

PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 19

1 9 6 0

Publicação subsidiada por

Publication subventionnée par

Publication sponsored by

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA, SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
e FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Edição de

«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua Nova da Trindade, 1, 5.º-S
LISBOA-2 (PORTUGAL)

HERMANN & C.^{ie}, Editeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5^{eme})

SUR LA DEFINITION ET LA STRUCTURE DES DISTRIBUTIONS VECTORIELLES *

PAR J. SEBASTIÃO E SILVA

(*Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa*)

1. Introduction et plan général. M. L. SCHWARTZ appelle distributions vectorielles (i. e., à valeurs dans un espace vectoriel E) les applications linéaires continues de l'espace \mathcal{D} (des fonctions numériques indéfiniment dérivables à support borné) dans l'espace E . C'est là une définition synthétique, immédiate, mais elle est à l'origine d'une théorie difficile, qui a exigé la mise en oeuvre de puissantes ressources de l'analyse fonctionnelle moderne (voir [12] et [5], dans la Bibliographie). Comme les distributions vectorielles interviennent couramment dans les importantes recherches de M. SCHWARTZ et de ses élèves sur les équations aux dérivées partielles et sur d'autres types d'équations fonctionnelles, la lecture de ces travaux est rendue de ce fait assez difficile pour la plupart des physiciens et, même, des mathématiciens.

Il nous a semblé donc utile de généraliser au cas des distributions vectorielles les méthodes plus directes que nous avons employées dans notre «Construction axiomatique de la théorie des distributions» [16]. Toutefois cet article, dont l'un des buts était justement de rendre plus accessible la théorie des distributions scalaires, a été écrit beaucoup plus comme un travail de recherche que comme un exposé didactique, ce qui rend peu commode sa lecture, en masquant, par une formulation un peu trop abstraite ⁽¹⁾, le caractère foncièrement élémentaire et facile de cette construction: c'est pourquoi nous exposons ici des préliminaires assez détaillés (n.º 2); le lecteur moins informé y trou-

* Reçu Octobre 1959. La première partie de ce travail avait déjà été publiée en polycopie, sous le titre «Sur la définition et la structure des distributions vectorielles» (Publicações do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, 1958).

(1) Récemment nous avons pu trouver l'avantage de ce point de vue abstrait (cf. [20] et [21]).

vera tout l'essentiel de la théorie algébrique des distributions, généralisée au cas des distributions vectorielles⁽¹⁾.

En rédigeant l'article [16], nous nous étions déjà aperçu que les mêmes méthodes pourraient s'appliquer au cas des distributions vectorielles. *Une seule difficulté essentielle se présentait dans ce cas*: tandis que toute distribution scalaire s'exprime, localement, comme dérivée généralisée, d'ordre fini, d'une fonction continue, cela n'est plus vrai, en général, pour les distributions vectorielles. Cependant M. A. GROTHENDIECK [4] s'était trouvé devant une difficulté exactement analogue, dans la recherche des applications linéaires continues de certains espaces de fonctions holomorphes, dans un espace localement convexe E (complet), et il l'a résolue au moyen de sa notion de « fonction holomorphe au sens large à valeurs dans E ». Il ne s'agit plus là de vraies fonctions à valeurs dans E , mais de fonctions à valeurs dans des espaces de Banach E_α , dont E se compose (comme sous-espace du produit des E_α); mais cette désignation est suggestive et, au fond, naturelle.

Donc, nous n'avons qu'à suivre un chemin tout à fait parallèle: les distributions T *au sens large*, telles que nous les définissons ici (n.º 6), résolvent, d'une façon naturelle et directe, *le problème de la détermination des applications linéaires continues des espaces \mathcal{D} , C^∞ , etc. dans un espace localement complet E ; deux formules simples établissent alors une correspondance biunivoque $\Theta \leftrightarrow T$ entre ces applications Θ et ces distributions T* (voir théorèmes 4.1 et 7.1). Comme conséquence de ces théorèmes on retrouve, d'une façon presque élémentaire, le célèbre «théorème des noyaux» de SCHWARTZ (n.º 10).

Il conviendra de commencer par donner ici un aperçu de cette orientation. Soit d'abord E un espace de Banach et considérons l'espace \mathcal{D}_K des fonctions *numériques* $\varphi(x)$ d'une variable, indéfiniment dérivables et *nulles en dehors d'un intervalle borné* $K=[a, b]$. On démontre alors (th. 4.1) que l'expression générale des applications linéaires continues Θ de \mathcal{D}_K dans E est:

$$(1.1) \quad \Theta\varphi = (-1)^n \int_a^b f(x\Theta\varphi^n)(x) dx, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}_K,$$

(1) Les démonstrations de cette théorie algébrique deviennent ici superflues, une fois que l'existence et les règles de calcul des distributions définies formellement découlent immédiatement du modèle fonctionnel isomorphe.

où f est une fonction continue dans $[a, b]$, à valeurs dans E , et n un entier ≥ 0 , le couple (f, n) dépendant de Θ (mais pas de façon univoque). En particulier, il se peut que la fonction f soit n fois continûment différentiable; alors, en intégrant par parties, la formule (1.1) peut s'écrire plus simplement:

$$(1.2) \quad \Theta \varphi = \int_a^b f^{(n)}(x) \varphi(x) dx,$$

puisque φ s'annule, ainsi que toutes ses dérivées, aux points a, b . Dans ce cas, l'application Θ est représentée par la seule fonction continue $F = f^{(n)} = D^n f$.

Dans le cas opposé, la formule (1.2) n'est plus applicable, la dérivée $f^{(n)}$ de f n'existant pas comme fonction. Mais on peut convenir de désigner par $f^{(n)}$ la classe de tous les couples possibles $(f_1, n_1), (f_2, n_2), \dots$, constitués par une fonction continue dans K à valeurs dans E et par un entier ≥ 0 , qui déterminent, d'après (1.1), la même application $\Theta^{(1)}$; et cette classe de couples (f, n) , que l'on pourra nommer, par convention, la *dérivée généralisée d'ordre n de la fonction f* , et noter $f^{(n)}$, comme d'habitude, sera dite une «distribution dans K à valeurs dans E ». Dans ce cas, donc, l'application Θ sera représentée par la distribution unique $F = f^{(n)}$ (pour commodité, les fonctions continues $f = f^{(0)}$ seront dites aussi distributions). La formule (1.2) peut maintenant s'interpréter comme une simple abréviation de (1.1); mais on peut aussi la justifier par une généralisation naturelle du concept d'intégrale (n.° 26).

Soit maintenant E un espace localement convexe complet, quelconque; alors E se «compose» d'une infinité d'espaces de Banach E_α (n.° 6) et l'expression générale des applications linéaires continues Θ de \mathcal{D}_K dans E devient un peu plus compliquée: pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_K$, la composante $(\Theta \varphi)_\alpha$ du vecteur $\Theta \varphi$ de E , dans chacun des espaces E_α , sera donnée par une formule du type:

$$(\Theta \varphi)_\alpha = \int_a^b T_\alpha(x) \varphi(x) dx,$$

(1) On démontre aisément que, pour que deux tels couples (f, n) et (g, m) , avec $m > n$, déterminent d'après (1.1) la même application Θ , il faut et il suffit que g admette au sens usuelle dérivée $g^{(m-n)}$ continue, différant de f au plus par un polynôme de degré $< n$. L'analogie avec la théorie analytique des nombres rationnels, conçus comme classes de couples d'entiers, est ici frappante.

où T_α est une distribution dans K à valeurs dans E_α , dérivée $D^{\alpha_\alpha} f_\alpha$ d'une fonction continue dans K à valeurs dans E_α (n_α et f_α dépendant de Θ et de α). Dans ce cas général, donc, l'application Θ sera représentée par le système $T = (T_\alpha)$ de distributions, que nous appelons une «distribution au sens large dans K , à valeurs dans E ». Nous dirons alors que T est la «distribution indicatrice» de l'opérateur Θ , par analogie avec les «fonctions indicatrices» des fonctionnelles analytiques de L. FANTAPPIÈ.

Cette notion de «distribution au sens large» n'est pas nécessaire pour certaines catégories d'espaces E : espaces de Banach, espaces (\mathfrak{G}_2) , etc.; mais elle s'impose dans le cas général. D'ailleurs nous abandonnons ensuite, pour commodité, le complément «au sens large», en disant simplement «distribution», en accord avec M. SCHWARTZ, dans ce cas général.

Voilà l'idée essentielle de la systématisation que nous allons présenter ici; tout le reste n'est que détails techniques, pas très compliqués. Il s'agissait, au fond, de résoudre un problème typique d'analyse fonctionnelle. Sa résolution est évidemment une des façons naturelles d'introduire les distributions, considérées cependant comme entités formelles, qu'il convient de distinguer des opérateurs linéaires qu'elles représentent, de même qu'il convient de distinguer les transformations linéaires dans des espaces de dimension finie ou hilbertiens, de leurs représentations matricielles. Cela devient même indispensable lorsqu'il y a des changements de base et, en particulier, dans le cas des distributions sur des variétés sans élément de volume spécifié.

Pour commodité d'exposition, nous résolvons ici ce problème seulement dans le cas des fonctions (indéfiniment dérivables) d'une seule variable. Mais la généralisation des résultats obtenus au cas des fonctions de plusieurs variables n'offre pas de difficultés essentielles.

Ce type de problème d'analyse fonctionnelle — *détermination des applications linéaires continues d'un espace U dans un autre espace E* — rentre dans une catégorie beaucoup plus générale, concernant une théorie de GALOIS métamathématique, dont nous avons abordé l'étude en 1945 (cf. [14]).⁽¹⁾ Pour le cas considéré

⁽¹⁾ Je n'ai plus retrouvé l'opportunité de poursuivre cette étude, dont une partie seulement est contenue dans [14]. Mais il me semble important d'attirer l'attention des mathématiciens sur l'intérêt de ces méthodes métamathématiques.

des espaces vectoriels topologiques, la méthode de recherche peut s'esquisser rapidement :

On cherche d'abord une *base vectoriel-topologique* de U , c'est-à-dire un système (u_λ) , fini ou infini, de vecteurs $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \dots$ de U , en fonction desquels on puisse exprimer tout vecteur v de U , au moyen d'une « *formule de représentation* » :

$$(1.3) \quad v = \mathfrak{F}_v [(u_\lambda)],$$

construite exclusivement à l'aide de notions vectoriel-topologiques définies dans U («somme», «produit par scalaires» et «limite»). On vérifie ensuite si cette formule est conservée, dans sa structure logique, par n'importe quelle application linéaire continue Φ de U dans E ; cela étant, si l'on pose $e_\lambda = \Phi(u_\lambda)$ (pour toute valeur de λ), la formule de représentation (1.3) donne aussitôt

$$(1.4) \quad \Phi(v) = \mathfrak{F}_v [(e_\lambda)], \quad \text{pour tout } v \in U.$$

Toute application $\Phi \in \mathfrak{L}(U; E)$ sera donc, nécessairement, de cette forme⁽¹⁾. Il reste à voir, réciproquement, quelles conditions devra vérifier un système (e_λ) de vecteurs, donné d'avance dans E , pour que la formule (1.4) définisse une application $\Phi \in \mathfrak{L}(U; E)$: ces conditions on les trouvent, en cherchant les *propriétés vectoriel-topologiques de la base* (u_λ) de U qui sont conservées par toute application $\Phi \in \mathfrak{L}(U; E)$ et que l'on devra, par suite, retrouver dans (e_λ) .

Ainsi, toute application $\Phi \in \mathfrak{L}(U; E)$ sera représentée par un tel système (e_λ) de vecteurs de E et réciproquement.

Dans le cas fini (espaces \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n) la formule de représentation la plus simple est donnée par les identités :

$$(1.5) \quad x_i = \sum_{\alpha=1}^n \delta_{i\alpha} x_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où $\delta_{i\alpha}$ est le symbole de KRONECKER ($\delta_{i\alpha} = 1$ si $i = \alpha$, $\delta_{i\alpha} = 0$ si $i \neq \alpha$). Ici le paramètre générique λ , que l'on a considéré plus haut, devient l'indice α , prenant les valeurs $1, 2, \dots, n$, auxquelles correspondent les *vecteurs de base* :

(1) Nous désignons, comme d'habitude, par $\mathfrak{L}(U; E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de U dans E .

$$(\partial_{i1}) = (1, 0, \dots, 0), \quad (\partial_{i2}) = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad (\partial_{in}) = (0, \dots, 0, 1).$$

Dans les formules (1.5), que l'on peut écrire en notation vectorielle: $x = \sum_1^n x_\alpha e_\alpha$, en posant $x = (x_i)$ et $e_\alpha = (\partial_{i\alpha})$, pour $\alpha = 1, \dots, n$, il n'y a que la somme des n produits des vecteurs de base e_α par les scalaires x_α (coordonnées de x). Mais, dans le cas des espaces de dimension infinie, on ne peut plus éviter l'opération de limite, souvent déguisée sous un signe d'intégrale remplaçant celui de somme finie.

On sait, par exemple, que, dans un passage hardi du fini à l'infini, dans sa systématisation de la mécanique que ondulatoire, M. DIRAC a substitué au $\partial_{i\alpha}$ de KRONECKER sa fameuse «fonction» (qui n'est plus d'ailleurs une fonction) $\delta(x - \alpha)$, où x est la variable réelle et α un paramètre réel, jouant resp. les rôles de i et de α dans $\partial_{i\alpha}$; et il a introduit intuitivement la *formule de représentation*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \alpha) f(\alpha) d\alpha,$$

pour toute «fonction» f définie dans \mathbb{R} . Simplement, comme ces $\delta(x - \alpha)$ ne sont pas des fonctions de x , mais des distributions, ce que M. DIRAC a obtenu est en réalité une formule de représentation pour les distributions (cf. [16], § 3) exactement analogue à la formule intégrale de CAUCHY pour les fonctions analytique (cf. [7], [4], [15], [18] et [19]).

Or, tandis que notre méthode générale de recherche s'ajuste parfaitement à ces espaces de distributions et à certains espaces de fonctions analytiques, on ne peut plus l'appliquer, que par des détours inattendus, au cas où l'espace U est, par exemple, celui des fonctions indéfiniment dérivables dans un intervalle. La raison en est que, pour la représentation des éléments de U , il devient plus commode, dans ce cas, de prendre pour vecteurs de base des éléments (étranges à U) des espaces de Banach U_n dont U se «compose». Et c'est là bien la vraie origine du concept de distribution.

Dans la deuxième partie de cet article (§ 2), nous nous occupons de la topologie des espaces de distributions vectorielles, au point de vue direct, et nous présentons des résultats essentiellement nouveaux. Si E est un espace de Banach, il est naturel d'attribuer, à l'espace des distributions définies dans un inter-

valle compact K et à valeurs dans E , la plus fine topologie localement convexe qui rende continu l'opérateur de dérivation et induise dans l'espace normé $C(K; E)$ une topologie moins fine que celle de cet espace. Dans le cas général, on définit l'espace vectoriel topologique des distributions à valeurs dans E , comme limite projective d'espaces du type précédent. On démontre alors que toute distribution vectorielle (au sens large) s'exprime comme limite d'une suite de fonctions vectorielles indéfiniment dérivables, ce qui justifie la désignation « distribution à valeurs dans E » et permet de généraliser cette notion au cas d'espaces E non complets.

D'autre part, on détermine aisément l'expression générale des applications linéaires continues d'un tel espace de distributions dans un espace localement convexe, complet pour les suites, d'après notre méthode générale esquissée plus haut. Cette analyse fournit un moyen assez commode pour l'étude du produit multiplicatif et du changement de variables, ainsi que de la convolution, dans le cas des distributions vectorielles. Chemin faisant on retrouve, d'une façon naturelle, que les espaces de fonctions indéfiniment dérivables et de distributions considérés sont *nucléaires*. Pour établir ce fait, on n'a pas besoin d'employer, de la théorie générale des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires [5], que les seules définitions de produit tensoriel topologique projectif et d'espace nucléaire (dans un cas particulier). Toutefois, pour ne plus allonger cet article, nous employons ici le théorème de GROTHENDIEK, d'après lequel le dual fort d'un espace (\mathfrak{F}) nucléaire est encore nucléaire.

Dans des travaux prochains, les méthodes que nous adoptons ici seront appliquées à l'étude des transformations de FOURIER et de LAPLACE pour les distributions vectorielles.

2. Préliminaires. *a)* On adopte ici, en général, mais pas toujours, la terminologie et les notations de N. BOURBAKI (voir Bibliographie, à la fin de cet article). *Tous les espaces vectoriels ici considérés seront des espaces vectoriels sur le corps complexe, \mathbf{C} ;* mais les considérations ici développées restent évidemment encore valables pour les espaces vectoriels sur le corps réel, \mathbf{R} . Pour la commodité du lecteur moins familiarisé avec les fondements de la théorie des espaces localement convexes, nous rappelons ici quelques notions préliminaires :

On appelle *semi-norme* sur un espace vectoriel E toute fonction $p(x)$ réelle définie dans E telle que l'on ait toujours: 1) $p(x) \geq 0$; 2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$; 3) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$; si en outre on a $p(x) = 0$ *seulement si* $x = 0$ (vecteur nul), on dit que p est une *norme*. On appelle *boule de centre* a et *rayon* $\delta > 0$, au sens de p , l'ensemble des $x \in E$ tels que $p(x-a) \leq \delta$. Un ensemble $V \subset E$ est dit *absolument convexe*, si, quels que soient $x, y \in V$ et $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, on a encore $\alpha x + \beta y \in V$, dès que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$; l'ensemble V est dit *absorbant* si, pour tout $x \in E$, il existe $\rho > 0$, tel que $x \in \rho V$. Les boules de centre 0, au sens d'une semi-norme, sont des ensembles absolument convexes absorbants; réciproquement, tout ensemble absolument convexe absorbant V détermine la semi-norme p définie par:

$$p(x) = \text{borne inférieure des } \rho \text{ tels que } x \in \rho V.$$

On appelle *espace localement convexe* tout espace vectoriel E où l'on a défini une topologie (ou, plutôt, une structure uniforme) au moyen d'un système fondamental de voisinages de 0 constitué par des ensembles absolument convexes, ou, ce qui revient au même, au moyen d'un système de semi-normes p_λ . La somme $x+y$, le produit αx et les semi-normes $p_\lambda(x)$ seront alors fonctions continues, resp. sur $E \times E$, $\mathbf{C} \times E$ et E .

On dit qu'un espace localement convexe E est séparé, si, dans E , tout ensemble formé d'un seul élément est fermé. *Sauf mention expresse du contraire, nous supposons que tous les espaces localement convexes considérés par la suite sont séparés.*

Observons d'ores et déjà que la théorie des fonctions $f(x)$ d'une variable scalaire x (réelle ou complexe), à valeurs dans un espace localement convexe E , est très semblable à celle des fonctions numériques.

b) Distribution dans un pavé compact. Soit E un espace localement convexe, complet pour les suites⁽¹⁾, et soit K un pavé compact (i. e. borné et fermé) de \mathbf{R}^n , défini par les relations $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)⁽²⁾. Désignons par $C(K; E)$, ou simplement par \mathfrak{C} , s'il n'y a pas de confusion à craindre, l'espace

(1) On dit que E est complet pour les suites, si toute suite de Cauchy dans E est convergente.

(2) Au lieu d'un pavé compact, on pourrait considérer, plus généralement, un pavé quelconque. Mais ce cas général est compris dans c).

vectorel des fonctions $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, à valeurs dans E , définies et continues dans K . Pour chaque $i = 1, \dots, n$, l'opérateur de dérivation $D_i (= \partial / \partial x_i)$ est défini de la façon usuelle, comme application linéaire d'un sous-espace de $C(K; E)$ sur $C(K; E)$:

$$D_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

si cette limite existe. Nous poserons encore, pour tout système $p = (p_1, \dots, p_n)$ d'entiers non négatifs:

$$D^p = D_1^{p_1} \cdot D_2^{p_2} \cdot \dots \cdot D_n^{p_n}.$$

Pour chaque i , l'opérateur D_i admet l'inverse à droite \mathfrak{I}_i (linéaire aussi) défini par

$$\mathfrak{I}_i f(x) = \int_a^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_i, x_i, \dots, x_n) d\xi_i, \text{ pour } f \in \mathfrak{E},$$

l'existence et les propriétés usuelles de l'intégrale résultant de ce que f est continue et E complet pour les suites (les démonstrations sont très simples, analogues à celles classiques, si l'on emploie les semi-normes de E). On posera encore:

$$\mathfrak{I}^p = \mathfrak{I}_1^{p_1} \cdot \mathfrak{I}_2^{p_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{I}_n^{p_n}, \text{ et on aura évidemment:}$$

$$D^p \mathfrak{I}^p f = f, \text{ pour toute } f \in \mathfrak{E}.$$

Les opérateurs D_i n'étant pas définis dans tout l'espace $\mathfrak{E} = C(K; E)$, la théorie algébrique des distributions vectorielles a pour but essentiel de résoudre le problème suivant:

PROBLÈME. Construire un espace vectoriel $\tilde{\mathfrak{E}}$, dont \mathfrak{E} soit un sous-espace, de façon que l'on puisse définir, pour chaque $i = 1, \dots, n$, une application linéaire \tilde{D}_i de l'espace $\tilde{\mathfrak{E}}$ dans lui-même, vérifiant les conditions suivantes:

D1) Pour tout i , \tilde{D}_i est un prolongement de D_i , c'est-à-dire, on a $\tilde{D}_i f = D_i f$, lorsque cette dérivée existe au sens usuel.

D2) $\tilde{D}_i \tilde{D}_k = \tilde{D}_k \tilde{D}_i$, pour $i, k = 1, 2, \dots, n$.

Nous appellerons encore $\tilde{D}_i f$ la dérivée de f par rapport à x_i (généralisée) et nous poserons $\tilde{D}^p = \tilde{D}_1^{p_1} \dots \tilde{D}_n^{p_n}$ (dérivation généralisée d'ordre $|p| = p_1 + \dots + p_n$).

Supposons d'abord que le problème est déjà résolu. Alors, pour toute fonction $f \in \mathfrak{C}$ et tout système p de n entiers > 0 , il existe $\tilde{D}^p f$ comme élément de $\tilde{\mathfrak{C}}$. Les règles de calcul pour les éléments de $\tilde{\mathfrak{C}}$ de la forme $\tilde{D}^p f$, avec $f \in \mathfrak{C}$, sont très simples. Tout d'abord, il sera toujours possible de réduire deux telles dérivées formelles, $\tilde{D}^p f$ et $\tilde{D}^q g$, à un même indice de dérivation; on a par exemple:

$$\tilde{D}^p f = \tilde{D}^p (\tilde{D}^q \mathfrak{I}^q f) = \tilde{D}^{p+q} (\mathfrak{I}^q f), \quad \tilde{D}^q g = \tilde{D}^{p+q} (\mathfrak{I}^p g),$$

où, évidemment, $p+q$ est la somme des vecteurs p, q au sens usuel: pour $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $q = (q_1, \dots, p_n)$, on a $p+q = (p_1+q_1, \dots, p_n+p_n)$.

Or, si l'on se donne deux éléments S et T de $\tilde{\mathfrak{C}}$ de cette forme, $S = \tilde{D}^p f$, $T = \tilde{D}^p g$ [avec un même indice de dérivation $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $f, g \in \mathfrak{C}$], la somme $S+T$, compte tenu de la linéarité des opérateurs D_i prolongés à $\tilde{\mathfrak{C}}$, se calcule d'après la formule

$$(2.1) \quad S + T = \tilde{D}^p f + \tilde{D}^p g = \tilde{D}^p (f + g).$$

D'autre part, le produit par scalaires et les dérivations seront calculés d'après les formules

$$(2.2) \quad \alpha (\tilde{D}^p f) = \tilde{D}^p (\alpha f), \quad \tilde{D}^p (\tilde{D}^q f) = \tilde{D}^{p+q} f,$$

conduisant toujours à des éléments de $\tilde{\mathfrak{C}}$ qui s'expriment encore comme dérivées d'éléments de \mathfrak{C} .

Le point crucial dans cette construction est le critère de l'égalité. Si l'on considère deux éléments S et T de \mathfrak{C} de la forme $S = \tilde{D}^p f$, $T = \tilde{D}^p g$, avec $f, g \in \mathfrak{C}$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, on aura évidemment $\tilde{D}^p f = \tilde{D}^p g$, si, et seulement si, $\tilde{D}^p (f - g) = 0$, où 0 est la fonction nulle; donc, l'égalité $\tilde{D}^p f = \tilde{D}^p g$ équivaut à dire que $f - g$ est une fonction (continue dans K à valeurs dans E) dont la dérivée \tilde{D}^p est nulle. La question se réduit donc à savoir quelles devront être, pour tout système p de n entiers > 0 , les fonctions $\theta \in \mathfrak{C}$ vérifiant $\tilde{D}^p \theta = 0$; nous désignerons par \mathfrak{N}_p l'ensemble de ces fonctions (*noyau de \tilde{D}^p*). Or les conditions du problème montrent que l'on aura nécessairement $\theta \in \mathfrak{N}_p$ si θ est de la forme $\theta = \sum_1^n \theta_i$ où, pour chaque i , θ_i est un polynôme de degré p_i en x_i , dont les coefficients sont

des fonctions appartenant à \mathfrak{E} , indépendantes de x_i , c'est-à-dire si θ est de la forme

$$(2.3) \quad \theta(x) = \sum_{i=1}^n [\gamma_{i,0}(x) + \gamma_{i,1}(x)x_i + \cdots + \gamma_{i,p_i-1}(x)x_i^{p_i-1}],$$

où l'on pose $x = (x_1, \dots, x_n)$ et où, pour chaque i , les fonctions $\gamma_{i,k}(x)$ sont supposées indépendantes de x_i .

Or, la solution la plus simple et la plus naturelle du PROBLÈME consistera à prendre pour noyau, \mathfrak{R}_p , de \tilde{D}^p , le plus petit ensemble admissible⁽¹⁾, qui est justement celui des fonctions θ de la forme (2.3). Ajoutons donc au PROBLÈME les deux conditions suivantes :

D3) Pour tout système $p = (p_1, \dots, p_n)$ d'entiers non négatifs, l'ensemble, \mathfrak{R}_p , des solutions de $\tilde{D}^p \theta = 0$ est constitué par les fonctions θ de la forme (2.3)⁽²⁾.

