$, on doit prendre $\alpha = s_0$ [resp. $-s_0$], $0 < \varepsilon < b - s_0$ et

$$N(\lambda) = \frac{y\lambda}{y - \lambda} \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta - \lambda)} d\eta \quad (y \in I)$$

$$D(\lambda) = \frac{2\lambda}{a} - \log_0 \frac{b + \lambda}{b - \lambda}.$$

Puisque

$$D'(\lambda) = 2 \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{b^2 - \lambda^2} \right),$$

on aura, donc, dans l'intervalle $]s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon[$,

$$\begin{aligned} (10.2) \quad & \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{A - (s + it)} - \frac{1}{A - (s - it)} \right] u(y) = \\ &= \frac{y}{y - s_0} \cdot \frac{s_0}{2 \left(\frac{b}{b^2 - s_0^2} - \frac{1}{a} \right)} \cdot \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta - s_0)} d\eta \cdot \delta(s - s_0), \end{aligned}$$

pour tout $u \in U$ et $y \in I$. Quant à l'intervalle $] -s_0 - \varepsilon, -s_0 + \varepsilon[$, il suffit de remplacer, dans le résultat précédent, s_0 par $-s_0$. La distribution $\delta(s - s_0)$ [resp. $\delta(s + s_0)$] disparaîtra lorsqu'on fera le calcul de l'intégral définissant $E(x, A)$. Alors, pour la valeur propre s_0 , on obtiendra le terme

$$e_+^{-s_0 x} \cdot \frac{y}{y - s_0} \cdot \frac{s_0}{2 \left(\frac{b}{b^2 - s_0^2} - \frac{1}{a} \right)} \cdot \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta - s_0)} d\eta,$$

et, pour la valeur propre $-s_0$, le terme

$$e_-^{s_0 x} \cdot \frac{y}{y + s_0} \cdot \frac{s_0}{2 \left(\frac{b}{b^2 - s_0^2} - \frac{1}{a} \right)} \cdot \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2(\eta + s_0)} d\eta.$$

La partie de l'intégrale définissant $E(x, A)$ correspondante à l'intervalle $] -b, b[$ se réduit donc à la somme de ces deux termes provenant du spectre discontinu de A .

Il reste un seul point à éclaircir pour faire rentrer ce résultat dans le schéma esquissé au n° 8. D'après l'expression (10.1) le vecteur propre de A correspondant à s_0 est $y(y - s_0)^{-1}$. Alors, pour que l'intégrale contenue dans cette expression puisse être interprétée comme un produit interne de u par ce vecteur propre, on doit l'écrire

$$(10.3) \quad \int_I u(\eta) \frac{\eta}{\eta - s_0} \frac{d\eta}{\eta^3}.$$

Il s'agit donc de l'intégrale de Lebesgue de la fonction $u(y) y(y - s_0)^{-1}$ sur I , par rapport à la mesure dy/y^3 . Or, comme cette mesure est négative dans la partie $] -\infty, -b[$ de I , l'intégrale (10.3) ne définit plus une forme définie positive par rapport à cette mesure et on ne peut plus parler ici de « produit interne » au sens usuel. Mais cela n'a pas d'importance dans ce cas spécifique, une fois que le « produit interne » de chaque vecteur propre par lui-même – l'inverse du résidu de chacun des pôles $s_0, -s_0$ – est différent de zéro.

b) *Calcul de $\delta(s - A)$ dans un voisinage du spectre continu.* Choisissons ε tel que $s_0 < b - \varepsilon$ et désignons par I_ε la réunion des intervalles $] -\infty, -b + \varepsilon[$ et $]b - \varepsilon, +\infty[$. Alors de l'expression de $(A - \lambda)^{-1}$ on déduit, pour la restriction de $\delta(s - A)$ à I_ε :

$$(10.4) \quad \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{A - (s + it)} - \frac{1}{A - (s - it)} \right] u(y) = \\ = \delta(y - s) u(y) + 2\pi i \cdot y \delta^+(s - y) g^+(s) u^+(s) s^{-2} - \\ - 2\pi i \cdot y \delta^-(s - y) g^-(s) u^-(s) s^{-2}.$$

D'autre part, on a:

$$\frac{u^+(s)}{s^2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_I \frac{u(\eta)}{\eta^2 (\eta - s - it)} d\eta = \int_I \delta^+(s - \eta) u(\eta) \eta^{-2} d\eta^{(6)},$$

donc le « produit interne » de u par la distribution $\eta \delta^+(s - \eta)$ de η , ce produit étant interprété comme l'intégrale (maintenant au sens des distributions) du produit de $u(\eta)$ par $\eta \delta^+(s - \eta)$, par rapport à la mesure η^{-3} sur I .

Analoguement, $u^-(s) s^{-2}$ est le « produit interne » de $u(\eta)$ par la distribution $\eta \delta^-(s - \eta)$.

(6) Ce point sera étudié en détail dans d) à propos de la complétude du système $\omega(s, y)$.

Calculons maintenant $g^+(s)$ et $g^-(s)$, à partir de la formule

$$g(\lambda) = \frac{\lambda}{\frac{2\lambda}{a} - \log_0 \frac{b+\lambda}{b-\lambda}}.$$

En posant $\lambda = s + it$ et en faisant tendre t vers 0^+ (resp. 0^-), on trouve aisément pour $s \in I$

$$g^+(s) = \frac{s}{\frac{2s}{a} - \log \left| \frac{b+s}{b-s} \right| - \pi i} = \frac{s}{C(s) - \pi i}$$

et

$$g^-(s) = \frac{s}{C(s) + \pi i}$$

où

$$C(s) = \frac{2s}{a} - \log \left| \frac{b+s}{b-s} \right|.$$

L'expression que nous avons obtenu pour $\delta(s-A)u$ peut prendre une forme plus commode pour les calculs, en posant $u(y) = \int_I \delta(y-\eta) u(\eta) d\eta$

et en appliquant la propriété de multiplication des intégrales paramétriques de distributions (cf. [8]); compte tenu que $\delta(s-y)\delta(y-\eta)$, $\delta^+(s-y)$, $\delta^-(s-y)$ peuvent être interprétées comme fonctions indéfiniment différentiables de s dans I [$g^+(s)$ et $g^-(s)$ le sont aussi dans \bar{I}], on a dans \bar{I} :