D4) Tout élément T de $\tilde{\mathfrak{E}}$ est de la forme $T = \tilde{D}^p f$, où f est une fonction continue dans K à valeurs dans E et p un système de n entiers non négatifs.

Alors, d'après ce qui précède, on voit que, si le problème a une solution, il en aura une seule, à un isomorphisme opératoire près, laissant fixes les éléments de $\mathfrak{E} \subset \tilde{\mathfrak{E}}$. En particulier, on aura

$$\tilde{D}^p f = \tilde{D}^q g, \quad \text{si et seulement si} \quad \mathfrak{I}^q f - \mathfrak{I}^p g \in \mathfrak{R}_{p+q},$$

et les règles de calcul (addition, produit par scalaires et dérivations) ont été déjà indiquées.

Il reste à voir si le problème a effectivement une solution. Or le critère d'égalité précédent nous indique aussitôt le chemin naturel pour chercher une solution : il s'agit de suivre une orientation très semblable à celle de la théorie analytique des nombres rationnels, représentés par des couples (a, b) de nombres entiers. Puisque chaque élément de l'espace \mathfrak{E} devra être déterminé par un couple (f, p) , constitué par une fonction

(1) C'est là aussi la seule solution permettant d'établir une correspondance biunivoque entre les distributions et certaines applications linéaires continues, dont il est question dans ce travail.

(2) Si $n = 1$, \mathfrak{R}_p se réduit à l'ensemble des polynômes en x de degré $< p$, pour tout entier $p \geq 0$, et alors la théorie se simplifie considérablement. C'est là le seul cas que nous envisagerons aux nos. suivants.

$f \in \mathfrak{E}$ et un système p de n entiers, et que deux tels couples (f, p) et (g, q) déterminent le même élément de \mathfrak{E} , si et seulement si $\mathfrak{Y}^q f - \mathfrak{Y}^p g \in \mathfrak{N}_{p+q}$, nous dirons que le couple (f, p) est équivalent au couple (g, q) , et nous écrirons

$$(f, p) \sim (g, q), \quad \text{si et seulement si} \quad \mathfrak{Y}^q f - \mathfrak{Y}^p g \in \mathfrak{N}_{p+q}.$$

On démontre que la relation \sim ainsi définie est vraiment une relation d'équivalence⁽¹⁾. Cela étant, convenons de désigner par $[f, p]$ la classe de tous les couples équivalents au couple arbitraire (f, p) . Ainsi, nous sommes invités à interpréter $\tilde{\mathfrak{E}}$ comme l'ensemble de toutes les classes d'équivalence $[f, p]$ et à poser, par définition, compte tenu de (2.1) et (2.2):

- I. $[f, p] + [g, p] = [f + g, p]$ ⁽²⁾.
- II. $\alpha[f, p] = [\alpha f, p]$ (α : nombre complexe quelconque).
- III. $\tilde{D}^p[f, q] = [f, p + q]$.

[En particulier p peut être un des systèmes $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots $(0, \dots, 0, 1)$ et, par suite, \tilde{D}^p un des opérateurs $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \dots, \tilde{D}_n$].

On démontre que les définitions I et II introduisent dans $\tilde{\mathfrak{E}}$ une structure d'espace vectoriel et que les opérateurs \tilde{D}^p définis par III sont des applications linéaires de cet espace $\tilde{\mathfrak{E}}$ dans lui-même. D'autre part, on voit aussitôt que la correspondance $f \mapsto [f, 0]$ est un isomorphisme de l'espace \mathfrak{E} sur un sous-espace vectoriel de $\tilde{\mathfrak{E}}$ qui peut donc être identifié à \mathfrak{E} . Enfin, on démontre que les conditions D 1, D 2, D 3 et D 4 du problème sont effectivement vérifiées. Le problème est donc résolu.

En particulier, on aura

$$[f, m] = \tilde{D}^m[f, 0] = \tilde{D}^m f.$$

Pour commodité, on écrira simplement D^m au lieu de \tilde{D}^m ,

(1) Ce fait sera d'ailleurs une conséquence des résultats de la recherche des applications linéaires continues de l'espace \mathfrak{D}_R , dans E (nos. 3, 4 et 7).

(2) D'après ce qui précède, il est aisé de voir que l'on peut toujours remplacer deux couples (f, p) , (g, q) par des couples (f^*, m) , (g^*, m) avec un même système m d'entiers. Il suffit de prendre $f^* = \mathfrak{Y}^q f$, $g^* = \mathfrak{Y}^q g$, $m = p + q$. C'est là une opération semblable à la réduction de deux fractions à un dénominateur commun.

sauf dans les cas où il y ait besoin d'y faire distinction, et on remplacera les notations provisoires $[f, m]$ par les expressions $D^m f$, pour désigner les éléments de $\tilde{\mathfrak{E}}$.

Les démonstrations, très simples dans le cas où $n=1$ (se réduisant alors à des vérifications banales), deviennent un peu plus compliquées dans le cas de plusieurs variables, quoiqu'elles restent tout à fait élémentaires (parfaitement analogues à celles que l'on fait dans le cas des distributions scalaires). Toutefois la recherche des applications linéaires continues de l'espace \mathfrak{D}_K dans E , que nous nous proposons de faire dans la suite pour le cas d'une variable, et que l'on généralise sans difficulté au cas de n variables, rend superflues ces démonstrations.

Nous appellerons *distributions définies dans K à valeurs dans E* , ou simplement *distributions dans K à valeurs dans E* , les éléments de $\tilde{\mathfrak{E}}$, c'est-à-dire, de $\tilde{C}(K; E)$; K sera dit le *domaine* de ces distributions. Nous poserons $D = D_1 D_2 \dots D_n$ et nous désignerons par $C_j(K; E)$ l'espace des distributions T de la forme $T = D^j f$, où $f \in \mathfrak{C} = C(K; E)$; évidemment, $C_0(K; E) = C(K; E)$. On voit aussitôt que

$$\tilde{\mathfrak{E}} = \bigcup_{j=0}^{\infty} C_j(K; E).$$

Désormais nous désignerons par $C_{\infty}(K; E)$ l'espace $\tilde{\mathfrak{E}}$, des distributions définies dans le pavé compact K et à valeurs dans E .

c) *Distributions dans un ouvert* [la lecture de c), d), e) n'est pas nécessaire avant le n.º 5]. Soit Ω un ouvert quelconque de \mathbb{R}^n (en particulier on peut avoir $\Omega = \mathbb{R}^n$), et soit encore E un espace localement convexe, complet pour les suites. On définit la notion de « distribution dans Ω à valeurs dans E » comme dans le cas des distributions scalaires, en partant de la notion de « restriction ». Soient K, K' deux pavés compacts de \mathbb{R}^n , tels que $K' \subset K$, et soit $T = D^m f$ une distribution définie dans K à valeurs dans E ; on appelle *restriction de T à K'* , et on désigne par $\rho_{K'K} T$ (ou simplement par ${}_{K'} T$) la distribution

$$\rho_{K'K} T = D^m (\rho_{K'K} f) \text{ (définie dans } K'),$$

où $\rho_{K'K} f$ désigne la restriction de la fonction continue f à K'

au sens usuel⁽¹⁾. On voit aussitôt que $\varphi_{K',K}$ est une application linéaire de $C_\infty(K;E)$ sur $C_\infty(K';E)$. Cela posé :

DÉFINITION 2. 1. On appelle *distribution définie dans Ω à valeurs dans E* tout système $T = (T_K)$ de distributions que l'on obtienne, en définissant, dans chaque pavé compact $K \subset \Omega$, une distribution T_K à valeurs dans E , de telle façon que l'on ait

$$T_{K'} = {}_{K'K}T_K, \text{ toutes les fois que } K' \subset K,$$

(condition de compatibilité par rapport aux restrictions).

Ainsi, une distribution $T = (T_K)$ dans Ω est conçue comme un certain vecteur de composantes T_K .

Nous désignerons par $C_\pi(\Omega;E)$, ou simplement par \mathcal{C}_π , l'ensemble des distributions $T = (T_K)$ définies dans Ω , à valeurs dans E . On pose, par définition :

$$(T_K) + (U_K) = (T_K + U_K), \quad \lambda(T_K) = (\lambda T_K), \quad D^p(T_K) = (D^p T_K),$$

où λ est un nombre complexe quelconque et p un système de n entiers ≥ 0 . Alors on voit aussitôt que $C_\pi(\Omega;E)$ est un espace vectoriel (complexe) et que D^p est une application linéaire de cet espace dans lui-même. D'ailleurs, si l'on fait correspondre à chaque fonction f , définie et continue dans Ω , à valeurs dans E , la famille (f_K) des restrictions de f aux pavés $K \subset \Omega$, on voit que la correspondance $f \rightarrow (f_K)$ est un isomorphisme entre l'espace $C(\Omega;E)$ de ces fonctions f et un sous-espace vectoriel de $C(\Omega;E)$, que l'on peut donc identifier à $C(\Omega;E)$, en posant $f = (f_K)$.

Une distribution $T \in C_\pi(\Omega;E)$ sera dite *d'ordre fini*, s'il existe un système p et une fonction $f \in C(\Omega;E)$ tels que $T = D^p f$. On voit aisément qu'il existe des distributions définies dans Ω , qui ne sont pas d'ordre fini.

Étant donné un ouvert $\Omega' \subset \Omega$, on appelle *restriction à Ω' d'une distribution $T = (T_K)_{K \subset \Omega}$* , définie dans Ω , la distribution

$$\varphi_{\Omega'\Omega} T = (T_K)_{K \subset \Omega'},$$

dont les composantes sont les composantes T_K de T telles que $K \subset \Omega'$. On dit que deux distributions U, V définies dans Ω , sont égales dans Ω' , et on écrit

(1) C'est-à-dire la fonction f^* ayant K' pour domaine d'existence et telle que $f^*(x) = f(x)$ pour tout $x \in K'$.

$$U = V \text{ dans } \Omega',$$

si leurs restrictions à Ω' coïncident.

Soit $T \in C_\pi(\Omega; E)$. On démontre que la réunion de tous les ouverts $\Omega' \subset \Omega$ où T est nulle (c. a. d. égale à la distribution nulle) est encore un ouvert où T est nulle; on appelle *support de* T le complémentaire de cet ouvert dans Ω . Si T est une fonction continue, son support est donc l'adhérence de l'ensemble des points x où $T(x) \neq 0$.

Enfin, observons que, à chaque distribution $T = D^n f$ définie dans un pavé compact K , correspond *biunivoquement* la distribution $T^* = D^m f^*$ où f^* est la restriction de f à l'intérieur $\overset{\circ}{K}$ de K . La correspondance $T \longleftrightarrow T^*$ est évidemment un isomorphisme: *les distributions dans un pavé compact K s'identifient donc à certaines distributions d'ordre fini définies dans l'ouvert $\overset{\circ}{K}$.*

d) *Translatée d'une distribution.* Étant donné un vecteur $h = (h_1, \dots, h_n)$ de \mathbb{R}^n , on appelle *translatée- h* d'une fonction $f \in C(K; E)$, et on désigne par $\tau_h f$, la fonction $f(x - h)$ de x appartenant à $C(K^*; E)$, où $K^* = K + h$. Cette notion se généralise aux distributions $T \in C_\infty(K; E)$, en posant par définition

$$\tau_h(D^p f) = D^p(\tau_h f) = D_x^p f(x - h),$$

pour toute $f \in C(K; E)$ et tout système p de n entiers; alors τ_h devient une application linéaire de $C_\infty(K; E)$ sur $C_\infty(K^*; E)$. On peut encore poser, pour toute distribution $T = (T_K) \in C(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n :

$$\tau_h T = (\tau_h T_K),$$

ce qui définit τ_h comme application linéaire de $C_\pi(\Omega; E)$ sur $C_\pi(\Omega^*; E)$, où $\Omega^* = \Omega + h$.

Pour commodité, on peut noter encore $T(x - h)$ la translaté $\tau_h T$ de la distribution T , comme s'il s'agissait d'une fonction.

e) *Les notions de produit et de limite projective d'espaces vectoriels.* Soit \mathfrak{J} un ensemble quelconque d'éléments i, j, \dots et supposons que l'on a fait correspondre à chaque $i \in \mathfrak{J}$ un espace vectoriel E_i et un élément arbitraire x_i de E_i . On appelle *produit* des espaces E_i , et on désigne par $\prod_{i \in \mathfrak{J}} E_i$ l'ensemble de tous les systèmes $x = (x_i)_{i \in \mathfrak{J}}$ ainsi obtenus, où x_i est nommée la compo-

sante i de x . Cet ensemble $E = \prod_{i \in \mathcal{J}} E_i$ est muni d'une structure d'espace vectoriel, en posant par définition :

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \quad \lambda (x_i) = (\lambda x_i) \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Si en outre, pour tout $x = (x_i) \in E$ et tout $i \in \mathcal{J}$, on pose $h_i(x) = x_i$, h_i sera une application linéaire (*projection*) de E sur E_i .

Supposons maintenant, sous les mêmes hypothèses, que l'ensemble \mathcal{J} est ordonné⁽¹⁾ par une relation \leq et que, à tout couple i, j d'éléments de \mathcal{J} , tel que $i \leq j$, on a fait correspondre une application linéaire h_{ij} de E_j dans E_i , de façon que

$$h_{ik} = h_{ij} h_{jk}, \quad \text{lorsque } i \leq j \leq k;$$

on dit alors que les espaces E_i forment un *spectre projectif par rapport aux applications* h_{ij} . Désignons par E^* l'ensemble des éléments $x = (x_i)$ du produit $\prod_i E_i$ vérifiant la suivante *condition de compatibilité par rapport aux* h_{ij} :

$$x_i = h_{ij}(x_j), \quad \text{lorsque } i \leq j$$

(c'est-à-dire, $h_i(x) = h_{ij} h_j(x)$ pour tout $x \in E^*$). On voit immédiatement que E^* est alors un sous-espace vectoriel de $E = \prod_i E_i$: on dit que E^* est la *limite projective (algébrique) des* E_i , *par rapport aux applications* h_{ij} .

EXEMPLE. Soit \mathfrak{K}_Ω l'ensemble des pavés compacts K contenus dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , ordonné par la relation d'inclusion \subset . Les espaces vectoriels $E_K = C_\infty(K; E)$, où $K \in \mathfrak{K}_\Omega$, forment un spectre projectif par rapport aux opérateurs ρ_{KL} de restriction, puisque l'on a évidemment

$$\rho_{KM} = \rho_{KL} \rho_{LM}, \quad \text{lorsque } K \subset L \subset M;$$

et la déf. (2.1), c) se résume en disant :

(1) Un ensemble A est dit *ordonné*, s'il on a défini dans A une relation $a \leq b$ telle que: 1) si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$; 2) si $a \leq b$ et $b < a$, alors $a = b$, et réciproquement. Par exemple, l'ensemble des pavés compacts K contenus dans un ouvert Ω se trouve ordonné par la relation d'inclusion $K \subset K'$.

L'espace $C_\pi(\Omega; E)$, des distributions $T = (T_K)$ définies dans Ω et à valeurs dans E , est la limite projective des espaces $C_\infty(K; E)$, avec $K \in \mathcal{R}_\Omega$, par rapport aux opérateurs ρ_{KK} de restriction.

Revenons au cas général des espaces E_i et supposons qu'ils sont des espaces localement convexes. Alors on appelle *produit topologique* des E_i l'espace produit $E = \prod_i E_i$ muni de la moins fine topologie qui rende continues les projections h_i de E sur les E_i (cf. [1, p. 61-64]; et *limite projective (topologique) des E_i , par rapport aux h_{ij}* , le sous-espace vectoriel topologique E^* de ce produit topologique.

f) *Distributions dans un compact Δ qui soit l'adhérence d'un ouvert.* Considérons dans \mathbf{R}^n un ensemble quelconque Δ , qui soit l'adhérence d'un ouvert borné Ω ; donc: $\Delta = \bar{\Omega}$, $\Omega = \overset{\circ}{\Delta}$. Nous appellerons *distribution dans Δ à valeurs dans E* toute distribution dans $\overset{\circ}{\Delta}$ qui soit prolongeable à un ouvert $\Omega \supset \Delta$ (donc à \mathbf{R}^n) et nous désignerons par $C_\infty(\Delta; E)$ le sous-espace vectoriel de $C_\pi(\Omega; E)$ formé par ces distributions. On démontre comme dans [16] que les distributions T dans Δ à valeurs dans E s'identifient aux dérivées $D^p f$ des fonctions $f \in C(\Delta; E)$.

§ 1. Les distributions vectorielles comme «indicatrices» d'applications linéaires continues.

3. Représentation canonique des éléments de \mathcal{D}_K . Il s'agit maintenant de voir comment les distributions à valeurs dans un espace E interviennent dans la recherche des applications linéaires continues de certains espaces de fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbf{R}^n , dans l'espace E , suivant les lignes générales tracées dans l'Introduction.

Dans les considérations qui suivent, nous nous bornerons au cas d'une variable, la généralisation au cas de n variables n'offrant pas de difficultés essentielles.

Soit $K = [a, b]$ un intervalle compact de la droite \mathbf{R} . Nous désignerons, comme d'habitude, par $C^m(K)$ ou par $C_K^m (m=0, 1, \dots)$ l'espace vectoriel des fonctions *numériques complexes* définies et m fois continûment différentiables dans K , muni de sa norme usuelle

$$\|\varphi\|_m = \max_{x \in K} (|\varphi(x)|, |\varphi'(x)|, \dots, |\varphi^{(m)}(x)|);$$

et par $\mathcal{D}^m(K)$ ou \mathcal{D}_K^m le sous-espace normé de $C^m(K)$, constitué par les fonctions de cet espace qui s'annulent, ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre $\leq m$, aux extrêmes de K . Nous poserons encore

$$\mathcal{E}_K = C^\infty(K) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(K), \quad \mathcal{D}_K = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{D}_K^m,$$

avec la topologie définie par la suite croissante de normes $\|\cdot\|_m$, $m=0, 1, \dots$. Il est évident que \mathcal{D}_K s'identifie à l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbf{R} , à support contenu dans K (i.e. s'annulant en dehors de K). Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_K$ et tout $x \in K$, on a la formule

$$\varphi(x) = \int_a^b \varphi(u) \, \delta(u-x) \, du \quad (2^{\text{ème}} \text{ formule de Dirac}),$$

où $\delta(u-x)$ est la « distribution de Dirac (en u) relative au point x » définie par⁽¹⁾

$$\delta(u-x) = D_u H(u-x), \quad \text{pour chaque } x \in K,$$

H étant la « fonction de Heaviside » :

$$H(x) = 1 \text{ pour } x > 0, \quad H(x) = 0 \text{ pour } x < 0.$$

Cette formule a été justifiée directement dans [16], mais cela n'est pas nécessaire pour la suite, comme on le verra. Nous pouvons l'envisager comme une simple abréviation de la formule évidente :

$$\varphi(x) = - \int_a^b \varphi'(u) H(u-x) \, du = - \int_x^b \varphi'(u) \, du = \int_b^x \varphi'(u) \, du.$$

Plus généralement, si l'on pose

$$\mathfrak{J} f(x) = \int_0^x f(\xi) \, d\xi,$$

pour toute fonction localement sommable f et

$$J_m(x) = \mathfrak{J}^{m+1} H(x), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

on aura $J_m(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!}$ pour $x \geq 0$, $J_m(x) = 0$ pour $x \leq 0$, donc

(1) L'accent $\hat{}$ sert à signaler les variables muettes.

$$(3.1) \quad J_m(u-x) = \begin{cases} \frac{(u-x)^{m+1}}{(m+1)!}, & \text{pour } u \geq x \\ 0, & \text{pour } u \leq x \end{cases}$$

et, par conséquent,

$$(3.2) \quad \varphi(x) = (-1)^m \int_a^b J_m(u-x) \varphi^{(m+2)}(u) du,$$

puisque

$$\varphi(x) = \int_b^x \frac{(x-u)^{m+1}}{(m+1)!} \varphi^{(m+2)}(u) du,$$

comme on le vérifie par des intégrations successives par parties. D'ailleurs cette formule n'est que la formule de Taylor appliquée aux fonctions $\varphi \in \mathcal{D}_K$ [cf. plus loin (11.1)].

Observons que, pour chaque $u \in \mathbf{R}$ et tout $m=0, 1, \dots$, $J_m(u-x)$ est une fonction de x dont la restriction à K appartient à $C^m(K)$. Pour simplifier, nous désignerons encore par $J_m(u-x)$ cette restriction; on voit aussitôt que:

PROPOSITION 3.1. *La fonction $J_m(u-\hat{x})$ de u , définie dans \mathbf{R} et à valeurs dans C_K^m , est continue (au sens de la topologie de cet espace), pour tout $m=0, 1, \dots$*

Cela est évidemment vrai pour $m=0$, puisque $J_0(u-x)$ est une fonction continue⁽¹⁾ des deux variables x, u sur $K \times \mathbf{R}$ et que $C_K^0 = C(K)$; d'autre part on a

$$J_m(u-x) = (-1)^m \mathfrak{D}_x^m J_0(u-x)$$

et l'application $f \rightarrow \mathfrak{D}_x^m f$ de $C(K)$ dans $C^m(K)$ est évidemment continue.

Il en découle que la formule (3.2) peut s'écrire :

$$(3.3) \quad \varphi = (-1)^m \int_K J_m(u-\hat{x}) \varphi^{(m+2)}(u) du, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K,$$

en termes vectoriel-topologiques de l'espace C_K^m , puisque la fonction intégrande, à valeurs dans cet espace de Banach, est continue

(1) Il est déjà classique qu'une fonction $f(u)$ à valeurs dans $C(K)$ est continue sur un intervalle I de \mathbf{R} , si, et seulement si, elle s'identifie à une fonction numérique $F(x, u)$ continue sur $K \times I$, d'après la formule: $f(u) = F(\hat{x}, u)$ pour tout $u \in I$.

[produit de la fonction *scalaire* continue $\varphi^{(m+2)}(u)$ par la fonction *vectorielle* continue $J_m(u - \hat{x})$, de u].

Cependant, pour la recherche des applications linéaires continues de \mathfrak{D}_K dans un espace localement convexe, il faut remplacer dans (3.3) cette fonction de u à valeurs dans $C^m(K)$, s'il est possible, *par une fonction de u (encore continue) à valeurs dans $\mathfrak{D}^m(K)$* . À cet effet, nous n'avons qu'à chercher un *projecteur continu* de $C^m(K)$ dans $\mathfrak{D}^m(K)$. Observons d'abord que, à chaque fonction $f \in C^m(K)$, on peut faire correspondre un polynôme

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_{2m+1} x^{2m+1}$$

de degré $\leq 2m+1$, tel que

$$P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad P^{(k)}(b) = f^{(k)}(b), \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

puisque ces conditions fournissent $2m+2$ équations linéaires en $c_0, c_1, \dots, c_{2m+1}$, permettant de déterminer ces coefficients comme *combinaisons linéaires des données $f^{(k)}(a), f^{(k)}(b)$* ⁽¹⁾. Alors il est aisé de voir que l'application $f \rightarrow P$ de $C^m(K)$ dans $C^m(K)$ est continue et que, par suite, *l'application $f \rightarrow f - P$ de $C^m(K)$ sur $\mathfrak{D}^m(K)$ est bien un projecteur continu*.

Désignons par Π_m ce projecteur (dépendant de m) et posons

$$G_m(\hat{x}, u) = \Pi_m J_m(u - \hat{x}), \quad \text{pour tout } u \in K;$$

ainsi, donc, à chaque $u \in K$ correspond une fonction $J_m(u - x)$ de x appartenant à $C^m(K)$, qui est transformée par Π_m en une fonction $G_m(x, u)$ de x appartenant à $\mathfrak{D}^m(K)$. Puisque l'application Π_m est continue, on déduit alors de la prop. 3.1 :

PROPOSITION 3.2. *La fonction $G_m(\hat{x}, u)$ de u à valeurs dans $\mathfrak{D}^m(K)$ est continue sur K [au sens de la topologie de $\mathfrak{D}^m(K)$], pour tout $m = 0, 1, \dots$*

D'autre part, suivant la définition même de Π_m , la différence entre $G_m(x, u)$ et $J_m(u - x)$ est un polynôme en x dont les coefficients sont des combinaisons linéaires des valeurs de

$$D_x^k J_m(u - x), \quad \text{pour } x = a, x = b, \quad k = 0, 1, \dots, m;$$

(1) Il s'agit là d'un résultat classique de la théorie de l'interpolation rationnelle entière.

d'où l'on déduit, compte tenu de (3.1), que ces coefficients sont des polynômes en u de degré $< m + 2$. On a donc⁽¹⁾, pour chaque $x \in K$:

$$(3.4) \quad D_u^{m+2} G_m(x, u) = D_u^{m+2} J_m(u - x) = \delta(u - x).$$

Enfin, si l'on applique Π_m aux deux membres de (3.3), on obtient successivement

$$\Pi_m \varphi = (-1)^m \int_K [\Pi_m J_m(u - \hat{x})] \varphi^{(m+2)}(u) du,$$

et

$$(3.5) \quad \varphi = (-1)^m \int_K G_m(\hat{x}, u) \varphi^{(m+2)}(u) du, \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{D}_K,$$

puisque, Π_m étant une application linéaire et continue de $C^m(K)$ sur $\mathcal{D}^m(K)$, Π_m est permutable avec l'intégration par rapport à u et que l'on a $\Pi_m \varphi = \varphi$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_K^m$ (Π_m étant un projecteur de C_K^m sur \mathcal{D}_K^m).

La formule (3.5) fournit une *représentation canonique* des vecteurs $\varphi \in \mathcal{D}_K$ considérés comme éléments de n'importe quel des espaces \mathcal{D}_K^m , $m = 0, 1, 2, \dots$. Elle est la clef de la recherche des applications linéaires continues de \mathcal{D}_K dans un espace localement convexe, comme on va le voir.

REMARQUE. Les vecteurs $G_m(\hat{x}, u)$, $u \in K$, ne forment pas une base de \mathcal{D}_K , puisqu'ils n'appartiennent pas à cette espace pour aucune valeur de m ; mais ils remplacent, avec avantage, toute vraie base de \mathcal{D}_K . D'ailleurs, ils fournissent plusieurs de ces bases: cela tient à ce que, \mathcal{D}_K étant dense dans \mathcal{D}_K^m , on peut choisir, pour chaque $u \in K$ et chaque $m = 0, 1, \dots$, une suite d'éléments $G_{m,k}(\hat{x}, u)$ de \mathcal{D}_K convergeant vers $G_m(\hat{x}, u)$ dans \mathcal{D}_K^m .

4. Applications linéaires continues de \mathcal{D}_K dans un espace de Banach (K compact). Soit E un espace de Banach (sur le corps

(1) Rappelons que, pour chaque $x \in K$, $\delta(u - x)$ est une distribution scalaire en u ; et que, en théorie des distributions, une dérivée $D_u^p \theta(u)$ d'une fonction continue $\theta(u)$ ($u \in \mathbb{R}$) est la fonction nulle, si, et seulement si, $\theta(u)$ est un polynôme en u de degré $< p$ [cf. n.º 2, b)].

complexe) et soit encore $K = [a, b]$ un intervalle compact de la droite \mathbf{R} . Alors :

THÉOREME 4.1. *Il y a une correspondance biunivoque $\Theta \leftrightarrow T$ entre les applications linéaires continues Θ de \mathcal{D}_K dans E et les distributions T définies dans K à valeurs dans E . La correspondance $T \rightarrow \Theta$ est donnée par la formule*

$$\Theta \varphi = (-1)^p \int_K f(u) \varphi^{(p)}(u) du, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}_K,$$

où l'on suppose $T = D^p f$, $f \in C(K; E)$. La correspondance inverse $\Theta \rightarrow T$ est donnée par

$$T = D^{m+2} F, \quad \text{avec } F(u) = \Theta_m G_m(\hat{x}, u), \quad u \in K,$$

où m est un entier convenable et Θ_m (appliquée par rapport à x) est le prolongement à $\mathcal{D}^m(K)$ de l'application Θ , supposée continue au sens de la norme $\|\cdot\|_m$ (on sait qu'il existe au moins un entier m vérifiant cette condition).

Nous ferons la démonstration en deux parties :

1^{ère} partie. Soit Θ une application continue de \mathcal{D}_K dans E . D'après un théorème connu (cf. par exemple [17], p. 395, prop. 4), il existe nécessairement un entier m , tel que l'application Θ est continue dans l'espace \mathcal{D}_K muni de la seule norme $\|\cdot\|_m$; et puisque $\mathcal{D}^m(K)$ est le complété de \mathcal{D}_K pour cette norme⁽¹⁾, on peut prolonger Θ , d'une façon unique, en une application linéaire continue, Θ_m , de $\mathcal{D}^m(K)$ dans E . Alors, si l'on applique Θ_m aux deux membres de (3.5), en posant

$$(4.1) \quad f_m(u) = \Theta_m G_m(\hat{x}, u), \quad \text{pour chaque } u \in K,$$

on obtient

$$(4.2) \quad \Theta \varphi = (-1)^m \int_K f_m(u) \varphi^{(m+2)}(u) du, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}_K,$$

puisque $\Theta_m \varphi = \Theta \varphi$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_K$ et que l'application Θ_m , étant linéaire et continue, est permutable avec l'intégration par rapport au paramètre u .

(1) Plus loin (§ 2) on démontrera une généralisation de ce fait bien connu.

De la continuité de Θ_m et de la prop. 3.2 il résulte encore, par (4.1), que la fonction $f_m(u)$, à valeurs dans E , est continue.

Observons que, si $f_m(u)$ est m fois continûment différentiable, la formule (4.2) peut s'écrire aussi

$$\Theta \varphi = \int_K \varphi(u) D^{m+2} f_m(u) du,$$

comme on le voit au moyen d'intégrations successives par parties. Il est possible de donner un sens convenable à cette intégrale, même dans le cas général. Pour le moment, il suffit d'observer que, à l'application Θ de \mathcal{D}_K dans E , correspond la distribution

$$T = D^{m+2} f_m \in C_\infty(K; E)$$

(c. a. d. définie dans K et à valeurs dans E); et que cette distribution est univoquement déterminée par Θ , au moyen de (4.1). Pour s'en convaincre, considérons un autre entier $n > m$; compte tenu de (3.4) on voit que, pour tout x ⁽¹⁾,

$$(4.3) \quad G_n(x, u) = \mathfrak{I}_u^{n-m} G_m(x, u) + \sum_{k=0}^{n+1} a_k(x) u^k,$$

où $\sum a_k(x) u^k$ est un polynôme en u , de degré $< n+2$, dont les coefficients $a_k(x)$ sont des fonctions de x appartenant à $\mathcal{D}^m(K) \supset \mathcal{D}^n(K)$; donc, si l'on applique l'opérateur Θ_m , linéaire et continu dans $\mathcal{D}^m(K)$, sur les fonctions de x des deux membres de (4.3), on obtient

$$f_n(u) = \mathfrak{I}_u^{n-m} f_m(u) + \sum_{k=0}^{n+1} c_k u^k$$

où $\sum c_k u^k$ est un polynôme en u de même degré, à coefficients c_k dans E ; par conséquent:

$$D^{n+2} f_n = D^{m+2} f_m = T.$$

2^{ème} partie. Supposons, réciproquement, que l'on se donne arbitrairement une distribution $T = D^p f$, où f est une fonction définie et continue dans K , à valeurs dans E , et posons

(1) En effet, si, pour deux fonctions continues $F(u)$, $G(u)$, on a, au sens de la théorie des distributions $D^p F(u) = D^q G(u)$, avec $p > q$, on aura aussi $D^p F = D^p \mathfrak{I}_u^{p-q} G$ et, alors, $F(u) - \mathfrak{I}_u^{p-q} G(u)$ doit être un polynôme en u de degré $< p$. Dans le cas présent on a $p = n+2$.

$$(4.4) \quad \Theta \varphi = (-1)^p \int_K f(u) \varphi^{(p)}(u) du, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{D}_K.$$

Il est évident que cette formule définit une application linéaire continue Θ de \mathfrak{D}_K dans E , qui se prolonge en une application linéaire continue Θ_p de $\mathfrak{D}^p(K)$ dans E . Donc, si, pour tout $u \in K$, on applique Θ_p à l'élément $G_p(\hat{x}, u)$ de $\mathfrak{D}^p(K)$, on obtient, *compte tenu de (4.4)*:

$$(4.5) \quad \Theta_p G_p(\hat{x}, u) = (-1)^p \int_K f(\xi) D_\xi^p G_p(\xi, u) d\xi, \quad \text{pour tout } u \in K.$$

D'autre part, comme nous l'avons vu au n.º précédent, la différence $G_p(x, u) - J_p(u - x)$ est un polynôme en u de degré $< p + 2$ dont les coefficients sont des polynômes en x :

$$G_p(x, u) - J_p(u - x) = \sum_{k=0}^{p+1} a_k(x) u^k.$$

Donc, si l'on pose

$$(4.6) \quad F(u) = \Theta_p G_p(\hat{x}, u), \quad \text{pour tout } u \in K,$$

on aura, d'après (4.5):

$$F(u) = (-1)^p \int_K f(\xi) D_\xi^p J_p(u - \xi) d\xi + (-1)^p \int_K \sum_{k=0}^{p+1} f(\xi) a_k^{(p)}(\xi) u^k d\xi$$

et, par conséquent,

$$F(u) = \int_K f(\xi) J_0(u - \xi) d\xi + \sum_{k=0}^{p+1} c_k u^k,$$

où les c_k sont des éléments de E . On en déduit

$$D^2 F = f + \sum_{k=2}^{p+1} k(k-1) c_k u^{k-2}$$

et, par conséquent,

$$T = D^p f = D^{p+2} F,$$

ce qui, compte tenu de (4.6), achève la démonstration. —

Rappelons que l'espace vectoriel des applications linéaires continues de \mathfrak{D}_K dans E est noté $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_K; E)$. Si, d'autre part, on rappelle les définitions de «somme» et de «produit» par scalaires dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_K; E)$ et dans $C_\infty(K; E)$ [cf. n.º 2, b)], on voit aussitôt que:

SCHOLIE. La correspondance $\Theta \rightarrow T$ dont il est question dans le théorème 4.1 est un isomorphisme vectoriel de l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}_K; E)$ sur l'espace $C_\infty(K; E)$.

DÉFINITION 4.1. La distribution T , qui, d'après le théorème 4.1, représente biunivoquement l'application $\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_K; E)$, sera nommée la *distribution indicatrice* de Θ , et on posera $T = \varkappa \Theta$. A son tour, cette correspondance $\varkappa: \Theta \rightarrow T$ sera dite l'*application canonique* de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_K; E)$ sur $C_\infty(K; E)$.

Observons encore que la formule (4.4) pourra s'écrire plus simplement

$$(4.7) \quad \Theta \varphi = \int_K T(u) \varphi(u) du,$$

moyennant une généralisation convenable du concept d'intégrale que nous présenterons plus loin (n.º 26). Pour le moment, il est suffisant de considérer (4.7) comme une simple abréviation de (4.4).

5. Applications linéaires continues de \mathcal{D}_I dans un espace de Banach (I ouvert) ⁽¹⁾. Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert, limité ou non, de la droite \mathbf{R} . On désigne par $\mathcal{D}(I)$ ou par \mathcal{D}_I l'espace vectoriel des fonctions numériques φ indéfiniment dérivables dans \mathbf{R} , à support borné contenu dans I . Puisque toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_I$, nulle en dehors d'un intervalle compact $K \subset I$, s'identifie à un élément de \mathcal{D}_K , on peut considérer \mathcal{D}_I comme la réunion de tous les \mathcal{D}_K tels que $K \subset I$; on lui donne la topologie de la limite inductive de ces espaces (c. a. d. la plus fine topologie sur \mathcal{D}_I qui induise sur chaque \mathcal{D}_K la topologie de cet espace). ⁽²⁾

Soit d'autre part E un espace de Banach (sur le corps complexe) et cherchons à déterminer toutes les applications linéaires continues de \mathcal{D}_I dans E .

(1) La lecture de ce n.º n'est pas nécessaire pour les n.ºs 6 et 7.

(2) Rappelons que \mathcal{D}_I peut être défini simplement comme la limite inductive d'une suite dénombrable croissante d'espaces \mathcal{D}_{K_n} tels que $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup_1^\infty K_n = I$.

1^{ère} partie. Soit Θ une telle application. Alors⁽¹⁾, pour tout intervalle compact $K \subset I$, la restriction de Θ à \mathcal{D}_K est une application linéaire continue de \mathcal{D}_K dans E . Donc, à chaque $K \subset I$ correspond un entier p et une application linéaire continue Θ_K^p de \mathcal{D}_K^p dans E telle que $\Theta \varphi = \Theta_K^p \varphi$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_K$; par conséquent, à chaque $K \subset I$ correspond la distribution

$$(5.1) \quad T_K = D^{p+2} f, \quad \text{où } f(u) = \Theta_K^p G_p(\hat{x}, u) \quad (x, u \in K),$$

(f et p dépendant de K), et on voit aussitôt que, pour $K' \subset K$, la restriction de T_K à K' est $T_{K'}$ ⁽²⁾. Donc, le système (T_K) de distributions dans les intervalles compacts $K \subset I$ définit une distribution T dans l'intervalle I [cf. n.º 2, c)].

2^{ème} partie. Soit $T = (T_K)$ une distribution dans l'intervalle I , où T_K est donc, pour tout intervalle compact $K \subset I$, une distribution dans K (à valeurs dans E) telle que la restriction de T_K à $K' \subset K$ est $T_{K'}$. Alors chaque T_K est de la forme

$$T_K = D^n g, \quad \text{avec } g \in C(K; E)$$

et définit l'application $\Theta_K \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_K, E)$ donnée par

$$\Theta_K \varphi = (-1)^n \int_K g(u) \varphi^{(n)}(u) du.$$

D'ailleurs on voit aussitôt que, si $K' \subset K$, la restriction de Θ_K à $\mathcal{D}_{K'}$ est $\Theta_{K'}$. On définit donc ainsi une application linéaire continue Θ de \mathcal{D}_I dans E , dont la restriction à chaque espace \mathcal{D}_K est Θ_K .

En conclusion :

THÉORÈME 5.1. *Il existe une correspondance biunivoque $\Theta \leftrightarrow T$ entre les applications linéaires continues Θ de \mathcal{D}_I dans E et les distributions T définies dans I à valeurs dans E . Dans cette correspondance, T est la distribution dont la restriction à chaque intervalle*

(1) Si un espace localement convexe U est une limite inductive d'espaces U_λ , pour qu'une application linéaire Φ de U dans E soit continue il faut et il suffit que la restriction de Φ à chaque U_λ soit continue par rapport à la topologie de cet espace.

(2) Il est évident que, si $K' \subset K$, la formule (5.1) conduit à $T_{K'}$ en remplaçant uniquement f par sa restriction à K' , puisque la restriction de Θ_K^p à $\mathcal{D}_{K'}^p$ est encore continue dans ce sous-espace de \mathcal{D}_K^p , et que la fonction $G_p(\hat{x}, u)$ de u , relative à K , a la même dérivée d'ordre $p+2$, dans K' , que la correspondante fonction relative à K' , à valeurs dans $\mathcal{D}_{K'}^p \subset \mathcal{D}_K^p$.

compact K contenu dans I est la distribution indicatrice de la restriction de Θ à l'espace \mathcal{D}_K (cf. th. 4.1 et déf. 4.1); ou, ce qui revient au même, Θ est l'opérateur dont la restriction Θ_K à chaque espace $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_I$, K étant un intervalle compact contenu dans I , est donnée par la formule [cf. (4.7)]:

$$\Theta_K \varphi = \int_K T_K(x) \varphi(x) dx,$$

où T_K est la restriction de T à K .

On pourra écrire encore, dans ce cas:

$$\Theta \varphi = \int_I T(x) \varphi(x) dx, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}_I,$$

par une généralisation naturelle du concept d'intégrale (n.º 26).

Compte tenu des définitions de «somme», «produit par scalaires» et «restrictions» dans $C_\pi(I; E)$ [cf. n.º 2, c)], on peut compléter le th. 5.1 de la façon suivante:

SCHOLIE. La correspondance $\Theta \rightarrow T$ indiquée dans le théorème 5.1 est un isomorphisme vectoriel de l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}_I; E)$ sur l'espace $C_\pi(I; E)$, changeant «restriction de Θ à \mathcal{D}_K » en «restriction de T à K » (pour tout intervalle compact $K \subset I$).

La déf. 4.1 se généralise aussitôt à ce cas.

REMARQUE. Au lieu d'un intervalle ouvert I on peut considérer plus généralement un ouvert Ω quelconque; cela n'a évidemment d'intérêt que dans \mathbb{R}^n , avec $n > 1$. Alors \mathcal{D}_Ω sera la limite inductive des espaces \mathcal{D}_Δ , formés par les fonctions indéfiniment dérivables à support contenu dans un compact arbitraire $\Delta \subset \Omega$, qui soit l'adhérence d'un ouvert, et on sera conduit à considérer les espaces $C_\infty(\Delta; E)$ des distributions définies dans ces compacts Δ et à valeurs dans E [cf. n.º 2, f)].

6. Distributions vectorielles au sens large. Comme on vient de le voir, les distributions vectorielles à valeurs dans E , définies au n.º 2, b) et c), sont les entités nécessaires et suffisantes pour représenter toutes les applications linéaires continues de \mathcal{D}_K , resp. \mathcal{D}_I , dans E , si E est un espace de Banach. Mais cela n'est plus vrai dans le cas général. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'application identique de l'espace \mathcal{D}_K dans lui-même (où K est encore un intervalle compact quelconque de \mathbb{R}).

D'après la formule de représentation (3.5), la distribution indicatrice de cette application devrait être la « distribution en u », définie dans K :

$$\partial(u-x) = D_u^{m+2} G_m(x, u).$$

Or, cette entité qui, pour tout $m=0,1,\dots$, se présente comme dérivée d'ordre $m+2$ d'une fonction continue de u à valeurs dans $\mathcal{D}^m(K)$, n'est plus exprimable comme dérivée (d'ordre fini) d'une fonction continue de u à valeurs dans $\mathcal{D}_K = \bigcap_0^\infty \mathcal{D}^m(K)$. Donc, pour la représentation analytique des applications linéaires continues de \mathcal{D}_K dans un espace E tel que \mathcal{D}_K , il faut élargir la notion de distribution vectorielle dans un compact, telle que nous l'avons définie au n.º 2.

Soit E un espace localement convexe *complet* et soit $(p_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un système de semi-normes définissant la topologie de E . Supposons l'ensemble \mathcal{A} des indices ordonné par une relation \leq , de telle façon que:

$$\text{Si } \alpha \leq \beta, \text{ on a } p_\alpha(x) \leq p_\beta(x) \text{ pour tout } x \in E,$$

et désignons par O_α le sous-espace des vecteurs x de E tels que $p_\alpha(x) = 0$. Alors on aura évidemment

$$O_\alpha \supset O_\beta, \text{ si } \alpha \leq \beta.$$

Cela étant, nous désignerons par E_α , pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, l'espace de Banach que l'on obtient, en considérant sur E la seule semi-norme p_α , en passant à l'espace normé correspondant (quotient de E par O_α) et en complétant ce dernier espace. À chaque $x \in E$ correspond donc un élément x_α de E_α qui est l'ensemble $x_\alpha = x + O_\alpha$; si $\alpha \leq \beta$, on a $x_\alpha \supset x_\beta$. Désignons par π_α l'application (canonique) $x \rightarrow x + O_\alpha$ et par $\pi_{\alpha\beta}$ l'application $x + O_\beta \rightarrow x + O_\alpha$ de E_β dans E_α lorsque $\alpha \leq \beta$; nous dirons que l'élément $x_\alpha = x + O_\alpha$ est la *projection* de x sur E_α ou la *composante* de x suivant E_α . Il est aisé de voir (cf. [4], p. 59) que:

PROPOSITION 6.1. *Si, à tout $\alpha \in \mathcal{A}$, on fait correspondre un $x_\alpha \in E_\alpha$, de façon que, si $\beta \leq \alpha$, la projection de x_α sur E_β est x_β , c'est-à-dire:*

$$(6.1) \quad x_\beta = \pi_{\beta\alpha} x_\alpha, \text{ dès que } \beta \leq \alpha,$$

il existe un, et un seul, élément x de E , dont la projection sur chaque E_α est x_α , c'est-à-dire tel que $x_\alpha = \pi_\alpha x$.

Il existe donc une correspondance biunivoque $x \leftrightarrow (x_\alpha)$ entre les éléments x de E et les systèmes $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ vérifiant la *condition de compatibilité* (6.1). Cette correspondance est même un isomorphisme vectoriel-topologique entre E et le sous-espace du produit $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} E_\alpha$, formé par ces systèmes. On exprime ce fait en disant que l'espace localement convexe E est la limite projective des E_α par rapport aux applications $\pi_{\beta\alpha}$ [cf. n.º 2, e); observons que $\pi_{\alpha\beta}\pi_{\beta\gamma} = \pi_{\alpha\gamma}$, pour $\alpha \leq \beta \leq \gamma$].

EXEMPLES. 1) Soit E l'espace \mathcal{D}_K . Alors, \mathcal{A} est l'ensemble des entiers $m \geq 0$, muni de sa relation d'ordre naturel \geq , les semi-normes p_m sont les normes $\|\cdot\|_m$, les espaces de Banach E_m s'identifient aux espaces $\mathcal{D}^m(K)$ et toutes les composantes φ_m de chaque élément φ de \mathcal{D}_K coïncident avec φ .

2) Soit E l'espace $C(\mathbf{R})$ des fonctions continues sur la droite \mathbf{R} , avec la suite de *semi-normes*

$$p_n(f) = \max_{-n \leq x \leq n} |f(x)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Alors E_n s'identifie à l'espace $C(K_n)$ où $K_n = [-n, n]$, avec sa norme usuelle (correspondante à p_n), et l'application π_n de E sur E_n n'est plus biunivoque, pour aucun n .

Pour définir «distribution vectorielle au sens large», il convient encore de faire la remarque suivante:

Soient E, F deux espaces vectoriels complexes. Toute application linéaire *continue* φ de E dans F peut évidemment se prolonger (d'une seule manière) en une application linéaire $\bar{\varphi}$ de $C_\infty(K; E)$ dans $C_\infty(K; F)$, en posant

$$(6.2) \quad \bar{\varphi} T = D_x^m \varphi[f(x)]$$

pour toute distribution $T = D^m f$, où $f \in C(K; E)$.

DÉFINITION 6.1. Nous désignerons toujours par $\bar{\varphi}$ le prolongement de φ défini par (6.1), φ étant une application linéaire *continue* de E dans F .

Soit maintenant E , de nouveau, un espace localement convexe *complet*, dont la topologie est définie par un système $(p_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de semi-normes. Cela étant:

DÉFINITION 6.2. On appelle *distribution au sens large à valeurs dans E , définie dans l'intervalle compact $K = [a, b]$* , tout système

(T_α) que l'on obtienne en faisant correspondre, à chaque $\alpha \in \mathcal{A}$, une distribution $T_\alpha \in C_\infty(K; E_\alpha)$, de façon que

$$(6.3.) \quad T_\beta = \bar{\pi}_{\beta\alpha} T_\alpha, \quad \text{dès que } \alpha \geq \beta,$$

(condition de compatibilité par rapport aux semi-normes). Alors nous poserons $T_\alpha = \bar{\pi}_\alpha T$ et nous dirons que T_α est la *composante* de T suivant $C_\infty(K; E_\alpha)$ ou simplement la *composante- α* de T .

Nous désignerons par $\bar{C}_\infty(K; E)$ l'ensemble de toutes les distributions au sens large, à valeurs dans E , définies dans K . On introduit dans cet ensemble une structure d'espace vectoriel complexe, en définissant la somme et le produit par scalaires tout simplement par les formules

$$(T_\alpha) + (U_\alpha) = (T_\alpha + U_\alpha), \quad \lambda(T_\alpha) = (\lambda T_\alpha).$$

En résumé: $\bar{C}_\infty(K; E)$ est la limite projective des espaces vectoriels $C_\infty(K; E_\alpha)$ par rapport aux projections $\bar{\pi}_{\alpha\beta}$ [cf. n.º 2, e); on a évidemment $\bar{\pi}_{\alpha\beta} \bar{\pi}_{\beta\gamma} = \bar{\pi}_{\alpha\gamma}$ pour $\gamma \leq \beta \leq \alpha$].

Ainsi, par exemple, dans le cas où $E = \mathcal{D}_K$, l'expression $D_u^{m+2} G_m(x, u)$ représente la distribution au sens large, à valeurs dans \mathcal{D}_K , qui pour chaque entier m , est la dérivée d'ordre $m+2$ de la fonction $G_m(x, u)$ de u à valeurs $\mathcal{D}^m(K)$.

Les opérateurs de dérivation, D , et de translation, τ_h , s'étendent aussitôt à $\bar{C}_\infty(K; E)$, en leur imposant de commuter avec les projections $\bar{\pi}_\alpha$:

$$\bar{\pi}_\alpha(DT) = D(\bar{\pi}_\alpha T), \quad \bar{\pi}_\alpha(\tau_h T) = \tau_h(\bar{\pi}_\alpha T)$$

La même méthode d'extension peut s'appliquer aux opérateurs $\bar{\rho}$ dont il est question dans la déf. 6.1.

7. Applications linéaires continues de \mathcal{D}_K dans un espace localement convexe complet (K compact). Conservons les conventions du n.º précédent relativement à K et E , et proposons-nous de déterminer toutes les applications linéaires continues de \mathcal{D}_K dans E :

1^{ère} partie. Soit Θ une telle application. Alors, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, l'opérateur $\Theta_\alpha = \pi_\alpha \cdot \Theta$ est une application linéaire continue de \mathcal{D}_K dans l'espace E_α (de Banach). Son indicatrice est donc une distribution

$$(7.1) \quad T_\alpha := D^{\beta_\alpha} f_\alpha, \quad f_\alpha \in C(K; E_\alpha),$$

définie dans K à valeurs dans E_α (cf. th. 4.1 et déf. 4.1) et comme, si $\beta \leq \alpha$, on a $\pi_\beta = \pi_{\beta_\alpha} \pi_\alpha$ et, par conséquent, $\Theta_\beta = \pi_{\beta_\alpha} \Theta_\alpha$, on aura aussi, d'après le théorème 4.1 et la déf. 6.1:

$$T_\beta = \bar{\pi}_{\beta_\alpha} T_\alpha \quad \text{dès que } \beta \leq \alpha,$$

ce qui veut dire que le système (T_α) est une distribution au sens large dans K , à valeurs dans E .

2^{ème} partie. Soit $T = (T_\alpha)$, réciproquement, une telle distribution, donnée d'avance. Alors, pour tout α , T_α est l'indicatrice d'une application linéaire continue Θ_α de \mathcal{D}_K dans E_α et, puisque, si $\beta \leq \alpha$, on a $T_\beta = \bar{\pi}_{\beta_\alpha} T_\alpha$, on voit aussitôt que $\Theta_\beta = \pi_{\beta_\alpha} \Theta_\alpha$ pour $\beta \leq \alpha$. On définit donc ainsi une application linéaire continue Θ de \mathcal{D}_K dans E , telle que

$$\pi_\alpha(\Theta \varphi) = \Theta_\alpha \varphi, \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathcal{A} \text{ et toute } \varphi \in \mathcal{D}_K,$$

c. a. d. telle que $\pi_\alpha \Theta = \Theta_\alpha$.