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \delta(s-A)u(y) = \\ = \int_I [\delta(y-s)\delta(y-\eta) + 2\pi i y \delta^+(s-y)g^+(s)\delta^+(s-\eta)\eta^{-2} - \\ - 2\pi i y \delta^-(s-y)g^-(s)\delta^-(s-\eta)\eta^{-2}] u(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

En observant encore que ⁽⁷⁾

$$\delta(y-s)\delta(y-\eta) = \delta(y-s)\delta(s-\eta),$$

on se ramène à étudier l'expression

$$(10.6) \quad \begin{aligned} \delta(y-s)\delta(s-\eta) + 2\pi i y \delta^+(s-y)g^+(s)\delta^+(s-\eta)\eta^{-2} - \\ - 2\pi i y \delta^-(s-y)g^-(s)\delta^-(s-\eta)\eta^{-2} \quad (\text{pour } s \in \bar{I}). \end{aligned}$$

(7) On doit rappeler que $\varphi(x)\delta(x-a) = \varphi(a)\delta(x-a)$ lorsque φ est continue. Ici on peut considérer $\delta(y-\eta)$ comme fonction indéfiniment différentiable de y dont les valeurs sont des distributions de η . D'autre part, on a $\delta(s-\eta) = \delta(\eta-s)$. Tout cela est rigoureusement établi.

Rappelons que

$$\begin{aligned}\delta^+(x) - \delta^-(x) &= \delta(x) \\ \delta^+(x) + \delta^-(x) &= -\frac{1}{\pi i} \operatorname{vp} \frac{1}{x},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\delta^+(x) &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \operatorname{vp} \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \delta(x) \\ \delta^-(x) &= -\frac{1}{2\pi i} \cdot \operatorname{vp} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \delta(x).\end{aligned}$$

On en déduit, d'une part

$$\begin{aligned}2\pi i y \delta^+(s-y) g^+(s) \delta^+(s-\eta) \eta^{-2} &= \\ &= \frac{2\pi i}{\eta^2} \left[\frac{1}{4\pi^2} \operatorname{vp} \frac{1}{y-s} \frac{ys}{C(s)-\pi i} \operatorname{vp} \frac{1}{s-\eta} + \right. \\ &+ \frac{1}{4\pi i} \operatorname{vp} \frac{1}{y-s} \frac{ys}{C(s)-\pi i} \delta(s-\eta) - \\ &- \frac{1}{4\pi i} \delta(s-y) \frac{ys}{C(s)-\pi i} \operatorname{vp} \frac{1}{s-\eta} + \\ &\left. + \frac{1}{4} \delta(y-s) \frac{ys}{C(s)-\pi i} \delta(s-\eta) \right];\end{aligned}$$

et de l'autre

$$\begin{aligned}-2\pi i y \delta^-(s-y) g^-(s) \delta^-(s-\eta) \eta^{-2} &= \\ &= -\frac{2\pi i}{\eta^2} \left[-\frac{1}{4\pi^2} \operatorname{vp} \frac{1}{s-y} \frac{sy}{C(s)+\pi i} \operatorname{vp} \frac{1}{s-\eta} - \right. \\ &- \frac{1}{4\pi i} \operatorname{vp} \frac{1}{y-s} \frac{ys}{C(s)+\pi i} \delta(s-\eta) - \\ &- \frac{1}{4\pi i} \operatorname{vp} \frac{1}{\eta-s} \frac{ys}{C(s)+\pi i} \delta(s-y) + \\ &\left. + \frac{1}{4} \delta(y-s) \frac{ys}{C(s)+\pi i} \delta(s-\eta) \right].\end{aligned}$$

La somme de ces deux expressions donne

$$\begin{aligned}&- \operatorname{vp} \frac{1}{y-s} \frac{ys}{[C(s)]^2 + \pi^2} \operatorname{vp} \frac{1}{s-\eta} \eta^{-2} + \\ &+ \operatorname{vp} \frac{1}{y-s} \frac{ys C(s)}{[C(s)]^2 + \pi^2} \delta(s-\eta) \eta^{-2} - \\ &- \delta(y-s) \frac{ys C(s)}{[C(s)]^2 + \pi^2} \operatorname{vp} \frac{1}{s-\eta} \eta^{-2} - \\ &- \delta(y-s) \frac{ys\pi^2}{[C(s)]^2 + \pi^2} \delta(\eta-s) \eta^{-2}.\end{aligned}$$

Finalement, compte tenu que dans I, on a

$$\delta(y-s) \delta(s-\eta) = \delta(y-s) y s \delta(s-\eta) \eta^{-2},$$

la somme de $\delta(y-s) \delta(\eta-s)$ avec le dernier terme de l'expression précédente se réduit à

$$\delta(y-s) \frac{ys[C(s)]^2}{[C(s)]^2 + \pi^2} \delta(s-\eta) \eta^{-2}.$$

Alors, en posant

$$\gamma(s) = \frac{s}{[C(s)]^2 + \pi^2}$$

et en observant que $vp \frac{1}{s-\eta} = -vp \frac{1}{\eta-s}$ et $\delta(s-\eta) = \delta(\eta-s)$, l'expression (10.6) devient

$$\left[vp \frac{y}{y-s} + C(s) y \delta(s-y) \right] \gamma(s) \left[vp \frac{1}{\eta-s} + C(s) \delta(s-\eta) \right] \eta^{-2}.$$

Par substitution dans (10.5) on obtient, finalement, dans I (au dans \bar{I} , ce qui revient au même):

$$(10.7) \quad \delta(s-A) u(y) = \\ = \left[vp \frac{y}{y-s} + C(s) y \delta(s-y) \right] \gamma(s) \int_I \left[vp \frac{1}{\eta-s} + C(s) \delta(s-\eta) \right] u(\eta) \eta^{-2} d\eta$$

c) *Solution de l'équation en termes de vecteurs propres.* Nous avons déjà vu que l'expression

$$vp \frac{y}{y-s} + C(s) y \delta(y-s) \quad (y \in I)$$

définit un système $w(s, y)$ de vecteurs propres de A, pour tous les points s du spectre J de A.