Nous avons ainsi démontré:

THÉOREME 7.1. *Il existe une correspondance biunivoque $\Theta \leftrightarrow T$ entre les applications linéaires continues Θ de \mathcal{D}_K dans E et les distributions (au sens large) T définies dans K , à valeurs dans E . Dans cette correspondance, T est la distribution (au sens large) dont chaque composante $T_\alpha = \bar{\pi}_\alpha T$ est l'indicatrice de l'application $\Theta_\alpha = \pi_\alpha \cdot \Theta$ de \mathcal{D}_K dans E_α ; ou, ce qui revient au même, Θ est l'application dont chaque composante, $\Theta_\alpha = \pi_\alpha \cdot \Theta$, est l'application de \mathcal{D}_K dans E_α donnée par*

$$\Theta_\alpha \varphi = \int_K T_\alpha(x) \varphi(x) dx,$$

où $T_\alpha = \bar{\pi}_\alpha T$ [cf. (4.7)].

Il sera encore naturel d'écrire alors

$$\Theta \varphi = \int_K T(x) \varphi(x) dx,$$

ce qui sera justifié par une généralisation, algébrique et analytique, de la notion d'intégrale (n.º 26).

Si l'on rappelle les définitions de «somme» et de «produit par scalaires» dans $\overline{C}_\infty(K; E)$ on voit aussitôt que :

SCHOLIE. *La correspondance $\Theta \rightarrow T$ établie est un isomorphisme vectoriel de $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_K; E)$ sur $\overline{C}_\infty(K; E)$.*

DÉFINITION 7.1. La distribution au sens large T , correspondante à Θ d'après le théorème, est nommée *l'indicatrice* de Θ , et on pose alors : $T = z\Theta$. À son tour, cette correspondance $z: \Theta \rightarrow T$ est dite *l'application canonique* de $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_K; E)$ sur $\overline{C}_\infty(K; E)$.

REMARQUE. Le théorème se généralise immédiatement au cas où E est la limite projective [cf. n.º 2, e)] d'un spectre quelconque d'espaces localement convexes E_λ^* , $\lambda \in \mathcal{L}$, par rapport à des applications linéaires continues $h_{\lambda \mu}$ (de E_μ^* dans E_λ^*), chaque «projection» h_λ de E dans E_λ^* se prolongeant en une «projection» \bar{h}_λ de $\overline{C}_\infty(K; E)$ dans $\overline{C}_\infty(K; E_\lambda^*)$, qui joue le rôle des applications $\bar{\pi}_z$ dans la généralisation du théorème.

8. Applications linéaires continues de \mathfrak{D}_I dans un espace localement convexe (I ouvert). Soit encore E un espace localement convexe complet, limite projective des espaces de Banach E_z par rapport aux applications $\pi_{z\beta}$. Soient d'autre part $T = (T_\alpha)$ une distribution au sens large définie dans l'intervalle compact K et à valeurs dans E et K' un sous-intervalle compact de K . On nomme *restriction*, $\varrho_{K'K} T$, de T à K' , la distribution $(\varrho_{K'K} T_\alpha)$ dont la composante- α est la restriction à K' de T_α [cf. n.º 2, c)].

Soit maintenant I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On appelle *distribution au sens large définie dans I et à valeurs dans E* , naturellement, tout système (T_K) que l'on obtienne en faisant correspondre à chaque intervalle compact $K \subset I$ une distribution (au sens large) $T_K \in C_\infty(K; E)$, de telle façon que

$$\varrho_{K'K} T_K = T_{K'}, \quad \text{toutes les fois que } K' \subset K$$

(compatibilité par rapport aux $\varrho_{K'K}$). On désigne par $\overline{C}_\pi(I; E)$ l'ensemble de toutes les distributions au sens large dans I , à valeurs dans E , et on y définit, comme pour les distributions usuelles, les notions de «somme», «produit par scalaires», «déri-

vées», «restrictions», etc. En particulier, donc, $\bar{C}_\pi(I; E)$ est la limite projective des espaces vectorielles $\bar{C}_\infty(K; E)$ par rapport aux opérateurs de restriction, et on voit comme au n.º 5 que :

THÉOREME 8.1. *Il existe un isomorphisme $\Theta \leftrightarrow T$ entre $\mathcal{L}(\mathcal{D}_I; E)$ et $\bar{C}_\pi(I; E)$, où T est la distribution (au sens large) dont la restriction T_K à chaque intervalle compact $K \subset I$ est l'indicatrice de la restriction Θ_K de Θ à l'espace $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{D}_I$.*

Dans ces conditions, il est encore naturel d'appeler T l'indicatrice de Θ et de poser $T = \varkappa \Theta$, en nommant \varkappa l'application canonique de $\mathcal{L}(\mathcal{D}_I; E)$ sur $\bar{C}_\pi(I; E)$. Enfin, le th. 8.1. peut encore se généraliser au cas où E est la limite projective d'un spectre quelconque d'espaces localement convexes E_λ^* , $\lambda \in \mathcal{L}$, par rapport à des applications linéaires $h_{\lambda\mu}$.

9. La notion d'ordre pour les distributions vectorielles. *Dorénavant, pour commodité de langage, nous dirons simplement «distribution» au lieu de «distribution au sens large».*

Soient I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et L un sous-intervalle, ouvert ou compact, de I . On dit que deux distributions vectorielles U, V , définies dans I , sont égales dans L , et on écrit

$$U = V \text{ dans } L,$$

si les restrictions de U et V à L sont la même distribution dans cet intervalle [cf. n.º 2, c)]. *Il ne faut pas oublier, d'ailleurs, que les distributions dans un intervalle compact K s'identifient aux distributions dans l'ouvert $\overset{\circ}{K}$, qui peuvent se prolonger à un ouvert contenant K [cf. n.º 2, c)].*

DÉFINITIONS 9.1. On dit qu'une distribution vectorielle T définie dans I est d'ordre fini dans L , s'il existe un entier $m \geq 0$ et une fonction vectorielle continue f , tels que: $T = D^m f$ dans L . On nomme ordre de T dans L le plus petit entier m tel qu'il existe une fonction continue f vérifiant cette condition. La distribution T sera dite d'ordre infini dans L , si T n'est pas d'ordre fini dans L (1).

(1) C'est là une notion d'ordre due à H. KÖNIG, différente de celle de L. SCHWARTZ.

D'après ce que l'on a vu au n.º 4, si la distribution T prend ses valeurs dans un espace de Banach E , elle est d'ordre fini localement, c'est-à-dire dans tout sous-intervalle compact K de son domaine.

Cela est encore vrai pour d'autres catégories d'espaces localement convexes E qui ne sont pas des espaces de Banach; nous nous bornerons à une catégorie d'espaces, suffisante pour les applications que nous avons l'intention de faire ici.

Nous appelons espace (\mathfrak{S}_2) tout espace localement convexe E qui s'exprime comme limite inductive d'une suite compactifiante (E_n) d'espaces normés, i. e. d'une suite croissante d'espaces normés E_n tels que l'application identique $E_n \rightarrow E_{n+1}$ est complètement continue pour tout n (cf. [17]). Les espaces (\mathfrak{S}_2) sont complets et réflexifs; nous appelons espaces (\mathfrak{S}_1) leurs duals forts⁽¹⁾. [Ces espaces (\mathfrak{S}_1) sont les mêmes que les «espaces de Schwartz métrisables complets», suivant GROTHENDIECK]. Parmi les nombreuses propriétés remarquables des espaces (\mathfrak{S}_2) , nous avons besoin de la propriété suivante:

Soit M un espace localement convexe métrisable et E un espace (\mathfrak{S}_2) , limite inductive d'une suite compactifiante (E_n) d'espaces normés. Alors, pour qu'une application linéaire Φ de M dans E soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un entier n tel que Φ soit une application continue de M dans l'espace normé E_n .

Pour s'en convaincre il suffit d'observer que, le filtre des voisinages de 0 dans l'espace métrisable M étant à base dénombrable, il est transformé par Φ en un filtre à base dénombrable, et que tout filtre \mathfrak{F} à base dénombrable, convergeant vers 0 dans un espace E du type (\mathfrak{S}_2) , est borné, i. e., il existe un ensemble $X \in \mathfrak{F}$ borné dans E (cf. la dém. du cor. 2, p. 401, dans [17]).

Or, si l'on rappelle que \mathfrak{D}_K est métrisable (K étant un intervalle compact), on obtient aussitôt le résultat suivant:

THÉOREME 9.1. *Soit E un espace (\mathfrak{S}_2) , limite inductive d'une suite compactifiante (E_n) d'espaces de Banach. Alors, pour toute distribution T définie dans un intervalle compact K et à valeurs dans E , il existe un entier n tel que T est une distribution dans K à valeurs dans E_n , donc d'ordre fini.*

⁽¹⁾ Dans [17] nous appelons *suites régulières* les suites compactifiantes, *espaces (\mathfrak{M}^*)* les espaces (\mathfrak{S}_1) et *espaces $(\mathfrak{L}\mathfrak{M}^*)$* les espaces (\mathfrak{S}_2) .

REMARQUES. I) Dans l'énoncé du th. 9.1. on suppose que E est la limite inductive d'une suite compactifiante d'espaces de Banach. Or on démontre (cf. [17] p. 11, lemme) que toute suite compactifiante (E_n) d'espaces normés peut être remplacée par une suite compactifiante (E_n^*) d'espaces de Banach donnant la même limite inductive.

II) Ces résultats s'étendent aux espaces $(\mathcal{D}'\mathfrak{F})$ (suivant GROTHENDIECK), dont les espaces (\mathcal{G}_2) sont un cas particulier.

10. Concrétisations de l'espace E . Théorème des noyaux. En particulier, l'espace E considéré dans le th. 9.1. peut être l'espace $C_\infty(K^*)$ des distributions *numériques* définies dans un deuxième intervalle compact K^* de \mathbf{R} ; nous avons démontré dans [16] que $C_\infty(K^*)$ est, justement, la limite inductive d'une suite *compactifiante* d'espaces normés, qui sont les espaces $C_n(K^*)$, images de $C(K^*)$ par les opérateurs de dérivation D^n :

$$C_n(K^*) = D^n C(K^*), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Il en résulte la proposition suivante:

LEMME. Soient K et K^* deux intervalles compacts de \mathbf{R} . Pour qu'une fonction $f(y)$ définie dans K et à valeurs dans $C_\infty(K^*)$ soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un entier n et une fonction numérique $F(x, y)$ continue dans $K^* \times K$ tels que

$$f(y) = D_x^n F(\hat{x}, y), \quad \text{pour tout } y \in K.$$

Démonstration. Soit d'abord $f(y)$ une fonction continue dans K , à valeurs dans $C_\infty(K^*)$. Puisque K est compact, l'image $f(K)$ de K par f est compacte dans $C_\infty(K^*)$, donc contenue et compacte dans un espace $C_n(K^*)$ (cf. [17], th. 2). Il en découle que f est continue dans K au sens de la topologie de $C_n(K^*) = D^n C(K^*)$. Chaque distribution $T \in C_n(K^*)$ est de la forme $T = D^n g$, où g est une fonction continue dans K^* , déterminée à un polynôme de degré $< n$ près. Mais on peut éliminer cette indétermination, comme nous l'avons indiqué dans [16], en fixant arbitrairement n points distincts c_1, \dots, c_n de K^* et en remplaçant g par la fonction $g_0 = g - P$, où P est le polynôme de degré $< n$ tel que $P(c_i) = g(c_i)$, $i = 1, \dots, n$. Alors la formule d'interpolation de Lagrange montre que l'application $g \rightarrow g_0$ est un projecteur continu de $C(K)$ sur son sous-espace, $C_{0,n}(K^*)$,

des fonctions continues dans K^* s'annulant aux points c_i ; comme le seul polynôme de degré $< n$ appartenant à ce sous-espace est 0, on voit aussitôt que la correspondance $f_0 \rightarrow T = D^n f_0$ est un isomorphisme vectoriel-topologique de l'espace $C_{0,n}(K^*)$ sur $C_n(K^*)$. Ainsi la fonction $f(y)$ continue à valeurs dans $C_n(K^*)$ correspond à une fonction $\bar{f}(y)$ continue à valeurs dans $C_{0,n}(K^*)$ et il est classique qu'une telle fonction s'identifie à une fonction numérique $F(x, y)$ continue sur $K^* \times K$:

$$\bar{f}(y) = F(\hat{x}, y), \quad \text{pour tout } y \in K,$$

d'où

$$f(y) = D_x^n F(\hat{x}, y), \quad \text{pour tout } y \in K,$$

c. q. f. d.

La réciproque est évidente.

Du lemme et du th. 9. 1, il résulte que toute distribution T définie dans K et à valeurs dans $C_\infty(K^*)$ est de la forme: (1)

$$T(y) = D_x^n D_y^p F(\hat{x}, y),$$

où n, p sont des entiers non négatifs et $F(x, y)$ une fonction de deux variables, continue dans $K^* \times K$ (et réciproquement).

Alors $T(y)$ s'identifie à une distribution scalaire $T(x, y)$ définie dans $K^* \times K$ (et réciproquement); c'est-à-dire, on a

$$C_\infty(K; C_\infty(K^*)) \cong C_\infty(K^* \times K).$$

On retrouve ainsi, compte tenu du th. 4. 1, l'important «théorème des noyaux» de SCHWARTZ, dans le cas des intervalles compacts K, K^* :

THÉORÈME 10. 1. *Il existe une correspondance biunivoque $\Theta \leftrightarrow T$ (isomorphisme vectoriel) entre les applications linéaires continues Θ de \mathcal{D}_K dans $C_\infty(K^*)$ et les distributions numériques T de deux variables définies dans $K^* \times K$, de telle façon que, si l'on a $T = D_x^n D_y^p F(x, y)$ (avec n, p entiers, $F(x, y)$ fonction continue sur $K^* \times K$), on aura:*

(1) Pour commodité, nous adoptons ici la notation fonctionnelle $T(y)$ pour la distribution T , bien que la valeur $T(y)$ de T au point y ne soit pas en général définie.

$$\begin{aligned}
 (10.1) \quad \Theta \varphi &= (-1)^p \int_K D_x^n F(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy \\
 &= (-1)^p D_x^n \int_K F(x, y) \varphi^{(p)}(y) dy
 \end{aligned}$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}_K$.

DÉFINITION 10. 1. Nous appellerons *noyau* d'une application linéaire continue Θ de \mathcal{D}_K dans $C_\infty(K^*)$ la distribution $T \in C_\infty(K^* \times K)$ qui représente Θ d'après le théorème 10. 1.

Compte tenu de (4. 7) la formule (10. 1) pourra encore s'écrire sous la forme plus suggestive (cf. n.º 26):

$$\Theta \varphi = \int_K T(\hat{x}, y) \varphi(y) dy, \text{ pour } \varphi \in \mathcal{D}_K.$$

Soit maintenant

$$E = C_\pi(I^*)$$

où I^* est un intervalle ouvert. Dans ce cas, une distribution T dans K à valeurs dans E n'est plus, nécessairement, d'ordre fini. Mais, si l'on observe que $C_\pi(I^*)$ est la limite projective, par rapport aux opérateurs de restriction, des espaces $C_\infty(K^*)$, où K^* est un intervalle compact variable contenu dans I^* , on voit aussitôt que, pour tout K^* dans ces conditions, $\bar{\rho}_{K^*} T$ est une distribution⁽¹⁾ dans K à valeurs dans $C_\infty(K^*)$, qui s'identifie à une distribution $U_{K^*} \in C_\infty(K^* \times K)$; et que ces distributions U_{K^*} déterminent, à son tour, une distribution $U \in C_\infty(I^* \times K)$, dont la restriction à chaque intervalle $K^* \times K$, $K^* \subset I^*$, est précisément U_{K^*} . Ainsi, donc, T s'identifie encore à une distribution scalaire de deux variables sur $I^* \times K$. Et de même pour les distributions définies dans un intervalle ouvert I et à valeurs dans $C_\pi(I^*)$.

Nous pouvons donc présenter le «théorème des noyaux», dans le cas de deux intervalles ouverts I et I^* , sous la forme suivante :

THÉORÈME 10. 2. *Il existe une correspondance biunivoque $\Theta \leftrightarrow T$ entre les applications linéaires continues Θ de \mathcal{D}_I dans*

(1) Cf. n.º 6. Il ne faut pas oublier que $\bar{\rho}_{K^*}$ agit dans l'espace $C_\pi(I^*)$ où T prend ses valeurs. Voir aussi la remarque au th. 7. 1

$C_\pi(I^*)$ et les distributions $T \in C_\pi(I^* \times I)$. Cette correspondance est définie de la façon suivante: pour tout intervalle compact $K \subset I$ et tout intervalle compact $K^* \subset I^*$, la restriction de T à $K^* \times K$ est le noyau de la restriction de $\Theta_{K^*} = \varrho_{K^*} \cdot \Theta$ [application de \mathcal{D}_I dans $C_\infty(K^*)$] au sous-espace \mathcal{D}_K de \mathcal{D}_I .

Il est encore naturel d'appeler *noyau* de Θ la distribution T qui la représente et on pourra écrire, moyennant une convenable définition vectoriel-topologique de l'intégrale:

$$\Theta \varphi = \int_I T(\hat{x}, y) \varphi(y) dy, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{D}_I.$$

Toutefois, en pratique, cette formule s'interprète simplement de la façon suivante: soit K un sous-intervalle compact de I contenant le support de φ ; alors, pour tout intervalle compact $K^* \subset I^*$, on a

$$(\Theta \varphi)_{K^*} = \int_K T_{K^*, K}(\hat{x}, y) \varphi(y) dy,$$

où $(\Theta \varphi)_{K^*}$ désigne la restriction de la distribution scalaire $\Theta \varphi$ à K^* et $T_{K^*, K}$ la restriction de T à $K^* \times K$, l'intégrale du second membre ayant la signification précédente (th. 10. 1).

11. Applications linéaires continues de $C^\infty(K)$ dans un espace localement convexe (K compact). La formule de représentation (3.3) n'est pas suffisante pour les éléments φ de $\mathcal{E}_K = C^\infty(K)$, où K est un intervalle compact de \mathbb{R} (cf. n.º 3). Il faut employer alors la formule de Taylor complète:

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{m+1} \frac{(x-b)^h}{h!} \varphi^{(h)}(b) + \int_b^x \frac{(x-u)^{m+1}}{(m+1)!} \varphi^{(m+2)}(u) du,$$

ou encore

$$(11.1) \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{(x-b)^k}{k!} \varphi^{(k)}(b) + (-1)^m \int_a^b J_m(u-x) \varphi^{(m+2)}(u) du,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{E}_K$.

Compte tenu de la proposition (3.1), voit aussitôt que (11.1) fournit une représentation des éléments de \mathcal{E}_K en fonction des éléments $J_m(u-\hat{x})$ de $C^m(K)$, pour $u \in K$, et des dérivées de cette fonction de u pour $u \rightarrow b^+$, au sens de la topologie de $C^n(K)$. C'est là bien la clef pour la recherche des applications linéaires continues de \mathcal{E}_K dans un espace localement convexe.

Soit d'abord E un espace de Banach et soit $\Theta \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_K; E)$. Il existe alors un entier $m \geq 0$ tel que l'on peut prolonger Θ en une application linéaire continue Θ_m de $C^m(K)$ dans E . Posons

$$(11.2) \quad f(u) = \Theta_m J_m(u - \hat{x}), \quad \text{pour tout } u \in \mathbf{R},$$

d'où

$$(11.3) \quad \Theta_m \frac{(\hat{x} - b)^k}{k!} = (-1)^k D_{u \rightarrow b^+}^{m+1-k} \Theta_m J_m(u - \hat{x}) = (-1)^k f^{(m+1-k)}(b^+)$$

puisque $\Theta_m \varphi = \Theta \varphi$ pour toute $\varphi \in \mathcal{E}_K$ et que, l'opérateur Θ étant continu dans \mathcal{E}_K , il est permutable avec la dérivation par rapport au paramètre u . On déduit alors de (11.1):

$$\Theta \varphi = \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k f^{(m+1-k)}(b^+) \varphi^{(k)}(b) + (-1)^m \int_a^b f(u) \varphi^{(m+2)}(u) du.$$

D'autre part, puisque la fonction $J_m(u - \hat{x})$ de u , continue dans \mathbf{R} , à valeurs dans \mathcal{E}_K , se réduit à 0 pour $u \leq a$ et à un polynôme de degré $< m+2$ (à coefficients dans \mathcal{E}_K) pour $u \geq b$, on déduit de (11.2) que $f(u)$ est une fonction continue dans \mathbf{R} (à valeurs dans E), nulle pour $u \leq a$ et entière de degré $< m+2$ pour $u \geq b$. Donc la distribution

$$T = D^{m+2} f$$

est nulle en dehors de K (i. e. son support est contenu dans K). On voit d'ailleurs, comme au n.º 4, que T est univoquement déterminée par Θ .

Considérons, réciproquement, une distribution $T = D^p F$, $F \in C(\mathbf{R}; E)$, à support contenu dans K . On peut supposer F nulle à gauche de a , puisque, s'il n'était pas ainsi, F serait un polynôme P de degré $< p$ dans $]-\infty, a]$ et on pourrait alors remplacer F par $\bar{F} = F - P$, vu que $D^p \bar{F} = D^p F$. Alors, si l'on pose, pour toute $\varphi \in \mathcal{E}_K$:

$$(11.4) \quad \Theta \varphi = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k F^{(p-1-k)}(b^+) \varphi^{(k)}(b) + (-1)^p \int_a^b F(u) \varphi^{(p)}(u) du,$$

on voit aisément, comme au n.º 4, que (11.4) définit une application linéaire continue Θ de \mathcal{E}_K dans E et que l'on a

$$T = D^p F = D_u^{p+2} \Theta_p J_p(u - \hat{x}).$$

En conclusion:

THÉORÈME 11.1. *Il existe une correspondance biunivoque $\Theta \leftrightarrow T$ entre les applications linéaires continues Θ de $C^\infty(K)$ dans un espace de Banach E et les distributions T dans \mathbf{R} , à valeurs dans E , qui sont nulles en dehors de K . La correspondance $T \rightarrow \Theta$ est donnée par (11.4), en supposant $T = D^p F$, où F est une fonction continue à valeurs dans E , nulle pour $x \leq a$. La correspondance $\Theta \rightarrow T$ est donnée par $T = D^{m+2} f$, avec $f(u) = \Theta_m J_m(\hat{x} - u)$, où Θ_m est le prolongement continu de Θ à un espace $C^m(K)$.*

On pourra encore écrire la formule (11.4) sous la forme beaucoup plus simple

$$(11.5) \quad \Theta \varphi = \int_K T(u) \varphi(u) du,$$

moyennant une généralisation naturelle de la notion d'intégrale, et on dira que T est la distribution indicatrice de Θ .

Supposons maintenant que E est un espace localement convexe complet quelconque et soit encore $\Theta \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_K; E)$. Alors E est la limite projective d'un système d'espaces de Banach E_α par rapport aux projections $\pi_{\alpha\beta}$ (n.º 6) et, pour tout α , la composante $\pi_\alpha \Theta$ de Θ sera l'application Θ_α de \mathbb{E}_K dans E_α définie par

$$\Theta_\alpha \varphi = \int_K T_\alpha(u) \varphi(u) du, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathbb{E}_K,$$

où T_α est la distribution indicatrice de Θ_α , donnée par le th. 11.1. On voit ainsi que Θ est déterminée par la distribution $T = (T_\alpha)$ à valeurs dans E et à support contenu dans K (distribution indicatrice de Θ); et on pourra encore écrire dans ce cas la formule (11.5), par une nouvelle généralisation.

12. Applications linéaires continues de $C^\infty(I)$ dans E (I ouvert) Considérons enfin l'espace $C^\infty(I)$ ou \mathbb{E}_I des fonctions numériques indéfiniment dérivables dans un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , muni de la topologie de la convergence uniforme de ces fonctions et de toutes leurs dérivées sur les parties compactes de I ; et soit E un espace de Banach. L'espace \mathbb{E}_I s'exprime comme limite projective des espaces \mathbb{E}_K , où K est un sous-intervalle compact de I . Donc (cf. [17], p. 395, prop. 4), pour toute application $\Theta \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_I; E)$ il existe un $K \subset I$ et une application $\Theta_K \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_K; E)$, tels que

$$\Theta \varphi = \Theta_K \varphi_K = \int_K T(x) \varphi(x) dx, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathbb{E}_I,$$

où φ_K désigne la restriction de φ à K et T la distribution indicatrice de Θ_K . On pourra dire aussi que T est la distribution indicatrice de Θ et écrire

$$\Theta \varphi = \int_I T(x) \varphi(x) dx.$$

Donc:

THÉORÈME 12.1. *L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{E}_I; E)$ des applications linéaires continues de \mathbb{E}_I dans l'espace de Banach E est isomorphe à l'espace des distributions dans \mathbb{R} , à valeurs dans E , dont le support est borné et contenu dans I .*

Enfin, si E est un espace localement convexe complet quelconque, donc la limite projective d'un système d'espaces de Banach E_α par rapport aux projections $\pi_{\alpha\beta}$, toute application $\Theta \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_I; E)$ détermine une application $\Theta_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_I; E_\alpha)$ pour tout α , dont l'indicatrice est une distribution T_α à support borné contenu dans I , et Θ est déterminée par la distribution $T = (T_\alpha)$. La réciproque est aussi vraie. Donc:

THÉORÈME 12.2. *L'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathbb{E}_I; E)$ est isomorphe à l'espace des distributions $T = (T_\alpha)$ dans \mathbb{R} , à valeurs dans E , dont chaque composante T_α est à support borné (dépendant de α) contenu dans I .*

§ 2. Étude vectoriel-topologique des espaces de distributions vectorielles

13. Structure topologique de l'espace $C_\infty(K; E)$. Soit encore $K = [a, b]$ un intervalle compact de \mathbf{R} et soit E un espace de Banach. Nous désignerons par \mathfrak{T}_0 la topologie de la convergence uniforme sur K des fonctions $f \in C(K; E)$, c'est-à-dire la topologie définie par la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in K} \|f(x)\|,$$

où, dans le second membre, on emploie évidemment la norme de l'espace E . À l'espace $C_m(K; E)$, constitué par les distributions $T = D^m f$, avec $f \in C(K; E)$, il est naturel d'attribuer la plus fine topologie, \mathfrak{T}_m , qui rende continue l'application $f \rightarrow D^m f$ de l'espace $C(K; E)$ (muni de la topologie \mathfrak{T}_0) sur l'espace $C_m(K; E)$, $m = 0, 1, 2, \dots$; alors la boule unité, \mathfrak{U}_m , dans $C_m(K; E)$ sera évidemment l'image de la boule unité, \mathfrak{U}_0 , de $C(K; E)$, par D^m , c'est-à-dire, l'ensemble des distributions

$$T = D^m f, \quad \text{avec } f \in \mathfrak{U}_0 \text{ (i. e. } \|f\| \leq 1).$$

Ainsi l'espace $C_m(K; E)$ devient isomorphe, au sens vectoriel-topologique, à l'espace quotient de $C(K; E)$ par le noyau \mathfrak{N}_m de D^m , lequel est constitué par les polynômes de degré $< m$ à coefficients dans E .