Les résultats que nous venons d'obtenir suggèrent que ce système est *orthogonal* et *complet* et que l'on a précisément

$$(10.8) \quad \left\langle vp \frac{y}{y-s} + C(s) y \delta(y-s) \mid vp \frac{y}{y-s'} + C(s') y \delta(y-s') \right\rangle^* = \\ = \frac{[C(s)]^2 + \pi^2}{s} \delta(s-s'), \quad \text{pour } s, s' \in I$$

et

$$(10.9) \quad \left\langle \frac{y}{y \pm s_0} \mid \frac{y}{y \pm s_0} \right\rangle^* = \frac{2}{\pm s_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{b^2 - s_0^2} \right),$$

où le symbole $\langle \mid \rangle^*$ sert pour désigner le produit interne généralisé, tel que nous l'avons défini dans a) et b).

Nous démontrerons dans d) que ce système est complet. Quant au reste, cf. l'Appendice. Ici, notre propos essentiel est d'exprimer la solution de l'équation de Boltzmann

$$(10.10) \quad (D_x + A_y) \varphi(x, y) = f(x, y)$$

au moyen du système $w(s, y)$ de vecteurs propres.

Suivant le théorème 1, du n° 7 pour toute distribution $f(x, y)$ de x tempérée sur R à valeurs dans U , on a:

$$\varphi(x, y) = E(x, A_y) *_x f(x, y),$$

où

$$(10.11) \quad E(x, A_y) = \int_c^{+\infty} e_+^{-sx} \delta(s - A_y) ds - \int_{-\infty}^{-c} e_+^{-sx} \delta(s - A_y) ds \quad (0 < c < s_0).$$

Or, d'après les résultats précédents, on aura, maintenant,

$$(10.12) \quad \int_c^{+\infty} e_+^{-sx} \delta(s - A_y) f(x, y) ds = e_+^{-s_0 x} w(s_0, y) c_0 \int_1 w(s_0, \eta) f(x, \eta) \frac{d\eta}{\eta^3} + \\ + \int_b^{+\infty} e_+^{-sx} w(s, y) \gamma(s) \left[\int_1 w(s, \eta) f(x, \eta) \frac{d\eta}{\eta^3} \right] ds,$$

où $c_0 = \frac{-s_0}{2 \left(\frac{1}{a} - \frac{b^2}{b^2 - s_0^2} \right)}$; et de même pour l'intégrale entre $-\infty$ et $-c$.

Il s'agit toujours ici d'intégrales paramétriques convergentes sur R au sens des distributions. *Mais, d'après le théorème 2, n° 7, ces intégrales convergent pour tout $x \neq 0$, définissant une fonction analytique sur $R \setminus \{0\}$. Dans ce cas, on peut évidemment supprimer les signes « + » et « - » qui figurent comme indices de e^{-sx} .*

Il est encore à observer que, lors qu'il s'agit de calculer la convolution

$$E(x, A_y) *_x f(x, y) = \int_R E(x - \xi, A_y) f(\xi, y) d\xi,$$

on doit remplacer, dans de 2^d membre de (10.12) x par $x - \xi$ seulement dans l'exponentielle.

d) *Complétude du système de vecteurs propres considéré.* Comme nous l'avons observé à la fin du n° 8, nous aurions pu suivre ici la méthode heuristique des vecteurs propres. En admettant que l'expression

$$w(s, y) = vp \frac{y}{y-s} + C(s) y \delta(s-y), \quad \text{pour } s \in J,$$

définit un système de vecteurs propres de A , orthogonal et complet, et que l'on a (10.8) et (10.12), on est conduit à poser formellement, pour tout $u \in U$:

$$(10.13) \quad \frac{1}{A-\lambda} u = \frac{c_0}{s_0-\lambda} w(s_0, y) \int_I w(s_0, \eta) u(\eta) \eta^{-3} d\eta + \\ + \frac{c_0}{s_0+\lambda} w(-s_0, y) \int_I w(-s_0, \eta) u(\eta) \eta^{-3} d\eta + \\ + \int_I \frac{\gamma(s)}{s-\lambda} w(s, y) \left[\int_I w(s, \eta) u(\eta) \eta^{-3} d\eta \right] ds.$$

Il s'agirait maintenant de démontrer que:

- 1) Cette expression définit effectivement la fonction résolvante de A ;
- 2) Cette fonction est holomorphe dans $C \setminus J$, où $J = I \cup \{s_0, -s_0\}$, à croissance lente vers l'infini et vers l'axe réel.

À cet effet on pourrait exprimer $\delta(s-y)$ et $vp \frac{1}{s-y}$ dans $w(s, y)$ au moyen de $\delta^+(s-y)$ et $\delta^-(s-y)$, et de même pour $w(s, \eta)$. Alors on referait en ordre inverse les calculs développés dans b) et a) et on retrouverait l'expression (9.7) de $(A-\lambda)^{-1}$, pour laquelle serait plus facile de démontrer 1) et 2).

On pourrait aussi commencer par essayer de démontrer la complétude du système $w(s, y)$. Nous le ferons ici, parce que ce résultat nous intéresse pour les problèmes de frontière que nous étudierons au n° II.

Il s'agit de démontrer que l'on a, pour tout $u \in U$:

$$(10.14) \quad u(y) = c_0 w(s_0, y) \int_I w(s_0, \eta) u(\eta) \frac{d\eta}{\eta^3} - \\ - c_0 w(-s_0, y) \int_I w(-s_0, \eta) u(\eta) \frac{d\eta}{\eta^3} + \\ + \int_I \gamma(s) w(s, y) \left[\int_I w(s, \eta) u(\eta) \frac{d\eta}{\eta^3} \right] ds.$$

D'abord nous chercherons à démontrer que le 2^d membre définit une fonction de y appartenant à U . À cet effet, on doit employer la propriété suivante de la transformation de Stieltjes

*Si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $f^+, f^- \in L^2(\mathbb{R})$ et on a $f^+ = \delta^+ * f$, $f^- = \delta^- * f$, c'est-à-dire:*

$$(10.15) \quad f^+(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta^+(x-x') f(x') dx' \quad , \quad f^-(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta^-(x-x') f(x') dx'.$$

Démonstration. On sait que l'image inverse de Fourier de f^+ [resp. f^-] est égale à l'image inverse de Fourier $\hat{f}(\xi)$ de $f(x)$ pour $\xi > 0$ [resp. $\xi < 0$] et à zéro pour $\xi < 0$ [resp. $\xi > 0$]. Puisque $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ (théorème de Plancherel), il en sera de même pour $\mathcal{F}^{-1}f^+$ et $\mathcal{F}^{-1}f^-$, donc pour f^+ et f^- . D'autre part de la formule de Dirac, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-x') f(x') dx'$ et de ce qui précède, on déduit aisément (10.15).