Or, pour tout m , \mathfrak{N}_m est fermé dans $C(K; E)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer m points distincts c_1, \dots, c_m dans l'intervalle K et l'opération π_m qui, à chaque fonction $f \in C(K; E)$, fait correspondre le polynôme P de degré $\leq m - 1$ tel que $P(c_i) = f(c_i)$, $i = 1, \dots, m$; la formule d'interpolation de Lagrange montre alors que π_m est un projecteur continu de $C(K; E)$ sur \mathfrak{N}_m ; donc, si l'on considère une suite de polynômes $P_k \in \mathfrak{N}_m$, uniformément convergente sur K vers une fonction f , on aura $P_k = \pi_m P_k \rightarrow \pi_m f \in \mathfrak{N}_m$.

Il en résulte que, pour tout m , $C_m(K; E)$ est un espace normé, donc un espace de Banach, puisqu'il en est de même de $C(K; E)$. Et on a, sur $C_m(K; E)$, le critère de convergence suivant:

Pour que, dans $C_m(K; E)$, une suite de distributions T_k converge vers une distribution U , il faut et il suffit qu'il existe une

suite de fonctions f_k et une fonction g telles que: $T_k = D^m f_k$ pour tout k , $U = D^m g$, et $f_k \rightarrow g$ uniformément sur K .

À l'espace $C_\infty(K; E) = \bigcup_0^\infty C_p(K; E)$ il est maintenant naturel d'attribuer la plus fine topologie (d'espace localement convexe) qui rende continues les applications $f \rightarrow D^p f$ de $C(K; E)$ (muni de \mathfrak{T}_0) dans $C_\infty(K; E)$, pour $p = 0, 1, \dots$. Nous désignerons par \mathfrak{T}_∞ cette topologie; il est évident que \mathfrak{T}_∞ est la plus fine topologie d'espace localement convexe sur $C_\infty(K; E)$ qui induise, sur l'espace $C_p(K; E)$, pour tout p , une topologie moins fine que \mathfrak{T}_p : ainsi l'espace localement convexe $C_\infty(K; E)$ sera, *par définition*, la limite inductive localement convexe de la suite croissante d'espaces $C_p(K; E)$, $p = 0, 1, \dots$

PROPOSITION 13.1. *\mathfrak{T}_∞ est la plus fine topologie localement convexe sur $C_\infty(K; E)$ qui rende continu l'opérateur D de dérivation et induise sur $C(K; E)$ une topologie moins fine que \mathfrak{T}_0 (cf. [16], th. 6).*

Soit en effet \mathfrak{T}' une topologie localement convexe sur $C_\infty(K; E)$, rendant continue l'application D de cet espace dans lui-même et induisant sur $C(K; E)$ une topologie moins fine que \mathfrak{T}_0 . Alors, pour tout p , l'opérateur D^p sera encore continu et il en sera de même pour sa restriction à l'espace $C(K; E)$, muni de la topologie *plus fine* \mathfrak{T}_0 . Comme cette restriction est l'application $f \rightarrow D^p f$ de $C(K; E)$ sur $C_p(K; E)$, il s'ensuit que \mathfrak{T}' induit sur $C_p(K; E)$ une topologie moins fine que \mathfrak{T}_p pour tout p , puisque \mathfrak{T}_p est, par définition, la plus fine topologie sur $C_p(K; E)$ qui rende continue cette application. Donc \mathfrak{T}' est moins fine que \mathfrak{T}_∞ .

Il reste à voir que \mathfrak{T}_∞ rend continu l'opérateur D . Puisque $C_\infty(K; E)$, muni de \mathfrak{T}_∞ , est la limite inductive localement convexe des $C_p(K; E)$, il suffit de montrer, d'après une propriété caractéristique des limites inductives⁽¹⁾, que la restriction de D à l'espace $C_p(K; E)$, muni de \mathfrak{T}_p , est continue pour tout p . Mais cela est trivialement vrai, puisque, la boule unité \mathcal{U}_p de $C_p(K; E)$ étant, pour tout p , l'image de la boule unité \mathcal{U}_0 de

(1) Soit X un espace localement convexe, limite inductive d'une suite (X_n) d'espaces localement convexes; alors, pour qu'une application linéaire ϕ de X dans un autre espace localement convexe E soit continue, il faut et il suffit que, pour tout n , la restriction de ϕ à X_n soit une application linéaire continue de cet espace X_n dans E .

$C(K; E)$ par D^p , on a $\mathcal{U}_{p+1} = D^{p+1} \mathcal{U}_0 = D \mathcal{U}_p$ et, par suite, D définit une application continue de $C_p(K; E)$ dans $C_{p+1}(K; E)$, donc dans $C_\infty(K; E)$, muni de \mathfrak{T}_∞ .

Dans la suite, sauf indication expresse du contraire, nous considérons l'espace $C_\infty(K; E)$ muni de la topologie \mathfrak{T}_∞ : c'est donc \mathfrak{T}_∞ sa topologie naturelle. Rappelons que, pour Schwartz, l'espace des distributions dans K à valeurs dans E est, par définition, l'espace $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{D}_K; E)$, c'est-à-dire l'espace $\mathfrak{L}(\mathfrak{D}_K; E)$ (des applications linéaires continues de \mathfrak{D}_K dans E) muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de \mathfrak{D}_K . Nous avons déjà vu (n.º 4) qu'il existe un isomorphisme vectoriel \varkappa de $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{D}_K; E)$ sur $C_\infty(K; E)$. Il reste donc à montrer que l'application canonique \varkappa est aussi un isomorphisme topologique; nous le ferons plus loin, mais nous pouvons déjà établir la proposition suivante:

PROPOSITION 13.2. *L'application \varkappa^{-1} de $C_\infty(K; E)$ sur $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{D}_K; E)$ est continue.*

En effet, l'application $T \rightarrow \Theta$, que nous désignons par \varkappa^{-1} , est donnée par la formule (cf. n.º 4):

$$(13.1) \quad \Theta \varphi = (-1)^p \int_a^b \varphi^{(p)}(x) f(x) dx, \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K,$$

en supposant $T = D^p f$, $f \in C(K; E)$. Puisque l'espace $C_\infty(K; E)$ est, par définition, la limite inductive (localement convexe) des espaces normés $C_p(K; E)$, l'application \varkappa^{-1} sera continue, si sa restriction à chacun de ces espaces normés est continue. Soit donc p un entier quelconque ≥ 0 , et soit \mathfrak{H} une partie bornée arbitraire de \mathfrak{D}_K ; alors il existe un nombre λ_p tel que $\max_{x \in K} |\varphi^{(p)}(x)| < \lambda_p$ pour toute $\varphi \in \mathfrak{H}$ et de (13.1) on déduit

$$\|\Theta \varphi\| < (b-a) \lambda_p \|f\|,$$

pour toute $\varphi \in \mathfrak{H}$. Donc, étant donné un nombre $\delta > 0$, si l'on pose $\sigma = \delta \lambda_p^{-1} (b-a)^{-1}$, on aura $\|\Theta \varphi\| < \delta$ sur \mathfrak{H} , pourvu que $\|f\| \leq \sigma$, c'est-à-dire que $T = D^p f \in \sigma \mathcal{U}_p$, où \mathcal{U}_p est la boule unité de $C_p(K; E)$. Ainsi, la convergence des distributions T vers 0 dans cet espace entraîne la convergence uniforme des applications $\Theta = \varkappa^{-1} T$ vers 0 sur \mathfrak{H} , et cela veut dire que la restriction de \varkappa^{-1} à $C_p(K; E)$ est continue.

Nous pouvons encore établir directement le critère suivant pour les ensembles bornés dans $C_\infty(K; E)$:

THÉOREME 13. 2. *Pour qu'une partie \mathfrak{H} de $C_\infty(K; E)$ soit bornée dans cet espace, il faut et il suffit qu'il existe un entier p tel que \mathfrak{H} soit une partie bornée de l'espace normé $C_p(K; E)$.⁽¹⁾*

Démonstration. a) Soit \mathfrak{H} une partie bornée de $C_p(K; E)$. Alors, l'application identique de $C_p(K; E)$ dans $C_\infty(K; E)$ étant continue, \mathfrak{H} est aussi borné dans $C_\infty(K; E)$.

b) Soit réciproquement \mathfrak{H} une partie bornée de $C_\infty(K; E)$. L'application κ^{-1} , étant continue, transforme \mathfrak{H} en une partie bornée $\mathfrak{H}^* = \kappa^{-1}(\mathfrak{H})$ de $\mathfrak{L}_b(\mathfrak{D}_K; E)$. Alors, \mathfrak{D}_K étant un espace (\mathfrak{F}), donc tonnelé (cf. [2], chap. III), l'ensemble \mathfrak{H}^* est équicontinu (ibidem, th. 2, p. 27), i. e. il existe un entier p et un nombre $\delta > 0$, tels que:

$$\|\Theta \varphi\| < \delta \quad \text{pour} \quad \|\varphi\|_p < 1, \quad \text{quelle que soit} \quad \Theta \in \mathfrak{H}^*.$$

Soit Θ_p , pour toute $\Theta \in \mathfrak{H}^*$, le prolongement continu de Θ à \mathfrak{D}_K^p . Alors, \mathfrak{D}_K^p étant le complété de \mathfrak{D}_K pour la norme $\|\cdot\|_p$, on aura encore, pour toute $\Theta \in \mathfrak{H}^*$:

$$(13. 2) \quad \|\Theta_p \varphi\| < \delta, \quad \text{pour} \quad \|\varphi\|_p < 1, \quad \text{avec} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K^p.$$

Rappelons maintenant que l'indicatrice $T = \kappa \Theta$ de toute $\Theta \in \mathfrak{H}^*$ est donnée par (cf. n.º 4):

$$(13. 3) \quad T = D^{p+2} f, \quad \text{avec} \quad f(u) = \Theta_p G_p(\hat{x}, u), \quad u \in K.$$

La fonction $G_p(\hat{x}, u)$ de u , à valeurs dans \mathfrak{D}_K^p , étant continue sur K , il existe le $\sup \|G_p(\hat{x}, u)\|_p$ pour $u \in K$, que nous désignerons par λ . On aura donc, en vertu de (13. 2) et (13. 3):

$$\|f(u)\| < \lambda \delta, \quad \text{pour toute} \quad \Theta \in \mathfrak{H}^* \quad \text{et tout} \quad u \in K,$$

et cela veut dire que l'ensemble \mathfrak{H} est borné dans $C_p(K; E)$.

14. Produit tensoriel d'une distribution scalaire par un vecteur. Soit E un espace localement convexe quelconque et e un élément

(1) Ce résultat est une conséquence immédiate du th. 9 de GROTHENDIECK, *Sur les espaces (F) et (DF)*, «Summa Brasil. Math.», **3** (1954), p. 58-121. Mais, pour la commodité du lecteur, nous démontrons ici directement ce cas particulier.

de E . L'application $\lambda \rightarrow \lambda \mathbf{e}$ du corps des scalaires dans E est évidemment linéaire et continue; on peut donc (cf. n.º 6) la prolonger univoquement en une application linéaire de l'espace $C_\infty(K)$ (des distributions scalaires définies dans K) dans l'espace $C_\infty(K; E)$.

DÉFINITION 14. 1. Nous appellerons *produit tensoriel* (ou simplement *produit*) d'une distribution $T \in C_\infty(K)$ par le vecteur $\mathbf{e} \in E$, et nous désignerons par $T \otimes \mathbf{e}$ (ou simplement par $T \mathbf{e}$) la distribution vectorielle ainsi définie:

$$T \otimes \mathbf{e} = T \mathbf{e} = D_x^p [f(x) \mathbf{e}]$$

en supposant $T = D^p f$, $f \in C(K)$.

(On définit, d'une façon analogue, le produit tensoriel $\mathbf{e} \otimes T = \mathbf{e} T$).

Par exemple, le vecteur \mathbf{e} peut être une deuxième distribution $U = D^m g$, $g \in C(K)$; alors on aura

$$T \otimes U = D_x^p [f(x) D^m g],$$

ou, puisque $f(x) D^m g = D_y^m [f(x) g(y)]$, pour tout $x \in K$:

$$T \otimes U = D_x^p D_y^m [f(x) g(y)],$$

distribution des deux variables x, y .

DÉFINITION 14. 2. On appelle *produit tensoriel* (algébrique) de $C_\infty(K)$ par E , et on désigne par $C_\infty(K) \otimes E$, le sous-espace vectoriel de $C_\infty(K; E)$ engendré par les distributions de la forme $T \otimes \mathbf{e}$, où $T \in C_\infty(K)$ et $\mathbf{e} \in E$.

On définit, d'une façon analogue, le produit tensoriel $E \otimes C_\infty(K)$.

On voit aussitôt que le produit $T \otimes \mathbf{e}$ est *distributif à droite et à gauche*, et qu'il *permuté avec les scalaires* [c'est-à-dire: $\lambda(T \otimes \mathbf{e}) = (\lambda T) \otimes \mathbf{e} = T \otimes (\lambda \mathbf{e})$, pour tout scalaire λ]. En un mot: l'application canonique $(T, \mathbf{e}) \rightarrow T \mathbf{e}$ de $C_\infty(K) \times E$ dans $C_\infty(K) \otimes E$ est *bilinéaire*. Donc, toute application linéaire Φ de $C_\infty(K) \otimes E$ dans un espace vectoriel F détermine une application bilinéaire Φ^* de $C_\infty(K) \times E$ dans F , si l'on pose

$$\Phi^*(T, \mathbf{e}) = \Phi(T \mathbf{e}).$$

Réciproquement, si Ψ est une application bilinéaire de $C_\infty(K) \times E$ dans F , on définit une application linéaire Ψ de $C_\infty(K) \otimes E$ dans F , en posant

$$\bar{\Psi}(T e) = \Psi(T, e),$$

puisque $C_\infty(K) \otimes E$ est engendré par les distributions de la forme $T e$, et on pourra poser encore, *par définition*:

$$\bar{\Psi}(\sum \alpha_k T_k e_k) = \sum \alpha_k \Psi(T_k e_k) = \sum \alpha_k \Psi(T_k, e_k).$$

Ces considérations montrent que la définition adoptée de produit tensoriel rentre dans la notion algébrique générale de produit tensoriel de deux *espaces vectoriels quelconques* E, F . En effet (cf. [3]) le produit tensoriel $E \otimes F$ est défini (à un isomorphisme près) comme l'espace vectoriel U tel que les applications bilinéaires $\Phi(e, f)$ de $E \times F$ dans un troisième espace vectoriel G s'identifient aux applications linéaires $\bar{\Phi}(u)$ de U dans G , en posant

$$\Phi(e, f) = \bar{\Phi}(e \otimes f),$$

où $e \otimes f$ est l'élément de U déterminé par e et f .

Soient maintenant E, F deux espaces localement convexes quelconques. Rappelons la définition suivante de GROTHENDIECK (cf. [5], p. 28-32):

DÉFINITION 14. 3. On appelle *produit tensoriel topologique projectif* des espaces E, F le produit tensoriel $E \otimes F$ muni d'une topologie \mathfrak{T}_π , telle que les applications linéaires continues de $E \otimes F$ dans un espace localement convexe arbitraire G s'identifient aux applications bilinéaires *continues* de $E \times F$ dans G . Le complété de $E \otimes F$ pour cette topologie est appelé *produit tensoriel (topologique) projectif complété* de E et F et noté $E \hat{\otimes} F$.

REMARQUE. Cette topologie \mathfrak{T}_π , dont l'existence est démontrée par GROTHENDIECK ([6], th. 1), est *unique*: elle est évidemment la plus fine topologie sur $E \otimes F$ qui rende continue l'application canonique $(e, f) \rightarrow e \otimes f$ de $E \times F$ dans $E \otimes F$. D'ailleurs il est aisé de voir que, dans la déf. 14. 3, on peut imposer à G d'être *complet*, ce qui ne change par \mathfrak{T}_π .

15. La formule intégrale de Dirac pour les distributions vectorielles. Soit d'abord E un espace de Banach et considérons un

intervalle compact $K=[a, b]$ de \mathbf{R} . Soit d'autre part F une fonction appartenant à $C^2(K; E)$, c'est-à-dire une fonction à valeurs dans E et définie dans K , admettant dérivée seconde continue dans cet intervalle. En posant $f=F''$, il est aisé de voir, comme au n.º 3, que l'on a pour tout $x \in K$:

$$F(x) = \int_a^b J_1(x-u) f(u) du = \int_a^x (x-u) f(u) du$$

et même

$$(15. 1) \quad F = \int_a^b J_1(\hat{x}-u) f(u) du,$$

par rapport à la topologie de $C(K; E)$ [donc par rapport à celle de $C_\infty(K; E)$]; car, étant $J_1(\hat{x}-u)$ une fonction continue de u à valeurs dans $C(K)$ et $f \in C(K; E)$, le produit $J_1(\hat{x}-u) f(u)$ sera une fonction continue de u à valeurs dans $C(K; E)$.

Considérons maintenant une distribution quelconque $T \in C_\infty(K; E)$. Alors T sera de la forme $T = D^p f$, où p est un entier non négatif et $f \in C(K; E)$; on peut donc écrire

$$T = D^{p+2} F,$$

où F est donnée par (15. 1), d'où :

$$T = \int_a^b D_x^{p+2} [J_1(x-u) f(u)] du,$$

puisque, D étant une application linéaire continue de l'espace $C_\infty(K; E)$ dans lui-même, cet opérateur permute avec l'intégration de fonctions de u , à valeurs dans cet espace. D'autre part on sait que

$$D_x^{p+2} J_1(\hat{x}-u) = \partial_K^{(p)}(\hat{x}-u), \quad \text{pour tout } u \in \mathbf{R},$$

où nous désignons par $\partial_K^{(p)}(\hat{x}-u)$ la restriction à K de la distribution $\partial^{(p)}(\hat{x}-u)$ de x , l'indice K pouvant être omis s'il n'y a pas de confusion à craindre. Alors on peut écrire

$$(15. 2) \quad T = \int_a^b \partial_K^{(p)}(\hat{x}-u) f(u) du.$$

D'accord avec les conventions que nous établirons plus loin, cette formule pourra encore prendre l'aspect plus suggestif

$$(15.3) \quad T = \int_d^b \delta_K(\hat{x} - u) T(u) du,$$

compte tenu que (cf. [16], p. 155):

$$(15.4) \quad \delta_K^{(p)}(\hat{x} - u) = (-1)^p \frac{d^p}{du^p} \delta_K(\hat{x} - u)$$

C'est plutôt la variante (15.3) de (15.2) que l'on peut nommer *la (première) formule intégrale de Dirac*. Mais, en réalité, c'est sous la forme (15.2) que nous l'employons plus fréquemment dans la pratique.

On pourrait maintenant généraliser cette formule, sans difficulté, au cas où E est un espace localement convexe complet quelconque. Mais nous n'en aurons pas encore besoin.

16. Applications linéaires continues de $C_\infty(K; E)$ dans un espace localement convexe F . Soit E un espace de Banach (pour le moment nous nous bornerons à ce cas) et soit F un espace localement convexe quelconque, complet pour les suites. Dans ces conditions:

THÉOREME 16.1. *Il existe une correspondance biunivoque $\Phi \leftrightarrow \varphi$ entre les applications linéaires continues Φ de $C_\infty(K; E)$ dans F et les applications φ de \mathbf{R} dans $\mathcal{L}_b(E; F)$, indéfiniment différentiables et à support contenu dans K .⁽¹⁾ Cette correspondance est définie par les deux formules réciproques:*

$$\Phi(T) = (-1)^p \int_a^b \varphi^{(p)}(u) \circ f(u) du,$$

pour $T = D^p f$, avec $f \in C(K; E)$

$$\varphi(u) \circ e = \Phi[\delta_K(x - u)e], \text{ pour tout } e \in E, \text{ et tout } u \in \mathbf{R}^{(2)}.$$

(1) Rappelons que $\mathcal{L}_b(E; F)$ désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E . Mais dans ce cas, E étant normé, il suffit que la convergence soit uniforme sur une boule de centre 0 dans E pour qu'elle soit uniforme sur toute partie bornée de E .

(2) Pour chaque $u \in \mathbf{R}$, on désigne évidemment par $\varphi(u) \circ e$ l'image de e par l'opérateur $\varphi(u) \in \mathcal{L}(E; F)$, et de même pour $\varphi^{(n)}(u) \circ f(u)$, où $f(u) \in E$, $\varphi^{(n)}(u) \in \mathcal{L}(E; F)$, pour chaque $u \in \mathbf{R}$.

Démonstration. a) Soit Φ une application linéaire continue de $C_\infty(K; E)$ dans F . Alors, puisque, pour toute distribution $T = D^\sharp f$, avec $f \in C(K; E)$, on a

$$T = \int_K \delta_K^{(\sharp)}(x - u) f(u) du,$$

on aura évidemment

$$(16.1) \quad \Phi(T) = \int_K \Phi[\delta_K^{(\sharp)}(x - u) f(u)] du$$

Pour aller plus loin, rappelons (cf. n.º 14) que, si l'on pose

$$\Phi^*(S, e) = \Phi(Se),$$

pour toute distribution scalaire $S \in C_\infty(K)$ et tout $e \in E$, Φ^* sera une application bilinéaire de $C_\infty(K) \times E$ dans F , et il est aisé de voir que cette application est continue.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que Φ est, par hypothèse, une application linéaire continue de $C_\infty(K; E)$ dans F , et que, pour tout voisinage \mathfrak{B} de zéro dans l'espace $C_\infty(K; E)$, il existe un voisinage \mathfrak{U} de 0 dans $C_\infty(K)$, tel que \mathfrak{B} contient toute distribution de la forme Se , où $S \in \mathfrak{U}$ et e est un vecteur quelconque de norme 1 dans E (1).

Il s'ensuit que, si l'on pose encore

$$\bar{\Phi}(S) \circ e = \Phi^*(S, e),$$

$\bar{\Phi}$ sera une application linéaire continue de $C_\infty(K)$ dans l'espace $\mathcal{L}_b(E; F)$.

En effet, on peut choisir un système fondamental de voisinages de 0 dans $\mathcal{L}_b(E; F)$, où chaque voisinage \mathfrak{M}^* soit déterminé par un voisinage \mathfrak{B} de 0 dans F , \mathfrak{M}^* étant l'ensemble des applications Θ telles que $\Theta \circ e \in \mathfrak{B}$, pour tout vecteur e appartenant à la boule unité, B , de E ; or, quel que soit \mathfrak{B} , il existe, d'après ce qui précède, un voisinage \mathfrak{U} de 0 dans $C_\infty(K)$ tel que

$$\bar{\Phi}(S) \circ e \in \mathfrak{B}, \text{ pour tout } S \in \mathfrak{U} \text{ et tout } e \in B,$$

et cela veut dire que $\bar{\Phi}(\mathfrak{U}) \subset \mathfrak{M}^*$.

(1) En effet on démontre aisément que, $C_\infty(K; E)$ étant la limite inductive localement convexe des normes $C_n(K; E)$, il existe dans cet espace un système fondamental de voisinages de 0, de la forme $r_n^\infty \varepsilon_n (D^n \mathfrak{B}_0)$, où (ε_n) est une suite quelconque de scalaires et \mathfrak{B}_0 l'ensemble des $f \in C(K; E)$ de norme ≤ 1 ; r_n^∞ est le symbole d'enveloppe absolument convexe (cf. par exemple G. KÖTHE, *Über die Vollständigkeit einer Klasse lokalconvexer Räume*, Math. Zeit., vol. 52 (1950), p. 627-630).

Nous pouvons maintenant revenir à (16.1). Puisque $\bar{\Phi}$ est une application linéaire continue de $C_\infty(K)$ dans $\mathcal{L}_b(E;F)$, si l'on pose

$$(16.2) \quad \varphi(u) = \bar{\Phi}[\partial_K(\hat{x} - u)], \quad \text{pour tout } u \in \mathbf{R},$$

$\varphi(u)$ sera une fonction à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E;F)$, *indéfiniment dérivable et à support contenu dans K* , puisque $\partial_K(\hat{x} - u)$ est une fonction de u à valeurs dans $C_\infty(K)$, *indéfiniment dérivable et à support contenu dans K* . Par conséquent :

$$\varphi^{(p)}(u) = (-1)^p \bar{\Phi}[\partial_K^{(p)}(\hat{x} - u)],$$

d'où

$$\Phi[\partial_K^{(p)}(\hat{x} - u)f(u)] = (-1)^p \varphi^{(p)}(u) \circ f(u), \quad \text{pour tout } u \in \mathbf{R}.$$

On peut donc écrire (16.1) sous la forme

$$(16.3) \quad \Phi(T) = (-1)^p \int_a^b \varphi^{(p)}(u) \circ f(u) du \quad (T = D^p f),$$

ce que l'on pourra encore présenter plus simplement :

$$\Phi(T) = \int_a^b \varphi(u) \circ T(u) du,$$

d'après les conventions que nous introduirons plus loin.

b) Réciproquement, il est bien aisé de voir que toute application Φ de la forme (16.2), où $\varphi(u)$ est une fonction arbitraire, à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E;F)$, indéfiniment dérivable dans \mathbf{R} et à support contenu dans K , est une application linéaire continue de $C_\infty(K;E)$ dans F telle que

$$\Phi[\partial_K(\hat{x} - u)\mathbf{e}] = \int_a^b \varphi''(x) \circ [J_1(\hat{x} - u)\mathbf{e}] dx = \varphi(u) \circ \mathbf{e},$$

pour tout $\mathbf{e} \in E$, ce qui achève la démonstration.

[Il est à remarquer que, $\Phi^*(S, \mathbf{e})$ étant une application bilinéaire continue de $C_\infty(K) \times E$ dans F , la fonction $\varphi^{(p)}(u) \circ f(u)$ de u est continûment différentiable jusqu'à l'ordre où $f(u)$ le sera, la règle de dérivation du produit restant valable dans ce cas].

Cherchons maintenant l'expression générale des applications bilinéaires continues de $C_\infty(K) \times E$ dans F et soit Φ^* une telle application. Alors, si l'on pose, pour toute $S \in C_\infty(K)$ et tout $e \in E$

$$\bar{\Phi}(S) \circ e = \Phi^*(S, e),$$

on voit, comme plus haut, que $\bar{\Phi}$ est une application linéaire continue de $C_\infty(K)$ dans $\mathcal{L}_b(E; F)$. Donc, si l'on pose encore :

$$(16.3) \quad \varphi(u) = \bar{\Phi}[\partial_K(\hat{x} - u)], \quad \text{pour tout } u \in \mathbf{R},$$

on voit que $\varphi(u)$ est une fonction de u à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E; F)$, indéfiniment dérivable dans \mathbf{R} et nulle en dehors de K , et que l'on a

$$\Phi^*(S, e) = (-1)^m \int_a^b \varphi^{(m)}(u) \circ [f(u)e] du$$

en supposant $S = D^m f$, $f \in C(K)$, $e \in E$.

La réciproque est immédiate.

La fonction $\varphi(u)$ définie par (16.2) ou (16.3) est dite l'*indicatrice* de l'application linéaire Φ (ou de l'application bilinéaire Φ^*). Et, puisque l'addition et le produit par scalaires de ces applications se ramènent aux mêmes opérations exécutées sur leurs indicatrices, on conclut :

THÉOREME 16.2. *Il existe un isomorphisme algébrique $\Phi \leftrightarrow \Phi^*$ entre l'espace des applications linéaires continues Φ de $C_\infty(K; E)$ dans F et l'espace des applications bilinéaires continues Φ^* de $C_\infty(K) \times E$ dans F .*

Or la formule (15.2) de Dirac montre que le produit tensoriel algébrique $C_\infty(K) \otimes E$ est dense dans $C_\infty(K; E)$. Donc le th. 16.2 équivaut à dire que la topologie induite par $C_\infty(K; E)$ dans $C_\infty(K) \otimes E$ est la topologie \mathfrak{T}_π du produit tensoriel topologique projectif, puisque F peut être un espace localement convexe complet quelconque (cf. déf. 14.3, Remarque). Alors, puisque le complété de $C_\infty(K; E)$ s'identifie au complété de $C_\infty(K) \otimes E$ pour la topologie \mathfrak{T}_π , en vertu du théorème général d'unicité de la complétion (à un isomorphisme près), on trouve le résultat suivant :

COROLLAIRE. *$C_\infty(K; E)$ s'identifie à un sous-espace vectoriel topologique du produit tensoriel projectif complété $C_\infty(K) \otimes E$.*

Nous verrons plus loin que ce sous-espace coïncide précisément avec $C_\infty(K) \hat{\otimes} E$ et que l'on a

$$C_\infty(K) \hat{\otimes} E \cong \mathcal{L}_b(\mathcal{D}_K; E)$$

C'est ce fait que l'on exprime en disant que l'espace $C_\infty(K)$ est *nucléaire* (n.º 29).

17. Structure topologique des espaces de distributions à valeurs dans un espace localement convexe complet. Au n.º 6 nous avons introduit l'espace vectoriel $\overline{C}_\infty(K; E)$ des distributions (au sens large) définies dans un intervalle compact K et à valeurs dans un espace localement convexe complet E quelconque. Soit $(p_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un système fondamental de semi-normes dans E ; nous avons vu que E est alors la limite projective d'une famille d'espaces de Banach E_α , par rapport à certaines applications linéaires $\pi_{\beta\alpha}$, et que $\overline{C}_\infty(K; E)$ n'est que la limite projective algébrique des espaces $C_\infty(K; E_\alpha)$ par rapport aux applications $\overline{\pi}_{\beta\alpha}$ qui se déduisent des $\pi_{\beta\alpha}$.

Or nous avons déjà introduit une structure topologique dans les espaces $C_\infty(K; E_\alpha)$ (n.º 13). Il est maintenant naturel d'attribuer à $\overline{C}_\infty(K; E)$ la topologie de la limite projective des $C_\infty(K; E_\alpha)$ par rapport aux $\overline{\pi}_\alpha$. Nous désignerons par $\overline{\mathfrak{T}}_\infty$ cette topologie; $\overline{\mathfrak{T}}_\infty$ sera donc la moins fine topologie qui, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, rende continue l'application $\overline{\pi}_\alpha$ de $\overline{C}_\infty(K; E)$ sur $C_\infty(K; E_\alpha)$. Cela équivaut encore à dire qu'un filtre \mathfrak{F} converge vers 0 dans $\overline{C}_\infty(K; E)$ (au sens de $\overline{\mathfrak{T}}_\infty$), si et seulement si le filtre $\overline{\pi}_\alpha(\mathfrak{F})$ converge vers 0 dans $C_\infty(K; E_\alpha)$ pour tout α . En particulier, une partie \mathfrak{H} de $\overline{C}_\infty(K; E)$ sera bornée dans cet espace, si, pour tout α , l'ensemble $\overline{\pi}_\alpha(\mathfrak{H})$ est borné dans $C_\infty(K; E_\alpha)$. En outre, la prop. 13.2 se généralise aussitôt à ce cas.

On peut encore définir d'une façon analogue la topologie, que nous désignerons par $\overline{\mathfrak{T}}_\pi$, de l'espace $\overline{C}_\pi(I; E)$, où I est un intervalle ouvert quelconque de la droite et, en particulier, la topologie de l'espace de toutes les distributions sur \mathbb{R} à valeurs dans E .

18. Généralisation des résultats du n.º 16. Nous pouvons maintenant généraliser le th. 16.1 au cas de l'espace $\overline{C}_\infty(K; E)$ muni

de la topologie que nous venons d'y définir. Provisoirement, nous supposons l'espace F complet (et non seulement complet pour les suites); mais cette restriction sera levée plus loin.

Rappelons d'abord que chaque élément T de $\overline{C}_\infty(K; E)$ est un système compatible $(T_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de distributions à valeurs dans les espaces de Banach E_α . Alors on a pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, selon (15.2):

$$(18.1) \quad T_\alpha = \int_a^b \partial_K^{(m_\alpha)}(\hat{x} - u) f_\alpha(u) du,$$

en supposant $T_\alpha = D^{m_\alpha} f_\alpha$, $f_\alpha \in C(K; E_\alpha)$.

Soit maintenant $(q_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ un système fondamental de semi-normes dans F et soit Φ une application linéaire continue de $\overline{C}_\infty(K; E)$ dans F . Alors, d'après la théorie générale des espaces localement convexes, pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$ il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$ et une application linéaire continue $\Phi_{\lambda\alpha}$ de $C_\infty(K; E_\alpha)$ dans F_λ tels que

$$\pi_\lambda(\Phi T) = \Phi_{\lambda\alpha}(\pi_\alpha T), \quad \text{pour toute } T \in \overline{C}_\infty(K; E),$$

puisque cet espace est la limite projective des $C_\infty(K; E_\alpha)$ par rapport aux π_α . Donc, si l'on pose, d'une part:

$$\varphi(u) \circ \mathbf{e} = \Phi[\partial_K(\hat{x} - u) \mathbf{e}], \quad \text{pour } u \in \mathbf{R}, \mathbf{e} \in E$$

et d'autre part:

$$(18.2) \quad \varphi_{\lambda\alpha}(u) \circ \mathbf{e}_\alpha = \Phi_{\lambda\alpha}[\partial_K(\hat{x} - u) \mathbf{e}_\alpha], \quad \text{pour } u \in \mathbf{R}, \mathbf{e}_\alpha \in E_\alpha,$$

on voit aussitôt que

$$\pi_\lambda \circ \varphi(u) = \varphi_{\lambda\alpha}(u) \circ \pi_\alpha, \quad \text{pour chaque } u \in K,$$

et que, compte tenu de (18.1):

$$(18.3) \quad \pi_\lambda(\Phi T) = (-1)^{m_\alpha} \int_a^b \varphi_{\lambda\alpha}^{(m_\alpha)}(u) \circ f_\alpha(u) du$$

D'ailleurs il est aisé de voir que $\varphi_{\lambda\alpha}(u)$ est une fonction de u à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E_\alpha; F_\lambda)$, indéfiniment dérivable dans \mathbf{R} et nulle en dehors de K .

Réciproquement, soit $\varphi(u)$ une fonction de u à valeurs dans $\mathcal{L}(E; F)$ vérifiant la condition suivante:

a) Pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$, il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$ et une fonction $\varphi_{\lambda\alpha}(u)$ à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E_\alpha; F_\lambda)$, indéfiniment dérivable dans \mathbf{R} et nulle en dehors de K , telle que $\pi_\lambda \circ \varphi(u) = \varphi_{\lambda\alpha}(u) \circ \pi_\alpha$ pour tout $u \in K$.

Alors on voit aisément que la formule (18.3) définit une application linéaire Φ de $\overline{C}_\infty(K; E)$ dans F , telle que l'on a (18.2).

Nous avons donc réussi à généraliser le th. 16.1, mais sous une forme moins simple :

THÉORÈME 18.1. *Il existe une correspondance biunivoque $\Phi \leftrightarrow \varphi$ entre les applications linéaires continues Φ de $\overline{C}_\infty(K; E)$ dans F et les applications φ de \mathbf{R} dans $\mathcal{L}(E; F)$ vérifiant la condition a). Cette correspondance est définie par les formules réciproques (18.3) et (18.2), où α dépend de λ .*

La formule (18.3) pourra s'écrire plus simplement

$$\Phi(T) = \int_a^b \varphi(u) \circ T(u) du, \quad \text{pour toute } T \in \overline{C}_\infty(K; E),$$

d'après la définition d'intégrale que nous donnerons au n.º 26.

Il est aisé de voir que la condition a) entraîne que φ est indéfiniment dérivable dans \mathbf{R} , au sens de la topologie de $\mathcal{L}_b(E; F)$. Mais la réciproque n'est pas vraie en général. Toutefois, on peut reconnaître sans difficulté que :

PROPOSITION 18.1. *Si E est un espace (\mathfrak{S}_2) ou, plus généralement, un espace $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ tonnelé, il suffit que la fonction φ soit indéfiniment dérivable au sens de la topologie de l'espace $\mathcal{L}_b(E; F)$, et nulle en dehors de K , pour que la condition a) soit vérifiée.*

Ainsi, dans ces cas, le th. 16.1 se généralise sans introduire la condition a). Mais, dans le cas général, il n'est pas probablement possible de la remplacer par une condition plus simple.

La fonction φ sera dite encore *indicatrice* de l'application Φ .

On réussit encore à généraliser le th. 16.2 (avec la même forme) au cas de l'espace $\overline{C}_\infty(K; E)$. Quant au corollaire de ce théorème, il sera établi lorsque nous aurons démontré que le produit tensoriel $C_\infty(K) \otimes E$ est dense dans $\overline{C}_\infty(K; E)$.

Enfin nous pouvons étendre tous ces résultats au cas de l'espace $\overline{C}_\pi(I; E)$, où I est un intervalle ouvert quelconque de \mathbf{R} . Alors la formule (18.1) devra être remplacée par une autre, de la forme suivante :

$$(T_K)_\alpha = \int_K \delta_K^{(m)}(\hat{x} - u) f(u) du,$$

où K est un sous-intervalle compact arbitraire de I , $T_K = D^m f$, $f \in C(K; E_\alpha)$, m et f dépendant à la fois de K et de α .

Les indicatrices des applications linéaires continues Φ de $\bar{C}_\pi(I; E)$ dans F seront alors les fonctions $\varphi(u)$ à valeurs dans $\mathfrak{L}(E; F)$ qui vérifient la condition suivante :

b) Pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$, il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$, un intervalle compact K et une fonction $\varphi_{\lambda\alpha}(u)$ à valeurs dans $\mathfrak{L}_b(E_\alpha; F_\lambda)$, indéfiniment dérivable dans \mathbf{R} et nulle en dehors de K , telle que $\pi_\lambda \circ \varphi(u) = \varphi_{\lambda\alpha}(u) \circ \pi_\alpha$, pour tout $u \in \mathbf{R}$.

Alors l'application Φ correspondante à φ sera donnée par la formule

$$\pi_\lambda(\Phi T) = (-1)^m \int_K \varphi_{\lambda\alpha}^{(m)}(u) f(u) du,$$

où l'on suppose $T_K = D^m f$, $f \in C(K; E)$, m et f dépendant de K et de α .

Il sera encore commode de considérer le cas où F est, plus généralement, la limite projective d'une famille d'espaces sous-normables (mais non nécessairement normables comme les F_λ) ⁽¹⁾. On trouve alors des résultats analogues à ceux que nous avons obtenu dans le même cas pour les distributions scalaires (cf. [16], n.º 25).

19. Cas où l'espace E est du type (\mathfrak{G}_2) . Supposons maintenant que E est un espace (\mathfrak{G}_2) , limite inductive d'une suite compactifiante d'espaces de Banach E_n (cf. n.º 9). Alors les résultats précédents se simplifient et on obtient de nouveaux résultats, importants pour les applications. Nous avons déjà vu (th. 9.1) que, dans ce cas, on a algébriquement, $\bar{C}_\infty(K; E) \cong C_\infty(K; E)$, c'est-à-dire que $\bar{C}_\infty(K; E)$ se réduit à la réunion des espaces $C_n(K; E)$, images de $C(K; E)$ par les puissances D^n de l'opérateur de dérivation. Il semble alors naturel d'attribuer à cet

(1) Nous disons qu'un espace localement convexe E est sous-normable s'il existe au moins une semi-norme continue sur E qui soit une norme. Voir notre travail «Conceitos de função diferenciável em espaços localmente convexos», Publicações do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, 1957.

espace vectoriel, au lieu de $\bar{\mathfrak{T}}_\infty$, la topologie de la limite inductive des espaces $C_n(K; E)$ ou, ce qui revient au même, des espaces normés $C_n(K; E_n)$, $n = 0, 1, \dots$, qui forment une suite compactifiante, comme on le voit aisément (cf. [16], th. 8). Nous désignerons par \mathfrak{T}_∞ cette topologie d'espace (\mathfrak{S}_2) sur $C_\infty(K; E)$.

Or, par des raisonnements analogues à ceux de la démonstration des théorèmes 16.1 et 16.2, compte tenu du fait que $C_\infty(K; E)$ est aussi la limite inductive des $C_\infty(K; E_n)$, on voit aisément que l'espace des applications linéaires continues de $C_\infty(K; E)$, *muni de la topologie* \mathfrak{T}_∞ , dans un espace localement convexe complet F quelconque, coïncide avec l'espace des applications linéaires continues de $C_\infty(K; E)$, *muni de la topologie* $\bar{\mathfrak{T}}_\infty$, dans F . D'autre part, on sait que tout espace (\mathfrak{S}_2) est complet et la formule (15.2) de Dirac montre que $C_\infty(K) \otimes E$ est dense dans $C_\infty(K; E)$, puisque toute distribution appartenant à cet espace est d'ordre fini. Il en résulte, suivant les résultats précédents :

THÉORÈME 19.1 *Si E est un espace du type (\mathfrak{S}_2) , les topologies $\bar{\mathfrak{T}}_\infty$ et \mathfrak{T}_∞ sur $C_\infty(K; E)$ coïncident et on a, au sens de ces topologies :*

$$C_\infty(K; E) \cong C_\infty(K) \hat{\otimes} E$$

En particulier, E peut être aussi un espace de distributions scalaires, $C_\infty(K^*)$, où K^* est un deuxième intervalle compact de la droite. Alors (cf. n.º 10, démonstration du lemme) on voit que, pour tout n , $C_n(K; E_n)$ est algébriquement isomorphe à l'espace $C_n(K \times K^*)$ des distributions scalaires de deux variables $D_x^n D_y^n F(x, y)$, où $F \in C(K \times K^*)$, et il est aisé de voir encore que cet isomorphisme est aussi topologique. On en déduit les isomorphismes vectoriel-topologiques

$$C_\infty(K; C_\infty(K^*)) \cong C_\infty(K \times K^*) \cong C_\infty(K) \otimes C_\infty(K^*)$$

Enfin, puisque les espaces $C_\infty(K)$, où K est toujours un intervalle compact de \mathbb{R} , sont sous-normables, on étend aisément ces résultats au cas où l'on a des intervalles ouverts, I et I^* , au lieu de K et K^* :

$$C_\pi(I; C_\pi(I^*)) \cong C_\pi(I \times I^*) \cong C_\pi(I) \hat{\otimes} C_\pi(I^*)$$

20. Multiplications généralisées⁽¹⁾. Pour généraliser au cas vectoriel la notion de produit multiplicatif d'une fonction par une distribution, considérons en général trois espaces localement convexes G, E, F et une application bilinéaire $(x, y) \rightarrow \Theta(x, y)$ de $G \times E$ dans F , hypocontinue par rapport aux parties compactes de G et E ; ⁽²⁾ et supposons E et F complets pour les suites.

Pour simplifier le langage et l'écriture, nous appellerons $\Theta(x, y)$ *produit de x par y* et le désignerons par $x \odot y$.

Cela posé, soient $f \in C(K; G)$ et $g \in C(K; E)$, où K désigne encore un intervalle compact de la droite. On définit aussitôt le produit $f \odot g$, en posant :

$$(20.1) \quad (f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x), \quad \text{pour tout } x \in K.$$

Si, en outre, f et g sont continuellement dérivables, l'hypocontinuité du «produit» initial par rapport aux parties compactes de G et E assure la permanence de la *règle de dérivation du produit* :

$$(f \odot g)' = f' \odot g + f \odot g',$$

comme on le vérifie aisément, en rappelant la démonstration classique de cette règle.

Dans ces conditions, il est facile de définir, comme dans le cas scalaire, le produit $\varphi \odot T$ d'une fonction $\varphi \in C^\infty(K; G)$ par une distribution $T \in C_\infty(K; E)$, de façon que la règle de dérivation du produit subsiste et que $\varphi \odot T$ soit donné par (20.1) lorsque T est une fonction continue.

En effet, si l'on a $T = D^p f$, $f \in C(K; E)$, on doit avoir nécessairement ⁽³⁾ :

$$\varphi \odot T = \sum_{k=0}^p (-1)^k D^{p-k} (\varphi^{(k)} \odot f),$$

⁽¹⁾ Cf [2], chap. II.

⁽²⁾ Étant donnés deux ensembles \mathfrak{M} et \mathfrak{N} de parties bornées recouvrant G et E , respectivement, on dit que l'application bilinéaire Θ est hypocontinue relativement à \mathfrak{M} et \mathfrak{N} , si l'ensemble des applications linéaires $y \rightarrow \Theta(x, y)$ de E dans F est équicontinu, lorsque x parcourt \mathfrak{M} , et de même pour \mathfrak{N} (cf. [2], chap. III). Dans le cas considéré ici, \mathfrak{M} et \mathfrak{N} sont les ensembles des parties compactes, respectivement de G et de E .

⁽³⁾ Pour que cette formule soit applicable il suffit évidemment que $\varphi \in C^p(K; G)$.

et on démontre, par récurrence, que cette formule définit une application *bilinéaire* $(\varphi, T) \rightarrow \varphi \odot T$ de $C^\infty(K; G) \times C_\infty(K; E)$ dans $C_\infty(K; F)$, vérifiant les conditions voulues.

On voit d'ailleurs que, si φ est une fonction *scalaire* indéfiniment dérivable dans K et T une distribution scalaire définie dans K , on a

$$(\varphi \mathbf{g}) \odot (T \mathbf{e}) = (\varphi T)(\mathbf{g} \odot \mathbf{e}), \quad \text{quels que soient } \mathbf{g} \in G, \mathbf{e} \in E.$$

Toutefois, si l'on considère plus généralement des distributions d'ordre quelconque $T \in \bar{C}_\infty(K; E)$, les espaces E et F étant supposés complets⁽¹⁾, cette méthode algébrique n'est plus suffisante en général et on devra employer, pour définir $\varphi \odot T$, une méthode topologique, semblable à celle utilisée par SANTOS GUERREIRO dans le cas scalaire⁽²⁾.

Alors le produit $\varphi \odot T$ est défini par les conditions axiomatiques suivantes:

I) L'application $T \rightarrow \varphi \odot T$ de $C_\infty(K; E)$ dans $C_\infty(K; F)$ est linéaire et continue.

II) $\varphi \odot T$ est donné par (20. 1) lorsque $T \in C(K; E)$

En effet, s'il existe une telle application linéaire continue, son indicatrice sera la fonction $\psi(u)$ que l'on définit en posant, pour tout $\mathbf{e} \in E$:

$$(20. 2) \quad \begin{cases} \psi(u) \circ \mathbf{e} = \varphi(\hat{x}) \odot [\partial_K(\hat{x} - u) \mathbf{e}] = [\varphi(u) \odot \mathbf{e}] \partial_K(\hat{x} - u), & \text{pour } u \in K \\ \psi(u) = 0, & \text{pour } u \notin K. \end{cases}$$

Réciproquement, pour qu'une fonction ψ ainsi définie par (20. 2), à valeurs dans l'espace des applications linéaires continues de E dans $\bar{C}_\infty(K; F)$, soit l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\bar{C}_\infty(K; E)$ dans $\bar{C}_\infty(K; F)$, il faut et il suffit, d'après le th. 18. 1, que ψ vérifie la condition a), avec $C_\infty(K; F)$ au lieu de F . Or, si l'on pose

$$\tilde{\varphi}(u) \circ \mathbf{e} = \varphi(u) \odot \mathbf{e}, \quad \text{pour tout } \mathbf{e} \in E \text{ et tout } u \in K,$$

$\tilde{\varphi}$ sera une application de \mathbb{R} dans $\mathcal{L}(E; F)$. Soient encore

(1) On peut supposer E et F seulement complets pour les suites, après les considérations des n.ºs 23 et 26.

(2) Cf. *La multiplication des distributions comme application linéaire continue*, «Portugaliae Mathematica», vol. 18 (1959), p. 55-67.

$(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{L}}$ et $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ deux systèmes fondamentaux de semi-normes, respectivement dans F et E . Alors on voit aussitôt que ψ vérifie cette condition *a*), si, pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$, il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$ et une fonction $\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}(u)$ à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E_\alpha; F_\lambda)$, indéfiniment dérivable dans K , telle que $\pi_\lambda \circ \tilde{\varphi}(u) = \tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}(u) \circ \pi_\alpha$ pour $u \in K$.

Mais, puisque la fonction $\delta_K(\hat{x} - u)$ de u , à valeurs dans $C_\infty(K)$, est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et nulle en dehors de K (donc à décroissance rapide vers les extrêmes de K), il n'est pas même nécessaire que $\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}$ soit indéfiniment dérivable dans K . Il est aisé de voir que :

THÉORÈME 20.1. *Pour que la fonction ψ définie par (20.2) soit l'indicatrice d'une application linéaire continue de $\overline{C}_\infty(K; E)$ dans $\overline{C}_\infty(K; F)$, il faut et il suffit que φ vérifie la condition suivante :*

a') Pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$, il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$ et une fonction $\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E_\alpha; F_\lambda)$ telle que

$$\pi_\lambda[\varphi(x) \odot \mathbf{e}] = \tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}(x) \circ \mathbf{e}_\alpha, \text{ pour tout } \mathbf{e} \in E \text{ et } x \in \overset{\circ}{K},$$

cette fonction $\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}$ étant indéfiniment dérivable dans $\overset{\circ}{K}$ et à croissance lente vers les extrêmes a et b de K , c'est-à-dire telle qu'il existe un nombre naturel k (dépendant de λ et α), vérifiant la condition (1) :

$$(x - a)^k (x - b)^k \tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}(x) \rightarrow 0, \text{ lorsque } x \rightarrow a \text{ ou } x \rightarrow b$$

Nous désignerons par $\mathfrak{M}(K; G)$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans G qui vérifient *a')*. Maintenant, assurée l'existence du produit $\varphi \odot T$, vérifiant les conditions I) et II) pour toute $\varphi \in \mathfrak{M}(K; G)$ et toute $T \in \overline{C}_\infty(K; E)$, on démontre aisément, à l'aide de l'expression générale des applications linéaires continues établie au n.º 18, que : 1) *la règle de dérivation du produit est conservée*; 2) *si $F = E$, l'espace $\overline{C}_\infty(K; E)$ devient un module sur l'anneau $\mathfrak{M}(K; G)$, etc.* D'ailleurs, on peut expliciter le calcul de $\varphi \odot T$ de la façon suivante :

(1) Cf. SANTOS GUERREIRO, *ibid.*

$$(20.3) \quad (\varphi \odot T)_\lambda = \tilde{\varphi}_{\lambda\alpha} \circ T_\alpha = \sum_{k=0}^{m_\alpha} (-1)^k D^{m_\alpha-k} (\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}^{(k)} \circ f_\alpha),$$

pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$, en supposant $T_\alpha = D^{m_\alpha} f_\alpha$, $f_\alpha \in C(K; E_\alpha)$, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$. Observons que, pour tout λ, α et k , $\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}^{(k)} \circ f_\alpha$ sera une fonction continue dans l'intérieur de K , à valeurs dans F_λ et à croissance lente vers a et b , donc une distribution $\in C_\infty(K; F_\lambda)$.