On peut appliquer cette proposition dans (10.14), en observant d'abord

$$(10.16) \quad w(s, \eta) = \pi i [\delta^+(s - \eta) + \delta^-(s - \eta)] \eta + C(s) \delta(s - \eta) \eta.$$

Si l'on observe, en outre, que $C(s)$ est une fonction de s continue dans \bar{I} et qui tend vers $2s/a$ lorsque $s \rightarrow \infty$ et vers 0 lorsque s tend vers b ou $-b$ (donc bornée sur I), on voit que la dernière intégrale (qui peut être considérée comme une intégrale sur \mathbb{R} , dont la fonction intégrande est nulle dans $] -b, b[$) définit une fonction de la forme $\omega(s)/s^2$, où $\omega \in U$. Ensuite, le même raisonnement appliqué à l'intégrale par rapport à s dans (10.14), compte tenu de l'expression de $\gamma(s)$, montre que cette intégrale définit une fonction de y appartenant à U ⁽⁸⁾. Quant aux deux premiers termes du 2^d membre de (10.14), il définissent aussi des fonctions appartenant à U . Il reste à démontrer que la valeur du 2^d membre de (10.14) est effectivement $u(y)$.

On pourrait peut-être le faire directement. Mais il nous suffit d'appliquer ici la formule (10.13), qui est déjà démontrée par les raisonnements précédents. En faisant $\lambda = 0$ et en multipliant les deux membres par A , compte tenu que $A_s w(s, y) = s w(s, y)$ pour tout $s \in J$, on obtient justement (10.14).

En conclusion:

Le système de vecteurs propres $w(s, y)$ de A ($s \in J$, $y \in I$) est complet dans U par rapport au produit interne généralisé $\langle | \rangle^$ que l'on a défini dans a) et b).*

Il en découle que la fonction $E(x, A)$ de x à valeurs dans $L(U)$ est définie pour $x = 0$ et que, par suite, les intégrales paramétriques dans la formule (9.11) convergent sur \mathbb{R} au sens usuel par rapport à x , c'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Toutefois, nous verrons plus loin que cette fonction n'est pas continue au point 0.

e) Résolution de l'équation de Boltzmann sous la forme initiale.

Reprenons maintenant l'équation de Boltzmann sous la forme:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + b \Phi(x, \mu) - \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' = S(x, \mu)$$

(8) Ces intégrales sont donc convergentes au sens des distributions, et c'est ce point essentiellement, qu'il s'agissait de démontrer.

qui peut s'écrire aussi

$$D_x \Phi(x, \mu) + \frac{b}{\mu} \Phi(x, \mu) - \frac{a}{2\mu} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' = \frac{1}{\mu} S(x, \mu),$$

ou simplement

$$(10.17) \quad (D_x + B_\mu) \Phi(x, \mu) = \frac{1}{\mu} S(x, \mu)$$

en posant

$$B_\mu \Phi(x, \mu) = -\frac{a}{2\mu} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' + \frac{b}{\mu} \Phi(x, \mu).$$

Par le changement de variable $y = b/\mu$, on peut déduire la solution de cette équation de la solution obtenue pour $(D + A)\varphi = f$, en précisant l'espace où doivent se situer S et Φ . On a:

$$(10.18) \quad f\left(x, \frac{b}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu} S(x, \mu) \quad , \quad \varphi\left(x, \frac{b}{\mu}\right) = \Phi(x, \mu),$$

$$(10.19) \quad v p \frac{y}{y-s} = b v p \frac{1}{b-s\mu} \quad , \quad v p \frac{1}{y-s} = \mu v p \frac{1}{b-s\mu},$$

$$(10.20) \quad \delta(y-s) = \mu \delta(b-s\mu) \quad , \quad y \delta(s-y) = b \delta(b-s\mu).$$

Donc:

$$(10.21) \quad \int_I v p \frac{1}{s+\eta} f(x, \eta) \eta^{-2} d\eta = \int_{-1}^1 v p \frac{1}{b-s\mu'} S(x, \mu') b^{-1} d\mu'$$

$$(10.22) \quad \int_I \delta(y-s) f(x, \eta) \eta^{-2} d\eta = \int_{-1}^1 \delta(b-s\mu') S(x, \mu') b^{-1} d\mu'.$$

De (10.18) on déduit que, si $f(x, y)$ représente une distribution de x tempérée sur R à valeurs dans l'espace U des fonctions de y à carré sommable sur I par rapport à la mesure y^{-2} , alors $S(x, \mu)$ représente une distribution de x tempérée sur R à valeurs dans l'espace (que nous désignerons par \tilde{U}) des fonctions de μ qui, divisées par μ , sont à carré sommable sur $[-1, 1]$; et réciproquement. D'autre part, en tenant compte de (10.18) et (10.20), on voit aussitôt que, au système de vecteurs propres de A

$$w(s, y) = y v p \frac{1}{y-s} + C(s) y \delta(s-y) \quad (y \in I),$$

correspond le système de vecteurs propres de B

$$\omega(s, \mu) = v p (b-s\mu)^{-1} + C(s) \delta(b-s\mu) \quad (\mu \in [-1, 1]),$$

où l'on a supprimé le facteur commun b , qui disparaît dans les intégrales du 2^d membre de (10.21) et (10.22). Le spectre est évidemment le même dans les

deux cas, $J = I \cup \{s_0, -s_0\}$. D'autre part, le changement de variable $y = b/\mu$ ramène l'intégration par rapport à la mesure dy/y^3 sur I à l'intégration par rapport à la mesure $\mu' d\mu'$ sur $[-1, 1]$. On aura donc, par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{1}{B-\lambda} v(\mu) &= \frac{c_0}{s_0-\lambda} \omega(s_0, \mu) \int_{-1}^1 \omega(s_0, \mu') v(\mu') \mu' d\mu' + \\ &+ \frac{c_0}{s_0+\lambda} \omega(s_0, \mu) \int_{-1}^1 \omega(s_0, \mu') v(\mu') \mu' d\mu' + \\ &+ \int_1^\infty \frac{\gamma(s)}{s-\lambda} \omega(s, \mu) \left[\int_{-1}^1 \omega(s, \mu') v(\mu') \mu' d\mu' \right] ds, \end{aligned}$$

pour tout $v \in \tilde{U}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus J$.