Supposons maintenant que le produit \odot est hypocontinu par rapport aux parties compactes de G et bornées de E . Alors, si l'on pose $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{e}) = \mathbf{g} \odot \mathbf{e}$ pour tout $\mathbf{g} \in G$, $\mathbf{e} \in E$, on voit que l'application $\mathbf{g} \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}$ de G dans $\mathfrak{L}(E; F)$ est continue et que :

PROPOSITION 20.1. Si φ est une fonction $\in C^\infty(\overset{\circ}{K}; G)$, à croissance lente vers les extrêmes de K , φ vérifie la condition $a')$, lorsqu'une quelconque des hypothèses suivantes est vérifiée :

H) l'espace E est du type (\mathfrak{S}_2) ou, plus généralement, du type $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$;

H') l'application $(\mathbf{g}, \mathbf{e}) \rightarrow \mathbf{g} \odot \mathbf{e}$ de $G \times E$ dans F est continue⁽¹⁾.

D'ailleurs, si l'application $\mathbf{g} \rightarrow \tilde{\mathbf{g}}$ est un isomorphisme vectoriel-topologique de G dans un quotient de $\mathfrak{L}_b(E; F)$, on peut reconnaître que la condition que φ soit une fonction $\in C^\infty(\overset{\circ}{K}; E)$, à croissance lente vers a et b , est non seulement suffisante mais aussi nécessaire pour que φ vérifie $a')$.

Ces résultats se généralisent tout de suite au cas d'un intervalle I ouvert. Alors la fonction φ doit appartenir à l'espace $C^\infty(I; G)$ des fonctions indéfiniment dérivables dans I à valeurs dans G .

REMARQUE IMPORTANTE. Dans la pratique, le produit \odot entre les éléments des espaces G et E reçoit plusieurs interprétations. Le cas le plus simple est celui où l'un des espaces G, E se réduit au corps des scalaires; alors il s'agit du produit d'une fonction scalaire par une distribution vectorielle ou vice-versa, ce qui simplifie beaucoup la question: l'application \odot de $G \times E$ dans F est alors continue.

(1) Bien entendu, la continuité implique l'hypocontinuité déjà admise.

Un cas moins trivial, et que l'on peut dire *typique*, est celui où

$$G = \mathcal{L}_b(E; F).$$

Alors le produit $\mathbf{g} \odot \mathbf{e}$, qui se réduit à l'*incidence* $\mathbf{g} \circ \mathbf{e}$ des opérateurs $\mathbf{g} \in G$ sur les vecteurs $\mathbf{e} \in E$, sera hypocontinu par rapport aux parties bornées (donc par rapport aux parties compactes) de G et de E , si l'espace E est *tonnelé* (cf. [2], th. 2).

Un autre cas semblable, également important, est celui où E , F et G sont des espaces d'applications linéaires continues, par exemple du type:

$$E = \mathcal{L}_b(X; Y), \quad G = \mathcal{L}_b(Y; Z), \quad F = \mathcal{L}_b(X; Z)$$

Alors le produit $\mathbf{g} \odot \mathbf{e}$ devient le produit $\mathbf{g} \circ \mathbf{e}$ des opérateurs \mathbf{g} et \mathbf{e} au sens usuel.

21. Changements de variable. Les changements de variable peuvent être étudiés commodément par une méthode topologique analogue à celle utilisée par SANTOS GUERREIRO dans le cas scalaire⁽¹⁾. Soient d'abord K_1 et K_2 deux intervalles compacts de la droite et h un homéomorphisme indéfiniment dérivable de K_2 sur K_1 . Alors la composée $f \circ h$ d'une fonction $f \in C(K_1; E)$ par h est définie de la façon usuelle:

$$(f \circ h)(x) = f[h(x)], \quad \text{pour } x \in K_2.$$

Mais on a, par rapport à la topologie de $\overline{C}_\infty(K_2; E)$ (cf. n.° 17):

$$f \circ h = \int_{K_1} \partial(\hat{x} - u) f[h(u)] du,$$

et, si l'on pose $h(u) = v$, $h^{-1} = g$, on obtient:

$$f \circ h = \int_{K_1} |g'(v)| \partial(\hat{x} - g(v)) f(v) dv.$$

On voit alors que l'application $f \rightarrow f \circ h$ est prolongeable en une application linéaire continue Φ de $\overline{C}_\infty(K_1; E)$ sur $\overline{C}_\infty(K_2; F)$, dont l'indicatrice s'identifie à la fonction $\varphi(v)$ à valeurs dans

(1) Cf. *Les changements de variable en théorie des distributions I*, «Portugaliae Mathematica», vol. 16 (1957), p. 57-80.

$C_\infty(K_2)$ que l'on définit en posant :

$$\begin{cases} \varphi(v) = |g'(v)| \, \partial(\hat{x} - g(v)), & \text{pour } v \in K_1 \\ \varphi(v) = 0, & \text{pour } v \notin K_1 \end{cases}$$

puisque cette fonction est indéfiniment dérivable sur \mathbf{R} (et nulle en dehors de K_1), comme on le vérifie aisément.

D'ailleurs il n'est pas nécessaire pour cela que h soit un homéomorphisme indéfiniment dérivable de K_2 sur K_1 ; *il suffit que h soit un homéomorphisme indéfiniment dérivable de l'intérieur de K_2 sur l'intérieur de K_1 , tel que l'on ait $h'(u) \neq 0$ partout et que les fonctions $h(u)$ et $1/h'(u)$ de u soient à croissance lente vers les extrêmes de K_2 , ainsi que toutes leurs dérivées*(1).

Nous désignerons encore par $T \circ h$ ou même par $T(h(x))$ le résultat de cette application Φ sur la distribution T , c'est-à-dire nous poserons $T \circ h = \Phi(T)$, et nous dirons que $T \circ h$ est la composée de T par h . D'ailleurs, on démontre sans difficulté que la règle de dérivation des fonctions composées subsiste :

$$D(T \circ h) = (DT \circ h) h',$$

ce qui justifie les conventions adoptées.

Ces résultats se généralisent aisément au cas où l'on considère, au lieu de K_1 et K_2 , deux intervalles ouverts quelconques de la droite, I_1 et I_2 . Alors il n'est plus nécessaire d'imposer à h aucune condition de croissance vers les extrêmes des intervalles.

Une conséquence remarquable de ces résultats est le fait suivant :

PROPOSITION 21. 1. *Quels que soient les intervalles compacts K_1 et K_2 de la droite et l'espace localement convexe complet E , les espaces vectoriels topologiques $\overline{C}_\infty(K_1; E)$ et $\overline{C}_\infty(K_2; E)$ sont isomorphes.*

Il suffit de rappeler ici qu'il existe une fonction linéaire $\alpha + \beta x$, appliquant K_2 sur K_1 .

Ce résultat reste évidemment vrai, si l'on remplace K_1 et K_2 par deux intervalles I_1 et I_2 ouverts et bornés. En outre on a :

PROPOSITION 21. 2. *Quel que soit l'intervalle ouvert I et l'espace localement convexe complet E , l'espace $\overline{C}_\pi(I; E)$ est isomorphe, au sens vectoriel-topologique, à l'espace $\overline{C}_\pi(\mathbf{R}; E)$.*

(1) Cf. SANTOS GUERREIRO, article cité.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer, dans le cas où I est borné, que la fonction $h(x) \equiv \operatorname{arctg} x$, définit un homéomorphisme indéfiniment dérivable de \mathbf{R} sur l'intervalle ouvert I d'extrêmes $-\pi/2, \pi/2$, tel que $h'(x) \neq 0$ partout; et (pour le cas où I n'est pas borné) que la fonction $h(x) \equiv \log x$ définit un homéomorphisme analogue de \mathbf{R} sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

22. Distributions vectorielles tempérées. Considérons les deux intervalles $K = [-\pi/2, \pi/2]$, $I =]-\pi/2, \pi/2[$ et soit E un espace localement convexe complet. Il est aisé de voir que *chaque distribution* $T \in \overline{C}_\infty(K; E)$ s'identifie alors à une distribution $T^* \in \overline{C}_\pi(I; E)$: pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ et tout sous-intervalle compact L de I , la restriction à L de la composante T_α^* de T^* sera la restriction à L de T_α , c'est-à-dire $\rho_L T_\alpha^* = D^{\rho_L}(\rho_L f_\alpha)$, si $T_\alpha = D^{\rho_L} f_\alpha$, $f_\alpha \in C(K; E_\alpha)$; d'autre part, on voit aussitôt que, si une distribution $U \in \overline{C}_\infty(K; E)$ détermine de cette façon une distribution $U^* = T^*$, on a nécessairement $U = T$, les fonctions continues dans K étant déterminées par leurs restrictions à I . On peut donc écrire $\overline{C}_\infty(K; E) \subset \overline{C}_\pi(I; E)$.

Mais il y a évidemment des distributions du deuxième espace qui ne sont pas identifiables à des distributions du premier. Nous désignerons par $C_\tau(E)$ l'image vectoriel topologique de l'espace $\overline{C}_\infty(K; E)$ par le changement de variable $x \rightarrow \operatorname{arctg} x$, que nous venons de considérer au n.º 20; $C_\tau(E)$ sera donc un vrai sous-espace vectoriel de $C_\pi(\mathbf{R}; E)$, muni d'une topologie strictement plus fine que celle induite par le second.

Nous appellerons *distributions tempérées (sur \mathbf{R}) à valeurs dans E* les éléments de $C_\tau(E)$. En employant une méthode tout à fait analogue à celle suivie par A. ANDRADE GUIMARÃES⁽¹⁾, on réussit à expliciter la structure de ces distributions ainsi que la topologie de cet espace :

PROPOSITION 22.1. *Pour qu'une distribution T sur \mathbf{R} à valeurs dans E soit tempérée, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe un entier k et une fonction f continue et bornée sur \mathbf{R} , à valeurs dans E_α , tels que $T_\alpha = D_x^k (1 + x^2)^k f(x)$ (f et k dépendant de α).*

⁽¹⁾ Sur une façon de définir, sans dualité, l'espace des distributions tempérées sur la droite et la transformation de Fourier, «Portugaliae Math.», vol. 18 (1959), p. 125-153.

Pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, désignons par $C_b(E_\alpha)$ l'espace des fonctions $f \in C(\mathbf{R}; E_\alpha)$ bornées sur \mathbf{R} , muni de la norme

$$\|f\|_\alpha = \sup_{x \in \mathbf{R}} \|f(x)\|_\alpha$$

où la norme employée dans le 2nd. membre est évidemment celle de l'espace E_α . Soit d'autre part $C_{(k)}(E_\alpha)$, pour tout $k=0, 1, \dots$, l'image de l'espace normé $C_b(E_\alpha)$, par l'application $f \rightarrow D^k(1+x^2)f$. Alors on démontre, par des méthodes tout à fait semblables à celles employées par ANDRADE GUIMARÃES dans l'article cité:

THÉORÈME 21.2. *Pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, $C_\tau(E_\alpha)$ est la limite inductive localement convexe des espaces normés $C_{(k)}(E_\alpha)$, $k=0, 1, \dots$. L'espace $C_\tau(E)$ est la limite projective des $C_\tau(E_\alpha)$ par rapport aux applications $\overline{\pi}_\alpha$.*

Les distributions tempérées seront dites aussi *distributions à croissance lente*.

23. Approximation des distributions vectorielles par des fonctions indéfiniment dérivables. Pour simplifier l'écriture, nous adopterons maintenant la notation $\overline{C}_\pi(E)$ pour l'espace $\overline{C}_\pi(\mathbf{R}; E)$.

PROPOSITION 23.1. *Soit $T \in \overline{C}_\pi(E)$ et soit φ une fonction numérique indéfiniment dérivable sur \mathbf{R} , de support borné. Si l'on désigne par Θ l'application de $\mathfrak{D}_\mathbf{R}$ dans E dont T est l'indicatrice (th. 8.1) et que l'on pose*

$$\vartheta(x) = \Theta_u \varphi(x - u), \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R},$$

ϑ sera une fonction à valeurs dans E , indéfiniment dérivable sur \mathbf{R} .

Démonstration. Il est aisé de voir que la fonction $\varphi(x - \hat{u})$ de x à valeurs dans $\mathfrak{D}_\mathbf{R}$ est indéfiniment dérivable sur \mathbf{R} . Donc il en sera de même pour $\vartheta(x)$, puisque Θ est une application linéaire continue de $\mathfrak{D}_\mathbf{R}$ dans E .

Mais on peut donner aussi, pour cette proposition, une démonstration directe, qui renseigne sur la façon d'obtenir ϑ . Soit K un intervalle compact arbitraire de la droite; alors, puisque le support de φ est borné, il existe un intervalle compact L tel que, pour tout $x \in K$, la fonction $\varphi(x - u)$ de u est nulle en dehors de L . D'autre part, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe un entier m_α et une fonction $f_\alpha \in C(L; E_\alpha)$ tels que $\varphi_L T_\alpha = D^{m_\alpha} f_\alpha$. Donc

$$(23.1) \quad \pi_x[\theta(x)] = \int_L \varphi^{(m_x)}(x-u) f_x(u) du, \quad \text{pour tout } x \in K$$

ce qui montre que, pour tout $x \in \mathcal{A}$, la fonction $\pi_x[\theta(x)]$ de x est indéfiniment dérivable dans K . D'après les propriétés des limites projectives, cela veut dire que θ est indéfiniment dérivable dans K , donc dans \mathbf{R} , puisque K est arbitraire.

DÉFINITION 23.1. *On appelle régularisée de T par φ la fonction ainsi obtenue.*

Rappelons maintenant que la distribution δ de DIRAC peut s'exprimer comme limite d'une suite de fonctions δ_n indéfiniment dérivables et à support compact. On peut prendre, par exemple :

$$\delta_n(x) = \begin{cases} c_n \exp \frac{1}{(nx-1)^2 - 1}, & \text{si } 0 < x < 2/n, \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2/n, \end{cases}$$

en choisissant c_n de façon que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x) dx = 1$, pour tout n .

Alors, si l'on désigne par K un intervalle compact $[a, b]$ quelconque de la droite, on a le lemme suivant :

LEMME. *Si f est une fonction continue dans K à valeurs dans E , la suite de fonctions $\int_K \delta_n(x-u) f(u) du$ de x converge vers f uniformément sur tout intervalle $L = [a, c]$, avec $a < c < b$, lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Posons, pour tout $n = 1, 2, \dots$ et tout $x \in K$:

$$\Delta_n(x) = \int_0^x \delta_n(u) du$$

Alors on a $\Delta_n(x) \rightarrow H(x)$ pour tout $x \neq 0$ et, puisque l'on a $\Delta_n' = \delta_n$, on voit aussitôt que

$$\int_K \delta_n(x-u) f(u) du = \int_K f(u) d_u \Delta_n(u-x) \quad (x \in K),$$

où le second membre est évidemment l'intégrale de Stieltjes de f par rapport à la fonction $\Delta_n(u-x)$ de u . D'autre part on a

$$\int_K \delta(\hat{x} - u) f(u) du = \int_K f(u) du H(u - x) = f(x)$$

et il est aisé de voir que

$$\int_a^c \Delta_n(u - x) du \rightarrow \int_a^c H(u - x) du$$

pour tout $c \in \overset{\circ}{K}$, uniformément pour $x \in [a, c]$. Alors, en tenant compte de résultats connus sur l'intégrale de Stieltjes⁽¹⁾, on arrive aisément à la thèse du lemme.

Celui-ci permet de démontrer le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 23.1. *Quelle que soit $T \in C_\pi(E)$, la suite des régularisées de T par les fonctions δ_n converge vers T dans cet espace.*

Démonstration. Désignons par θ_n la régularisée de T par δ_n , $n = 1, 2, \dots$. Il s'agit de démontrer (cf. n.º 17) que, pour tout $\alpha \in \mathcal{Q}$ et tout intervalle compact K de \mathbb{R} , la composante $(\theta_n)_\alpha$ de θ_n converge vers $\rho_K T_\alpha$ dans $C_\infty(K; E_\alpha)$, lorsque $n \rightarrow \infty$. Puisque le diamètre du support de δ_n tend vers zéro, on peut associer à tout K un autre intervalle compact L contenant K tel que, pour tout $x \in K$ et tout $n = 1, 2, \dots$, le support de la fonction $\delta_n(x - u)$ de u soit contenu dans L . Donc, si l'on a $\rho_L T_\alpha = D^{m_\alpha} f_\alpha$, $f_\alpha \in C(L; E_\alpha)$, on aura, d'après (23.1) :

$$\pi_\alpha[\theta_n(x)] = D_x^{m_\alpha} \int \delta_n(x - u) f_\alpha(u) du, \quad \text{pour tout } x \in K;$$

mais, d'après le lemme, l'intégrale du second membre converge vers $f_\alpha(x)$ uniformément dans K . Comme l'opérateur D est continu dans $C_\infty(K; E_\alpha)$, il en résulte que $(\theta_n)_\alpha \rightarrow \rho_K T_\alpha$ dans ce dernier espace.

COROLLAIRE. *Quel que soit l'intervalle ouvert I de la droite, toute distribution $T \in \overline{C}_\pi(I; E)$ est limite, dans cet espace, d'une suite de fonctions indéfiniment dérivables à valeurs dans E .*

⁽¹⁾ Cf. par exemple RIÉSZ et SZ. NAGY, «Leçons d'analyse fonctionnelle», Acad. Sci. Hongrie, p. 119-121. Ici la démonstration peut même se faire directement.

Il suffit de rappeler que l'espace $C_\pi(I; E)$ est isomorphe à $\bar{C}_\pi(E)$, au sens vectoriel-topologique (n.º 20).

On peut encore démontrer que, si T est une distribution tempérée, à valeurs dans E , la suite des régularisées de T par les fonctions δ_n converge vers T au sens de la topologie de l'espace $C_\pi(E)$. Il en résulte immédiatement que le corollaire du th. 23.1 reste encore vrai en remplaçant l'intervalle ouvert I par un intervalle compact K quelconque de \mathbb{R} .

Par exemple, nous avons vu (n.ºs 3 et 8) que l'expression $D_u^{p+2} G_p(x, u)$ représente une distribution dans $K = [a, b]$ à valeurs dans \mathcal{D}_K , qui pour chaque entier p , est la dérivée d'ordre $p + 2$ de la fonction $G_p(x, u)$ de u à valeurs (fonctions de x) dans \mathcal{D}_K^p . Alors, d'après les résultats précédents, il existe au moins une suite $\delta_n(\hat{x}, u)$ de fonctions de u , à valeurs dans \mathcal{D}_K , indéfiniment dérivables dans K , telle que

$$\delta_n(\hat{x}, u) \rightarrow D_u^{p+2} G_p(\hat{x}, u)$$

dans l'espace $\bar{C}_\infty(K; \mathcal{D}_K^p)$. Cela veut dire que, pour tout p , il existe une suite de fonctions $\Delta_n(\hat{x}, u)$ de u , à valeurs dans \mathcal{D}_K , primitives d'ordre $p + 2$ de $\delta_n(\hat{x}, u)$, telles que

$$\Delta_n(\hat{x}, u) \rightarrow G(\hat{x}, u)$$

dans l'espace $C(K; \mathcal{D}_K^p)$.

On voit alors, compte tenu de la formule (3.5), que

$$(23.1) \quad \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \delta_n(\hat{x}, u) \varphi(u) du$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_K$, par rapport à la topologie de cet espace (et de même pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_K^p$ et tout $p = 0, 1, \dots$). Nous avons ainsi trouvé, enfin, une vraie base de cet espace :

PROPOSITION 23.1 *Les vecteurs $\delta_n(\hat{x}, u)$ de \mathcal{D}_K , pour $u \in K$, $n = 1, 2, \dots$, forment une base vectoriel-topologique de l'espace \mathcal{D}_K ainsi que des espaces \mathcal{D}_K^p , $p = 0, 1, \dots$ (cf. n.º 3, REMARQUE).*

Nous désignerons par $\vec{\delta}_K$ la distribution de u définie en posant :

$$\vec{\delta}_K(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\hat{x}; u) = D_u^{p+2} G_p(\hat{x}; u)$$

Nous pourrions aussi désigner cette distribution de u par $\delta_K(\hat{x} - u)$, mais cette notation est ambiguë, pouvant s'interpréter aussi comme fonction indéfiniment dérivable de u à valeurs (distributions de x) dans $C_\infty(K)$.

Enfin, on voit maintenant sans difficulté ce que nous avons annoncé au n.º 18 :

Quel que soit l'espace localement convexe complet E , le produit tensoriel $C_\infty(K) \otimes E$ est dense dans l'espace $C_\infty(K; E)$.

REMARQUE SUR LA NOTION DE DISTRIBUTION À VALEURS DANS UN ESPACE NON COMPLET. Les résultats que nous venons d'exposer au n.º 22 justifient complètement la désignation « distribution à valeurs dans E », que nous avons donné aux éléments des espaces $\overline{C}_\infty(K; E)$, $\overline{C}_\pi(I; E)$. Ils permettent même de généraliser la notion de distribution vectorielle. Soit E un espace localement convexe quelconque (séparé) et soit \hat{E} le complété de E . Alors :

DÉFINITION. On dit qu'une distribution $T \in \overline{C}_\infty(K; \hat{E})$ est à valeurs dans E lorsqu'on peut exprimer T comme limite, au sens de la topologie T_∞ , d'une suite de fonctions indéfiniment dérivables à valeurs dans E .

On peut évidemment étendre cette définition au cas d'un intervalle ouvert I . Toutefois nous n'avons pas maintenant l'intention de développer ici ce point de vue.

24. Recherche des primitives. Dans cette étude nous pouvons nous borner au cas des espaces $\overline{C}_\infty(K; E)$, où K est un intervalle compact, l'extension aux espaces $\overline{C}_\pi(I; E)$ étant immédiate.

LEMME. Si $T \in \overline{C}_\infty(K; E)$ et $DT = 0$, alors T est une fonction constante, $\varphi(x) \equiv c$, avec $c \in E$.

Soit en effet $T \in \overline{C}_\infty(K; E)$ et $DT = 0$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe un entier m_α et une fonction $f_\alpha \in C(K; E_\alpha)$ tels que $T_\alpha = D^{m_\alpha} f_\alpha$, et, puisque $DT_\alpha = 0$ (d'après l'hypothèse), on aura $D^{m_\alpha+1} f_\alpha = 0$, ce qui implique (n.º 2) que f_α se réduit à un polynôme de degré $\leq m_\alpha$. Donc la distribution $T_\alpha = D^{m_\alpha} f_\alpha$ est une fonction constante $\varphi_\alpha(x) \equiv c_\alpha$, avec $c_\alpha \in E_\alpha$, pour tout

$\alpha \in \mathcal{A}$. Et, puisque l'on doit avoir $T_\beta = \bar{\pi}_{\beta\alpha} T_\alpha$ lorsque $\beta \leq \alpha$ (déf. 6.2.), il s'ensuit que $c_\beta = \pi_{\beta\alpha} c_\alpha$ pour $\beta \leq \alpha$ et que, par suite, il existe un $c \in E$ tel que $\pi_\alpha c = c_\alpha$ pour tout α . Donc T se réduit à la fonction constante $\varphi(x) \equiv c$, comme nous l'avons affirmé.

THÉOREME 24.1. *Pour toute distribution $T \in \bar{C}_\infty(K; E)$, il existe au moins une distribution U telle que $D U = T$ (nommée primitive de T). Toute autre primitive de T diffère de U par une fonction constante.*

Démonstration⁽¹⁾. Soit $K = [a, b]$ et prenons deux points x_1 et x_2 tels que $a < x_1 < x_2 < b$. On sait qu'il est possible de trouver une fonction numérique $\omega(x)$, indéfiniment dérivable, égale à 0 pour $x \leq x_1$ et à 1 pour $x \geq x_2$. Soit maintenant $T \in \bar{C}_\infty(K; E)$ et posons

$$T^+ = \omega T, \quad T^- = (1 - \omega) T$$

Alors on a $T = T^+ + T^-$, T^+ étant nulle à gauche de x_1 et T^- nulle à droite de x_2 . Pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, T_α^+ est de la forme $D^{m_\alpha} f_\alpha$, où $f_\alpha \in C(K; E_\alpha)$ et, comme T_α^+ est nulle dans $[a, x_1]$, f_α se réduit dans cet intervalle à un polynôme p_α de degré $< m_\alpha$; donc, en posant $g_\alpha = f_\alpha - p_\alpha$, on aura $T_\alpha^+ = D^{m_\alpha} g_\alpha$ et g_α s'annule à gauche de x_1 . Alors, si l'on pose, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$:

$$U_\alpha^+ = D_x^{m_\alpha} \int_a^x g_\alpha(\xi) d\xi,$$

il est aisé de voir que le système (U_α^+) est une distribution $U^+ \in \bar{C}_\infty(K; E)$ telle que $D U^+ = T^+$. D'une façon analogue on trouve une distribution $U^- \in \bar{C}_\infty(K; E)$ telle que $D U^- = T^-$. Donc, si l'on pose $U = U^+ + U^-$, on aura évidemment $D U = T$.

La dernière partie du théorème est une conséquence immédiate du lemme.

25. Valeur d'une distribution en un point. Valeurs limites.
Nous pouvons maintenant généraliser au cas des distributions

⁽¹⁾ Pour cette démonstration nous avons adapté en partie une idée de L. SCHWARTZ, dans [10] t. 2, p. 31.

vectérielles la notion de valeur d'une distribution en un point, due à LOJASIEWICZ (cf. [8] où [9]).

DÉFINITION 25.1. Soient $T \in \overline{C}_\infty(K; E)$ et $e \in E$. On dit que T a la valeur e en un point $x_0 \in K$ et on pose $T(x_0) = e$, si, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe un entier n et une fonction $\varphi \in C(K; E_\alpha)$ (dépendants de α) tels que

$$T_\alpha = D_x^n \frac{(x - x_0)^n}{n!} \varphi(x), \quad \text{avec} \quad \varphi(x_0) = \pi_\alpha e$$

Cette définition se trouve justifiée par les faits suivants: 1) si T est une fonction continue dans un voisinage de x_0 , $T(x_0)$ est la valeur de cette fonction en x_0 au sens usuel; 2) si T a une valeur en x_0 , elle en a une seule en ce point; 3) d'autres propriétés formelles de cette notion sont conservées (propositions 25.1, 25.2 et 25.3).