D'ailleurs le système $\omega(s, \mu)$ est complet dans \tilde{U} par rapport au produit interne généralisé $\langle | \rangle^*$.

Tout cela concorde, formellement, avec les résultats obtenus par LAFORE et MILLOT, en ce qui concerne l'analyse spectrale de l'opérateur B . Le point faible de ce travail et d'autres semblables regarde la façon d'obtenir la solution de (10.17) à partir de ces résultats.

D'après tout ce qui précède, pour toute distribution $S(x, \mu)$ de x tempérée sur \mathbb{R} à valeurs dans \tilde{U} , il existe une et une seule solution $\Phi(x, \mu)$ dans le même espace de distributions, donnée par la formule

$$\begin{aligned} \Phi(x, \mu) &= E(x, B_\mu) *_x \left[\frac{1}{\mu} S(x, \mu) \right] = \\ &= \int_{\mathbb{R}} E(x-\xi, B_\mu) \frac{1}{\mu} S(\xi, \mu) d\xi, \end{aligned}$$

où

$$E(x, B_\mu) = \int_c^{+\infty} e_+^{-sx} \delta(s - B_\mu) ds - \int_{-1}^{-c} e_-^{-sx} \delta(s - B_\mu) ds \quad (0 < c < s_0).$$

En termes de vecteurs propres, on aura par exemple

$$\begin{aligned} \int_c^{+\infty} e_+^{-sx} \delta(s - B_\mu) \frac{1}{\mu} S(x, \mu) ds &= e_+^{-s_0 x} \omega(s_0, \mu) c_0 \int_{-1}^1 \omega(s_0, \mu') S(x, \mu') d\mu' + \\ &+ \int_1^\infty e_+^{-sx} \omega(s, \mu) \gamma(s) \left[\int_{-1}^1 \omega(s, \mu') S(x, \mu') d\mu' \right] ds, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

II. Problèmes de frontière.

Dans le susdit article [I] les auteurs commencent par essayer de résoudre l'équation homogène $(D + B) \Phi = 0$, en supposant connue $\Phi(0, \mu)$. Cherchons à poser ce problème d'une façon plus précise:

Désignons par \tilde{V} l'ensemble des éléments v de \tilde{U} auxquels peut s'appliquer l'opérateur B et tels que $Bv \in \tilde{U}$, c'est-à-dire, posons

$$\tilde{V} = B^{-1} \tilde{U}.$$

Rappelons que B est défini par la formule:

$$Bv(\mu) = \frac{b}{\mu} v(\mu) - \frac{a}{2\mu} \int_{-1}^1 v(\mu') d\mu',$$

On arrive alors au problème suivant:

PROBLÈME I. *Étant donné $v_0 \in \tilde{V}$, déterminer une distribution tempérée $\Phi_0(x, \mu)$ de x dans $]0, +\infty[$ à valeurs dans \tilde{U} , telle que l'on ait*

$$(II.1) \quad (D_x + B_\mu) \Phi_0(x, \mu) = 0 \quad \text{dans }]0, +\infty[$$

et

$$(II.2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi_0(x, \mu) = v_0(\mu),$$

au sens de la norme $\|\cdot\|$ de \tilde{U} .

Évidemment, dans un problème de ce genre, on sousentend que la source $S(x, \mu)$ est nulle dans l'intervalle $]0, +\infty[$. Alors, la distribution $\Phi(x, \mu)$ de x à valeurs dans \tilde{U} tempérée sur \mathbb{R} telle que

$$(D_x + B_\mu) \Phi(x, \mu) = \frac{1}{\mu} S(x, \mu)$$

(donc à valeurs dans \tilde{V}), devient une fonction analytique sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans \tilde{U} (d'après le théorème 2, n° 7). Donc si l'on désigne par $\Phi_+(x, \mu)$ la fonction de x égale à $\Phi(x, \mu)$ dans $]0, +\infty[$ et à zéro dans $] -\infty, 0]$, on aura, comme il est aisé de voir:

$$(D_x + B_\mu) \Phi_+(x, \mu) = \Phi(0^+, \mu) \delta(x)$$

et

$$\Phi(0^+, \mu) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x, \mu) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi_0(x, \mu) = v_0(\mu).$$

Nous avons ainsi remplacé la source réelle $S(x, \mu)$ par la source fictive $\mu \Phi(0^+, \mu) \delta(x)$ pour obtenir la distribution $\Phi_+(s, \mu)$ de x , dont $\Phi_0(x, \mu)$ sera la restriction à $]0, +\infty[$.

En observant que

$$E(x, B_\mu) *_x [\Phi(o^+, \mu) \delta(x)] = E(x, B_\mu) \Phi(o^+, \mu),$$

on devra donc avoir, pour $x > 0$:

$$(11.3) \quad \Phi_+(x, \mu) = \Phi_0(x, \mu) = e^{-s_0 x} c_0 \omega(s_0, \mu) \int_{-1}^1 \omega(s_0, \mu') v_0(\mu') \mu' d\mu' + \\ + \int_b^{+\infty} e^{-xs} \gamma(s) \omega(s, \mu) \left[\int_{-1}^1 \omega(s, \mu') v_0(\mu') \mu' d\mu' \right] ds.$$

La fonction $\Phi_0(x, \mu)$ de x à valeurs dans \tilde{U} définie par cette expression dans $]0, +\infty[$ vérifie évidemment l'équation (11.1). Il reste à voir qu'elle vérifie aussi la condition (11.2).

En faisant tendre x vers o^+ , on obtient, au moins formellement,

$$\Phi_0(o^+, \mu) = c_0 \omega(s_0, \mu) \int_{-1}^1 \omega(s_0, \mu') v_0(\mu') \mu' d\mu' + \\ + \int_b^{+\infty} \gamma(s) \omega(s, \mu) \left[\int_{-1}^1 \omega(s, \mu') v_0(\mu') d\mu' \right] ds.$$

Or, dans cette expression, il manque la partie de la représentation spectrale de v_0 correspondante à $s < 0$. Cela veut dire que l'on peut avoir $\Phi_0(o^+, \mu) = v_0(\mu)$, seulement si on a

$$c_0 \omega(-s_0, \mu) \int_{-1}^1 \omega(-s_0, \mu') v_0(\mu') \mu' d\mu' + \\ + \int_b^{-\infty} \gamma(s) \omega(s, \mu) \left[\int_{-1}^1 \omega(s, \mu') v_0(\mu') \mu' d\mu' \right] ds = 0.$$

Donc v_0 ne peut pas être choisi arbitrairement dans \tilde{V} . Mais on devait s'y attendre; en effet, puisque la distribution $\Phi(x, \mu)$ de x sur R déterminée par la source $S(x, \mu)$ est donnée par la formule

$$\Phi(x, \mu) = E(x, B_\mu) *_x \left[\frac{1}{\mu} S(x, \mu) \right]$$

il est aisé de voir que, si $\Phi(x, \mu)$ est nulle pour $x > 0$, la partie de la représentation spectrale de $\Phi(x, \mu)$ correspondante à $s < 0$, donnée par cette formule, est nécessairement nulle pour tout $x > 0$ et il en doit être donc de même pour la limite de $\Phi(x, \mu)$ lorsque $x \rightarrow o^+$.

Pour éclaircir ce point, rappelons que la fonction résolvante de B , $(B - \lambda)^{-1}$, est l'image de Stieltjes de la distribution $\delta(s - B)$ à valeurs dans $L(\tilde{U})$, c'est-à-dire

$$\frac{1}{B - \lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{\delta(s - B)}{s - \lambda} ds$$

et que $\delta(s - B)$ est nulle dans un voisinage de zéro.

Posons alors

$$(B^{-1})^+ = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} s^{-1} \delta(s - B) ds, \quad (B^{-1})^- = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 s^{-1} \delta(s - B) ds.$$

[Ces formules peuvent être aisément explicitées au moyen du système $\omega(s, \mu)$ de vecteurs propres].

Posons d'autre part

$$\begin{aligned} \tilde{V}^+ &= (B^{-1})^+ \tilde{U}^+, & \tilde{V}^- &= (B^{-1})^- \tilde{U}^-, \\ \tilde{U}^+ &= B \tilde{V}^+, & \tilde{U}^- &= B \tilde{V}^-. \end{aligned}$$

On aura évidemment

$$\tilde{V} = \tilde{V}^+ \oplus \tilde{V}^-, \quad \tilde{U} = \tilde{U}^+ \oplus \tilde{U}^-$$

et on voit que les éléments de \tilde{U}^+ [resp. \tilde{U}^-] sont précisément les éléments de \tilde{U} dont la partie de la représentation spectrale correspondante à $s < 0$ [resp. $s > 0$] est nulle.

Cela posé, nous pouvons dire, d'une façon précise, que si $S(x, \mu) = 0$ pour $x > 0$, $\Phi(x, \mu)$ est une fonction à valeurs dans \tilde{V}^+ pour tout $x > 0$ et que, pour cette raison, la fonction v_0 doit être prise dans \tilde{V}^+ .

Il reste à voir si la fonction $\Phi_0(x, \mu)$ de x donnée par (11.3) tend effectivement vers $v_0(\mu)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. Quant au premier terme, il n'y a pas de difficulté. Quant à l'intégrale entre b et $+\infty$, une analyse semblable à celle que l'on a fait à la fin du n° 10, pour démontrer la complétude du système $w(s, \gamma)$, montre que ce terme représente une fonction de la forme $e^{-s\mu} \tilde{u}(\mu)$, où $\tilde{u} \in \tilde{U}$. Alors on a

$$\|(e^{-s\mu} - 1) \tilde{u}(\mu)\| \leq |e^{-b\mu} - 1| \|\tilde{u}\| \rightarrow \|\tilde{u}\|, \quad \text{lorsque } \mu \rightarrow 0^+, \quad \text{c.q.f.d.}$$

En conclusion:

THÉORÈME 1. Pour tout élément $v_0 \in \tilde{V}^+$ il existe une et une seule distribution tempérée $\Phi_0(x, \mu)$ définie dans $]0, +\infty[$ à valeurs dans \tilde{U} telle que

$$(D_x + B_\mu) \Phi_0(x, \mu) = 0 \quad \text{dans }]0, +\infty[$$

et qui tend vers v_0 par rapport à la norme $\|\cdot\|$ de \tilde{U} lorsque $x \rightarrow 0^+$. Cette distribution est une fonction analytique de x dans $]0, +\infty[$ à valeurs dans \tilde{U} (et

plus précisément dans \tilde{V}^+), donnée par la formule

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, \mu) = & e^{-s_0 x} c_0 \omega(s_0, \mu) \int_{-1}^{+1} \omega(s_0, \mu') v_0(\mu') \mu' d\mu' + \\ & + \int_b^{+\infty} e^{-sx} \gamma(s) \omega(s, \mu) \left[\int_{-1}^{+1} \omega(s, \mu') v_0(\mu') \mu' d\mu' \right] ds \end{aligned}$$

qui peut être abrégée symboliquement en écrivant

$$\Phi_0(x, \mu) = e^{-x B_\mu} v_0(\mu) \quad \text{pour } x > 0.$$

REMARQUES. I) Il est aisé de voir maintenant que $E(x, B)$ représente un semigroupe continue (et même analytique) d'opérateurs appartenant à $L(\tilde{V}^+)$ [resp. $L(\tilde{V}^-)$] pour $x > 0$ [resp. $x < 0$] et qu'il est naturel de poser $E(x, B) = e^{-x B}$ dans ces cas.

II) On comprend maintenant pourquoi les termes correspondants à $s < 0$ de la solution trouvée par LAFORE et MILLOT [1] n'introduisent pas d'erreur dans la pratique: $\Phi(0, \mu)$ appartient nécessairement à \tilde{V}^+ (si l'on cherche la solution pour $x > 0$). Mais si l'on se donne arbitrairement v_0 comme valeur de $\Phi(0, \mu)$, la solution est erronée.

Il est naturel de poser encore un problème de frontière dans un intervalle borné:

PROBLÈME II. Étant donnés $a > 0$ et $v_0, v_a \in \tilde{V}$ déterminer une distribution $\Phi_{0,a}(x, \mu)$ de x définie dans $]0, a[$ à valeurs dans \tilde{U} telle que

$$\begin{aligned} (D_x + B_\mu) \Phi_{0,a}(x, \mu) &= 0 \quad \text{dans }]0, a[\\ (11.4) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi_{0,a}(x, \mu) &= v_0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \Phi_{0,a}(x, \mu) = v_a \quad \text{dans } \tilde{U}. \end{aligned}$$

Pour donner un sens concret à ce problème on doit sousentendre l'existence d'une source $S(x, \mu)$ inconnue, qui soit nulle dans $]0, a[$. En désignant par $\Phi(x, \mu)$ la distribution tempérée sur R à valeurs dans \tilde{U} telle que

$$(11.5) \quad (D_x + B_\mu) \Phi(x, \mu) = \frac{1}{\mu} S(x, \mu),$$

cette distribution devient une fonction analytique dans $]0, a[$. Désignons par $\Phi_*(x, \mu)$ la fonction de x à valeurs dans \tilde{U} égale à $\Phi(x, \mu)$ dans $]0, a[$ et à zéro dans $R \setminus]0, a[$. Alors on déduit de (10.5)

$$(D_x + B_\mu) \Phi_*(x, \mu) = v_0 \delta(x) + v_a \delta(x - a).$$

Donc, s'il existe une solution du problème II, elle est nécessairement la restriction de $\Phi_*(x, \mu)$ à $]0, a[$ et, par suite, elle est donnée par la formule symbolique

$$(11.6) \quad \Phi_0(x, \mu) = e^{-x B} v_0(\mu) + e^{-(x-a) B} v_a(\mu) \quad (\text{pour } 0 < x < a).$$

Mais il en résulte que v_0 et v_a ne peuvent pas être données arbitrairement dans \tilde{V} . En effet, pour que les conditions (11.4) soient vérifiées, on doit avoir

$$e^{aB} v_a = 0, \quad e^{-aB} v_0 = 0,$$

donc $e^{-x_B} v_0 = 0$ pour $x > 0$ et $e^{-x_B} v_a = 0$ pour $x < a$. Il s'ensuit que l'on doit avoir, d'autre part, $v_0 \in \tilde{V}^+$ et $v_a \in \tilde{V}^-$.

Maintenant, il est aisé de voir que, réciproquement, si v_0 et v_a vérifient ces conditions, la formule (11.6) donne, effectivement, la solution (unique) du problème. En conclusion:

THÉORÈME 2. *Pour que le problème II soit possible, il faut et il suffit que v_0 et v_a vérifient les conditions*

$$v_0 \in \tilde{V}^+, \quad v_a \in \tilde{V}^-, \quad e^{-aB} v_0 = e^{aB} v_a = 0.$$

Si ces conditions sont vérifiées, le problème admet une et une seule solution, donnée par la formule (11.6), qui définit une fonction analytique de x sur $]0, a[$ à valeurs dans \tilde{U} . En particulier, si 0 et a n'appartiennent pas au support de $S(x, \mu)$, $\Phi_{0,a}(x, \mu)$ tend vers v_0 (resp. v_a) lorsque $x \rightarrow 0^+$ (resp. $x \rightarrow a^-$) au sens usuel.

APPENDIX

Démonstration de l'orthogonalité et calcul des coefficients de normalisation des vecteurs propres de A. Pour démontrer l'orthogonalité et calculer les coefficients de normalisation des vecteurs propres de l'opérateur B considéré, il suffit de le faire pour l'opérateur A que nous avons déduit de B par changement de variable. Rappelons de nouveau l'expression du système de vecteurs propres de A que nous avons utilisé

$$w(s, y) = v p \frac{y}{y-s} + C(s) y \delta(y-s), \quad \text{pour } s \in J$$

où

$$C(s) = \frac{2s}{a} - \log \left| \frac{b+s}{b-s} \right|.$$

Il s'agit donc essentiellement de calculer, par rapport à y ,

$$(A.1) \quad \langle w(s, y) | w(s', y) \rangle^* \quad \text{pour } s, s' \in J.$$

Nous commencerons par la partie continue I du spectre de A. Dans le développement de (A.1) on trouve quatre termes dont l'un est

$$\begin{aligned} & \langle C(s) y \delta(y-s) | C(s') y \delta(y-s') \rangle^* = \\ &= \int_I y \delta(y-s) C(s) C(s') y \delta(y-s') \frac{dy}{y^3} = \\ &= \frac{[C(s)]^2}{s} \delta(s-s'). \end{aligned}$$

Il reste à calculer

$$(A.2) \quad \int_I v p \frac{1}{y-s} v p \frac{1}{y-s'} \frac{dy}{y} + \int_I v p \frac{1}{y-s} C(s') \delta(y-s') \frac{dy}{y} + \\ + \int_I C(s) \delta(y-s) v p \frac{1}{y-s'} \frac{dy}{y}.$$

À cet effet, nous utiliserons la formule

$$(A.3) \quad v p \frac{1}{x-h} = \pi i \delta(x-h) - 2\pi i \delta^+(x-h),$$

en observant que deux distributions f, g dont les composantes inférieures, f^- et g^- , de l'image de Stieltjes [9] sont nulles, sont multipliables et leur produit a pour composante supérieure le produit de leurs composantes supérieures et pour composante inférieure zéro. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, dans ce cas, les images inverses de Fourier \hat{f} et \hat{g} sont des distributions nulles à gauche de l'origine et que, par suite $\hat{f} * \hat{g}$ existe et est nulle à gauche de l'origine, d'où l'on déduit qu'il existe aussi $fg = \mathcal{F}(\hat{f} * \hat{g})$ et que l'on a $(fg)^+ = f^+ g^+$, $(fg)^- = 0$. (On a évidemment une propriété analogue pour les distributions f, g ayant des composantes supérieures f^+, g^+ de l'image de Stieltjes égales à zéro).

En rappelant que $v p (y-s')^{-1} = -v p (s'-y)^{-1}$, on a donc, d'après (A.3),

$$v p (s'-y)^{-1} = -\pi i \delta(y-s') + 2\pi i \delta^+(y-s').$$

Alors le premier terme (A.2) devient

$$(A.4) \quad \int_I v p \frac{1}{y-s} v p \frac{1}{y-s'} \frac{dy}{y} = -4\pi^2 \int_I \delta^+(y-s) \delta^+(y-s') \frac{dy}{y} + \\ + 2\pi^2 \int_I \delta(y-s) \delta^+(y-s') \frac{dy}{y} + 2\pi^2 \int_I \delta^+(y-s) \delta(y-s') \frac{dy}{y} - \\ - \pi^2 \int_I \delta(y-s) \delta(y-s') \frac{dy}{y}.$$

Or on trouve immédiatement

$$(A.5) \quad \pi^2 \int_I \delta(y-s) \delta(y-s') \frac{dy}{y} = \frac{\pi^2}{s} \delta(s-s').$$

D'autre part:

$$(A.6) \quad \int_I \delta^+(y-s) \delta(y-s') \frac{dy}{y} + \int_I \delta(s-y) \delta^+(y-s') \frac{dy}{y} = \\ = \frac{1}{s'} \delta^+(s'-s) + \frac{1}{s} \delta^+(s-s').$$

Quant au premier terme de (A.4) on obtient, dans le demiplan $\text{Im } \lambda > 0$ (cf. n° 9):

$$\int_I \frac{1}{y-\lambda} \frac{1}{y-\lambda'} \frac{dy}{y} = \frac{1}{\lambda-\lambda'} \left(\frac{1}{\lambda} \log_0 \frac{b+\lambda}{b-\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \log_0 \frac{b+\lambda'}{b-\lambda'} \right)$$

d'où, en passant à la limite lorsque $\text{Im } \lambda \rightarrow 0^+$ et $\text{Im } \lambda' \rightarrow 0^+$,

$$(A.7) \quad -4\pi^2 \int_I \delta^+(y-s) \delta^+(y-s') \frac{dy}{y} = \\ = -2\pi i \cdot \delta^+(s-s') \left(\frac{1}{s} \log \left| \frac{b+s}{b-s} \right| - \frac{1}{s'} \log \left| \frac{b+s'}{b-s'} \right| + \frac{\pi i}{s'} - \frac{\pi i}{s} \right).$$

Calculons maintenant le second et le troisième termes de (A.2). On a:

$$\int_I \left[v p \frac{1}{y-s} C(s') \delta(y-s') + v p \frac{1}{y-s'} C(s) \delta(y-s) \right] \frac{dy}{y} = \\ = -2\pi i \int_I \left[\delta^+(y-s) C(s') \delta(y-s') + \delta^+(y-s') C(s) \delta(y-s) \right] \frac{dy}{y} + \\ + \pi i \int_I \left[\delta(y-s) C(s') \delta(y-s') + \delta(y-s') C(s) \delta(y-s) \right] \frac{dy}{y} = \\ = 2\pi i \frac{C(s)}{s} \delta(s-s') - 2\pi i \frac{C(s')}{s'} \delta^+(s'-s) - 2\pi i \frac{C(s)}{s} \delta^+(s-s').$$

Alors, compte tenue de tous les résultats précédents, on a, en conclusion:

$$\langle w(s, y) | w(s', y) \rangle^* = \frac{[C(s)]^2 + \pi^2}{s} \delta(s-s'),$$

pour $s, s' \in I$, comme l'on avait prévu:

Il reste à calculer ce produit interne pour les valeurs s_0 et $-s_0$ de s . Rappelons que

$$w(s_0, y) = \frac{1}{y-s_0} \quad , \quad w(-s_0, y) = \frac{1}{y+s_0} \quad (y \in I)$$

Il est aisé de voir que

$$\langle w(s_0, y) | w(-s_0, y) \rangle = 0.$$

D'autre part, on trouve par des calculs élémentaires

$$\int_I \frac{dy}{(y-s_0)^2 y} = -\frac{1}{s_0^2} \log \left| \frac{b+s_0}{b-s_0} \right| + \frac{1}{s_0} \frac{2b}{b^2-s_0^2}.$$

Compte tenue que s_0 est une des racines de l'équation

$$\log \left| \frac{b+s}{b-s} \right| - \frac{2s}{a} = 0,$$

on en déduit

$$\langle w(s_0, y) | w(s_0, y) \rangle^* = \frac{2}{s_0} \left(\frac{b}{b^2 - s_0^2} - \frac{1}{a} \right).$$

Analoguement

$$\langle w(-s_0, y) | w(-s_0, y) \rangle^* = -\frac{2}{s_0} \left(\frac{b}{b^2 - s_0^2} - \frac{1}{a} \right).$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] LAFORE et MILLOT, *Étude de l'équation de Boltzmann à une dimension, la perte d'énergie par choc élastique étant négligée*, « Industries Atomiques », 9/10 (1958).
- [2] BARDOS, *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Théorèmes d'approximation et applications à l'équation de transport*, « Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure », 3 (1970), 185-273.
- [3] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Sobre a equação de difusão de neutrões*, « Memórias da Academia das Ciências de Lisboa », 10 (1966), 263-275.
- [4] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables à spectre vide ou non borné*, « Annali di Matematica Pura ed Applicata » (4), 58 (1962), 219-275.
- [5] F. SEQUEIRA, J. OLIVEIRA et A. FERREIRA, *Étude de l'équation de Boltzmann du transport de neutrons, I*, Laboratório de Física e Engenharia Nucleares, Sacavém, Portugal 1968.
- [6] K. CASE et P. ZWEIFEL, *Linear transport theory*, Addison-Wesley Publishing Co.
- [7] F. DI PASQUANTONIO et J. LAVOINE, Communication privée, 7 avril 1971.
- [8] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Integrals and orders of growth of distributions. Theory of distributions*, International Summer Institute in Lisbon 1964, 327-390.
- [9] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Les séries de multipôles des physiciens et la théorie des ultradistributions*, « Math. Annalen », 174 (1967), 109-142.