D'une façon analogue on définit la *limite à droite*, $T(x_0^+)$ [resp. *à gauche*, $T(x_0^-)$] de la distribution T au point x_0 : il suffit de remplacer plus haut $\varphi(x_0)$ par $\varphi(x_0^+)$ [resp. $\varphi(x_0^-)$]. Si l'on a $T(x_0^+) = T(x_0^-)$ il existe évidemment la valeur $T(x_0)$, qui est égale à ces limites ⁽¹⁾.

Les distributions $T \in \overline{C}_\infty(K; E)$ qui ont une valeur au point x_0 forment un vrai sous-espace vectoriel \mathfrak{H}_{x_0} de cet espace et on voit aisément que

PROPOSITION 25.1. *La correspondance $T \rightarrow T(x_0)$ est une application linéaire de \mathfrak{H}_{x_0} sur E .*

Toutefois cette application n'est pas continue au sens de la topologie induite dans \mathfrak{H}_{x_0} par $\overline{C}_\infty(K; E)$: il faudrait introduire dans \mathfrak{H}_{x_0} une topologie strictement plus fine, pour que cela se vérifie.

On peut encore démontrer, sans difficulté, les deux propriétés suivantes (et de même pour les valeurs limites latérales):

PROPOSITION 25.2. *Soit $(g, e) \rightarrow g \odot e$ une application bilinéaire de $G \times E \rightarrow F$ vérifiant les hypothèses du n.º 20. Etant don-*

⁽¹⁾ Il faut rappeler que nous considérons la notion de distribution comme une généralisation de la notion de *fonction continue*.

nées $\varphi \in C^\infty(I; G)$ et $T \in \overline{C}_\pi(I; E)$, si T a une valeur en x_0 , $\varphi \odot T$ aura la valeur $\varphi(x_0) \odot T(x_0)$ en x_0 .

PROPOSITION 25.3. Soient I_1 et I_2 deux intervalles ouverts de \mathbf{R} , et x_0 un point de I_2 . Etant données $T \in \overline{C}_\pi(I_1; E)$ et $h \in C^\infty(I_2; I_1)$ telle que l'on ait $h'(x) \neq 0$ partout, si T a une valeur au point $h(x_0)$, $T(h(x))$ a la même valeur en x_0 .

Cette dernière proposition nous suggère une façon naturelle de définir la notion de limite d'une distribution $T(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$, en cherchant à conserver, précisément, la propriété de l'invariance par changement de variable. Considérons un intervalle ouvert $I =]a, +\infty[$. Si $a \geq 0$, le changement de variable $x \rightarrow 1/x$ définit un automorphisme de l'espace vectoriel topologique $\overline{C}_\pi(I; E)$, faisant correspondre à D l'opérateur $-\hat{x}^2 D$ (dérivation suivie de multiplication par $-x^2$). Cela justifie la définition suivante :

DÉFINITION 25.2. Soient $T \in \overline{C}_\infty(I; E)$, $e \in E$ et choisissons $J =]x_0, +\infty[$, avec $x_0 > a$, $x_0 > 0$. Cela posé, on dit que T tend vers e lorsque $x \rightarrow +\infty$ et on écrit $T(+\infty) = e$, si, pour tout $\alpha \in \mathcal{Q}$, il existe un entier n et une fonction $\varphi \in C(J; E)$ (dépendants de α) tels que

$$\varphi_J T_\alpha = (-\hat{x}^2 D_x)^n \frac{1}{n! x^n} \varphi(x), \quad \text{avec} \quad \varphi(+\infty) = \pi_\alpha e$$

On définit d'une façon analogue « limite d'une distribution lorsque $x \rightarrow -\infty$ ».

On pourrait aussi donner des définitions topologiques, équivalentes à ces définitions de type algébrique, comme l'a fait LOJASIEWICZ dans le cas scalaire.

26. Intégrales de distributions. Considérons, par exemple, un intervalle ouvert $I =]a, b[$ de \mathbf{R} et soit $T \in \overline{C}_\pi(I; E)$. S'il existe une primitive U de T ayant une valeur en un point c de I , il est évident, d'après le th. 24.1, que toute autre primitive de T a une valeur en c ; alors nous poserons par définition :

$$\int_c^{\hat{x}} T(\xi) d\xi = U(x) - U(c)$$

Cette «intégrale indéfinie» de T , que nous désignerons encore en abrégé par $\int_c^{\hat{x}} T$, est donc *la primitive de T qui a la valeur 0 au point c* . D'une façon analogue on définit

$$\int_{c^+}^{\hat{x}} T \quad \left[\text{resp.} \quad \int_{c^-}^{\hat{x}} T \right]$$

lorsqu'il existe $U(c^+)$ [resp. $U(c^-)$].

Soient maintenant c et d deux points de I , et U une primitive de T . Alors on pose par définition

$$\int_c^d T(x) dx = U(d) - U(c),$$

si U a des valeurs aux points c et d . Cette «intégrale de T entre c et d » sera désignée encore, en abrégé, par $\int_c^d T$. On définit d'une façon analogue

$$\int_{c^+}^{d^-} T, \quad \int_{c^-}^{d^-} T, \quad \text{etc.}$$

En particulier, l'intégrale de T dans l'intervalle I , si elle existe, sera

$$\int_I T(x) dx = \int_{a^+}^{b^-} T(x) dx$$

Si, au lieu d'un intervalle ouvert I , on considère un intervalle compact $K = [a, b]$, on posera par définition:

$$\int_K T(x) dx = \int_a^b T(x) dx = \int_{a^+}^{b^-} T(x) dx$$

quand cette intégrale existe.

D'ailleurs toutes ces définitions s'étendent, *mutatis mutandis*, au cas des extrêmes infinis d'intégration. Par exemple, on aura

$$\int_{\mathbb{R}} T(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) dx = U(+\infty) - U(-\infty),$$

où $T \in \overline{C}_\pi(E)$, si U est une primitive de T ayant les limites $U(+\infty)$ et $U(-\infty)$.

On vérifie sans difficulté que les règles classiques d'intégration (*par décomposition, par substitution et par parties*) subsistent essentiellement pour ces nouvelles notions d'intégrale.

Pour le moment, il nous intéresse surtout de justifier les symboles d'intégrale que nous avons signalés à plusieurs reprises dans ce travail, pour simplifier la forme de résultats obtenus.

Considérons trois espaces localement convexes complets G, E, F et soit \odot une *multiplication*, c'est-à-dire une application bilinéaire $(x, y) \rightarrow x \odot y$ de $G \times E$ dans F , hypocontinue par rapport aux parties compactes de G et E . Considérons d'autre part un intervalle compact $K = [a, b]$ de \mathbf{R} , une distribution $T = D^p f$, avec $f \in C(K; E)$, et une fonction φ continûment dérivable jusqu'à l'ordre p . Dans ces conditions :

PROPOSITION 26.1. *Si la fonction φ s'annule aux points a, b , ainsi que leurs dérivées d'ordre $< p$, l'intégrale de $\varphi \odot T$ existe dans K et on a*

$$\int_K \varphi \odot T = (-1)^p \int_a^b \varphi^{(p)}(x) \odot f(x) dx$$

En effet, puisque $T = D^p f$, on a (n.º 20) :

$$(26.1) \quad \varphi \odot T = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k D^{p-k} (\varphi^{(k)} \odot f) + (-1)^p \varphi^{(p)} \odot f$$

Or, d'après l'hypothèse, on a, pour $k = 0, 1, \dots, p-1$:

$$\varphi^{(k)}(x) \equiv \frac{(x-a)^{p-k}}{(p-k)!} \psi_k(x), \quad \text{avec } \psi_k(a) = 0,$$

et de même pour b . Alors, compte tenu de l'hypocontinuité de \odot par rapport aux parties compactes de G et E , on reconnaît que les p premiers termes du 2^d membre de (26.1) ont des primitives prenant la valeur 0 aux points a et b . Cela permet d'arriver aussitôt à la thèse, puisque $\varphi^{(p)} \odot f$ est une fonction continue dans K .

Supposons maintenant E, F complets et soient encore $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ et $\{q_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ deux systèmes fondamentaux de semi-normes dans E et F , respectivement. Considérons une distribution $T \in \overline{C}_\infty(K; E)$ et une fonction $\varphi \in \mathfrak{M}(K; G)$ (cf. th. 20.1 et suite). Alors, pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$, il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$ et une fonction $\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E_\alpha; F_\lambda)$, indéfiniment dérivable dans l'intérieur

de K et à croissance lente vers a et b , telle que $(\varphi(x) \odot \mathbf{e})_\lambda = \tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}(x) \circ \mathbf{e}_\alpha$ pour tout $x \in K$ et $\mathbf{e} \in E$. Dans ces conditions :

THÉOREME 26.1. *Si la fonction φ s'annule aux points a et b , ainsi que toutes leurs dérivées, l'intégrale de $\varphi \odot T$ dans K existe et on a, pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$:*

$$\left(\int_K \varphi \odot T \right)_\lambda = (-1)^{n_\lambda} \int_a^b \varphi_{\lambda\alpha}^{(n_\lambda)}(x) \circ f_\alpha(x) dx,$$

où l'on suppose $T_\alpha = D^{n_\alpha} f_\alpha$, $f_\alpha \in C(K; E_\alpha)$.

Ce théorème, à rapprocher du th. 18.1, est une conséquence des définitions antérieures, de la prop. 26.1 et la formule (20.2).

Observons que L. SCHWARTZ appelle *produit scalaire* de φ par T l'intégrale du produit multiplicatif de φ par T (cf. [12], chap. II).

Dans le cas d'un ouvert I quelconque on trouve un résultat semblable, en imposant à $\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}$ de s'annuler en dehors d'un compact K_λ contenu dans I , pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$.

Ainsi, toutes les intégrales généralisées que nous avons auparavant signalées se trouvent maintenant justifiées. Par exemple, l'expression générale des applications linéaires continues Φ de $\overline{C}_\infty(K; E)$ dans un espace localement convexe complet sera (cf. n.ºs 16 et 18) :

$$\Phi(T) = \int_K \varphi(x) \circ T(x) dx, \quad \text{pour toute } T \in \overline{C}_\infty(K; E)$$

où $\varphi(\xi) \circ \mathbf{e} = \Phi[\delta_K(\hat{x} - \xi) \mathbf{e}]$, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $\mathbf{e} \in E$. Et de même pour l'espace $\overline{C}_\pi(I; E)$.

Nous pouvons aussi donner une *définition directe topologique* de l'intégrale de $\varphi \odot T$ dans K (ou dans I), en tenant compte du fait que T peut s'exprimer comme limite d'une suite (t_n) de fonctions indéfiniment dérivables et que l'application $T \rightarrow \int_K \varphi \odot T$ doit être linéaire et continue. Or pourrait donc poser par définition

$$\int_K \varphi \odot T = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(x) \odot t_n(x) dx,$$

les intégrales du 2^d membre existant au sens ordinaire. Il s'agit donc d'une définition de l'intégrale par le procédé typique de prolongement continu.

Ce point de vue a un avantage: *il n'exige pas que les espaces E et F soient complets, mais seulement qu'ils soient complets pour les suites. En particulier, on reconnaît que les résultats du n.º 18 se généralisent au cas où E et F sont complets pour les suites*, comme nous l'avions annoncé (cf. n.º 23, REMARQUE).

27. Étude topologique des espaces $\mathcal{D}_K(E)$. Soit d'abord E un espace de Banach. Pour tout $n=0, 1, \dots$, nous désignerons par $\mathcal{D}^n(K; E)$ ou $\mathcal{D}_K^n(E)$ l'espace des fonctions φ définies dans R et à valeurs dans E, n fois continûment dérivables et nulles en dehors de K, avec la définition de norme

$$\|\varphi\|_n = \max_{x \in K} \|\varphi^{(n)}(x)\|, \quad n=0, 1, \dots,$$

où la norme employée au 2^d membre est celle de l'espace E. Cela étant, nous poserons

$$\mathcal{D}_K(E) = \mathcal{D}(K; E) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_K^n(E),$$

et considérerons dans l'espace $\mathcal{D}_K(E)$ (des fonctions indéfiniment dérivables à valeurs dans E, nulles en dehors de K) la topologie définie par la suite de normes $\|\cdot\|_n$, $n=0, 1, \dots$. Compte tenu de la prop. 23.1, on voit que, *pour tout n, le complété de $\mathcal{D}_K(E)$ pour la norme $\|\cdot\|_n$ est précisément $\mathcal{D}_K^n(E)$* .

Soit maintenant E un espace localement convexe complet pour les suites et soit $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un système fondamental de semi-normes dans E. Nous désignerons encore par $\mathcal{D}_K(E)$ l'espace des fonctions à valeurs dans E, indéfiniment dérivables dans R et nulles en dehors de K; nous le considérons muni de la topologie définie par la famille des semi-normes suivantes:

$$p_{\alpha, n}(x) = \max_{x \in K} p_\alpha(\varphi^{(n)}(x)), \quad \alpha \in \mathcal{A}, \quad n=0, 1, \dots$$

Il est alors aisé de voir que $\mathcal{D}_K(E)$ est la limite projective des espaces $\mathcal{D}_K(E_x)$ par rapport aux π_x .

En employant le th. 16.1 on voit que:

PROPOSITION 27.1. *Il existe un isomorphisme vectoriel $\Phi \leftrightarrow \varphi$ entre l'espace des applications linéaires continues de $C_\infty(K)$ dans E et l'espace $\mathcal{D}_K(E)$.*

Évidemment, le rôle de E dans l'énoncé du th. 16.1 est joué ici par le corps des scalaires, tandis que le rôle de F est joué par E . D'ailleurs, on a trivialement $\mathcal{L}_b(\mathbb{C}; E) \simeq E$. Alors, la correspondance $\Phi \rightarrow \varphi$, que nous désignerons par \varkappa , sera donnée simplement par la formule :

$$(27.1) \quad \varphi(u) = \Phi[\partial_K(\hat{x} - u)], \quad u \in \mathbb{R},$$

tandis que l'application inverse sera donnée par

$$(27.2) \quad \Phi(T) = \int_K \varphi(u) T(u) du, \quad T \in C_\infty(K) \quad (1)$$

Nous allons démontrer, plus précisément, que :

THÉOREME 27.1. *L'application canonique \varkappa est un isomorphisme vectoriel topologique de $\mathcal{L}_b(C_\infty(K); E)$ sur $\mathcal{D}_K(E)$.*

Il suffit de faire la démonstration dans le cas où E est un espace de Banach. De la formule (27.1) on déduit, pour $p=0, 1, 2, \dots$:

$$(27.3) \quad \varphi^{(p)}(u) = (-1)^p \Phi[\partial_K^{(p)}(\hat{x} - u)], \quad u \in \mathbb{R}.$$

Or, pour chaque p , l'ensemble des vecteurs $\partial_K^{(p)}(\hat{x} - u)$, avec $u \in \mathbb{R}$, est borné dans $C_\infty(K)$ (th. 13.2), puisqu'il en est de même pour les vecteurs $H(\hat{x} - u)$, $u \in K$, et que $\partial_K^{(p)}(\hat{x} - u) = 0$ pour $u \notin K$. On voit alors, compte tenu de (27.3), que la convergence uniforme des Φ vers 0 sur les parties bornées de $C_\infty(K)$ entraîne la convergence des φ vers 0 au sens de la topologie de $\mathcal{D}_K(E)$: l'application \varkappa est donc continue.

Réciproquement, si un ensemble \mathfrak{H} de distributions est borné dans $C_\infty(K)$, il existe, d'après le th. 13.2, un entier k et un nombre μ tels que, pour toute $T \in \mathfrak{H}$:

$$T = D^k f, \quad \text{avec } f \in C(K) \text{ et } |f(x)| < \mu \text{ sur } K$$

Or, de (27.2) on déduit, pour ces distributions :

$$\Phi(T) = (-1)^k \int_a^b \varphi^{(k)}(u) f(u) du,$$

d'où

$$\|\Phi(T)\| \leq \|\varphi\|_K \mu (b - a)$$

(1) Ces résultats avaient été déjà présentés dans [16].

et on voit aussitôt que la convergence des φ vers 0 au sens de la topologie de $\mathfrak{D}_K(E)$ entraîne la convergence uniforme des Φ vers 0 sur les parties bornées de $C_\infty(K)$: l'application α^{-1} est donc aussi continue.

En particulier on reconnaît que :

PROPOSITION 27.2. *L'espace $\mathfrak{D}_K(E)$ est complet.*

28. Applications linéaires continues de $\mathfrak{D}_K(E)$ dans un espace F . Soient d'abord E et F des espaces de Banach.

Il est aisé de voir que, pour toute fonction $\varphi \in \mathfrak{D}^n(K; E)$, la formule

$$\varphi = (-1)^n \int_a^b G_n(\hat{x}, u) \varphi^{(n+2)}(u) du,$$

que l'on peut écrire plus simplement (cf. n.° 22) :

$$(27.1) \quad \varphi = \int_K \vec{\delta}(u) \varphi(u) du = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_K \partial_n(\hat{x}, u) \varphi(u) du$$

reste encore valable, au sens de la norme $\|\cdot\|_n$ considérée (cf. n.° 3). À son tour, toute l'analyse développée au n.° 4 peut se reproduire maintenant, *mutatis mutandis*, pour le cas des applications linéaires continues de $\mathfrak{D}_K(E)$ dans F . Compte tenu des considérations des n.°s 16 et 26, on est alors conduit au résultat suivant (E et F étant des espaces de Banach) :

THÉORÈME 28.1. *Il existe une correspondance biunivoque $\Theta \leftrightarrow T$ entre les applications linéaires continues Θ de $\mathfrak{D}(K; E)$ dans F et les distributions T définies dans K à valeurs dans $\mathfrak{L}_b(E; F)$. La correspondance $T \rightarrow \Theta$ est donnée par la formule*

$$\Theta(\varphi) = \int_K T(u) \circ \varphi(u) du, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{D}_K(E),$$

tandis que la correspondance inverse est donnée par

$$T \circ e = \Theta(\vec{\delta} \circ e), \quad \text{pour tout } e \in E.$$

Observons que, d'après la déf. 6 1, on aura

$$T \circ e = D^n(f \circ e), \quad \text{pour tout } e \in E,$$

en supposant $T = D^n f$, $f \in C(K; \mathfrak{L}_b(E; F))$ et que, d'après les considérations finales du n.° 6, on a :

$$\Theta(\vec{\delta} \circ e) = D_u^{p+2} \Theta_p[G_p(\hat{x}, u) \circ e], \quad u \in K,$$

l'opérateur Θ_p (par rapport aux fonctions de x) étant le prolongement à $\mathcal{D}_K^p(E)$ de l'application Θ , supposée continue au sens de la norme $\|\cdot\|_p$.

D'autre part, on aura par définition

$$\int_K T \circ \varphi = (-1)^n \int_a^b f(x) \circ \varphi^{(n)}(x) dx,$$

si $T = D^n f$, $f \in C(K; \mathcal{L}_b(E; F))$, d'après les conventions du n.º 26.

La distribution T sera dite encore *l'indicatrice* de l'application Θ .

Observons maintenant que le th. 27.1. se généralise au cas de deux espaces localement convexes E et F , complets pour les suites, en imposant à T la condition supplémentaire suivante (cf. n.º 18):

a) *Pour tout $\lambda \in \mathcal{L}$, il existe un $\alpha \in \mathcal{A}$ et une distribution $T_{\lambda\alpha}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E_\alpha; F_\lambda)$, tels que*

$$\overline{\pi_\lambda}(T \circ e) = T_{\lambda\alpha} \circ \pi_\alpha e, \text{ pour tout } e \in E$$

(On continue à supposer, évidemment, que $\{p_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ et $\{q_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{L}}$ sont des systèmes fondamentaux de semi-normes, respectivement dans E et F).

Il est encore facile d'établir, dans le cas général, par analogie avec le th. 16.1, le résultat suivant:

THÉORÈME 28.2. *L'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}_K(E)$ dans F est isomorphe, au sens vectoriel-topologique, à l'espace $B(\mathcal{D}_K, E; F)$, des applications bilinéaires continues de $\mathcal{D}_K \times E$ dans F .*

En observant que, d'après la formule (27.1), le produit tensoriel $\mathcal{D}_K \otimes E$ est un sous-espace dense de $\mathcal{D}_K(E)$, on en déduit, compte tenu de la prop. 27.2:

COROLLAIRE. *L'espace $\mathcal{D}_K(E)$ s'identifie au produit tensoriel projectif complété $\mathcal{D}_K \hat{\otimes} E$.*

On peut donc écrire:

$$\mathcal{D}_K(E) = \mathcal{D}_K \hat{\otimes} E$$

29. Nucléarité des espaces de fonctions et de distributions considérés. On sait que $C_\infty(K)$ est isomorphe, au sens vectoriel topologique, au dual fort, \mathcal{D}'_K , de \mathcal{D}_K (cf. [16]). Le th. 27.1 et le corollaire du th. 28.2 nous permettent donc d'écrire

$$\mathcal{D}_K \hat{\otimes} E \cong \mathcal{L}_b(\mathcal{D}'_K; E),$$

pour tout espace localement convexe complet E . Or, d'après les définitions générales de GROTHENDIECK dans [6], ce fait s'exprime (dans ce cas particulier) en disant que *l'espace \mathcal{D}_K est nucléaire*.

D'autre part GROTHENDIECK a démontré que *le dual fort de tout espace (\mathfrak{F}) nucléaire est aussi nucléaire*. Comme \mathcal{D}_K est un espace (\mathfrak{F}) , il s'ensuit que son dual fort, et par suite $C_\infty(K)$, est aussi nucléaire. Nous pouvons alors écrire

$$(29.1) \quad C_\infty(K) \hat{\otimes} E \cong \mathcal{L}_b(\mathcal{D}_K; E)$$

pour tout espace localement convexe complet E , puisque \mathcal{D}_K est aussi isomorphe au dual fort de $C_\infty(K)$. On pourrait démontrer ce résultat directement, sans avoir recours à la théorie générale des espaces nucléaires.

De (29.1) et des résultats du n.º 18 on déduit enfin que :

$$\overline{C}_\infty(K; E) \cong C_\infty(K) \hat{\otimes} E \cong \mathcal{L}_b(\mathcal{D}_K; E)$$

pour tout espace localement convexe complet E .

L'application canonique α est donc aussi un isomorphisme de $C_\infty(K; E)$ sur $\mathcal{L}_b(\mathcal{D}_K; E)$.

Enfin, on peut étendre sans difficulté ces résultats aux cas des espaces \mathcal{D}_I et $C_\pi(I)$, où I est un intervalle ouvert quelconque de la droite. Dans ce cas, la démonstration directe de l'isomorphisme (29.1) est même plus facile que dans le cas des intervalles compacts.

En particulier, on retrouve ainsi le complément topologique du «théorème des noyaux». Par exemple, on aura, dans le cas de deux intervalles ouverts I et I^* (cf. n.ºs 10 et 19) :

$$\mathcal{L}_b(\mathcal{D}_I; C_\pi(I^*)) \cong C_\pi(I \times I^*)$$

On peut appliquer encore les mêmes techniques à d'autres espaces fonctionnels ou de distributions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chapitres I-II. Act. Scient. Ind., n.º 1141, Hermann, Paris (1951).
- [2] ———, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. I-V, Act. Scient. Ind., n.ºs 1189 (1953), 1229 (1955), Hermann, Paris.
- [3] ———, *Algèbre multilinéaire*, chap. III, Act. Scient. Ind., n.º 1044, Hermann, Paris.
- [4] A. GROTHENDIECK, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*. J. Reine Angew. Math., **192**, p. 35-64, 77-95 (1953).
- [5] ———, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Memoirs Amer. Math. Soc. (1955).
- [6] H. KÖNIG, *Neue Begründung der Theorie der «Distributionen» von L. SCHWARTZ*. Math. Nachrichten, **9**, p. 129-148 (1953).
- [7] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*. J. Reine Angew. Math., **191**, p. 29-49 (1953).
- [8] S. LOJASIEWICZ, *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point*. Studia Math. **16** (1957), p. 1-33.
- [9] J. MIKUSIŃSKI — R. SIKORSKI, *The elementary theory of distributions* (I). Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1957).
- [10] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. I (1950), II (1957), Hermann, Paris.
- [11] ———, *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles*. J. d'Analyse Math., **4**, p. 88-148, Jérusalem (1954-55).
- [12] ———, *Théorie des distributions vectorielles*. Annales de l'Institut Fourier, **7** (1957), p. 1-141, **8** (1958), p. 1-209.
- [13] R. SIKORSKI, *A definition of the notion of distribution*. Bull. Acad. Pol. Sc. Cl. III, **2**, p. 209-211 (1954).
- [14] J. S. E SILVA, *Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque*. Comm. Pontificia Academia Scientiarum, **9**, p. 327-357 (1945).
- [15] ———, *As funções analíticas e a análise funcional*. Thèse, 1948. Portugaliae Math., **9**, p. 1-130 (1950).
- [16] ———, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*. Rev. Fac. Ciências Lisboa, 2.^a série A, **4**, p. 79-186 (1954-55). *Rectifications*: Ibidem, **5**, p. 169-170 (1956).
- [17] ———, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*. Rend. Mat. Univ. Roma, serie V, **14**, p. 388-410 (1955).
- [18] ———, *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*. Portugaliae Math., **17**, p. 1-17 (1958).
- [19] ———, *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*. À paraître dans «Math. Annalen».
- [20] ———, *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables*. Rend. Accad. Lincei, serie VIII, **27**, p. 42-47, 119-122 (1959).
- [21] ———, *Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné*. À paraître dans Rend. Accad. Lincei.

Observation. La méthode des couples (f, m) pour la définition des distributions [cf. n.º 2, b)] a été adoptée, indépendamment de nous, dans le cas d'une seule variable, par M. R. SIKORSKI dans [13]. Les résultats fondamentaux de notre article [16] ont été communiqués à plusieurs mathématiciens, au commencement de 1954.

Errata. Page 57, note (4), remplacer [2] par [12].

PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 19

1 9 6 0

Publicação subsidiada por

Publication subventionnée par

Publication sponsored by

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA, SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
e FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Edição de

«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua Nova da Trindade, 1, 5.º-S
LISBOA-2 (PORTUGAL)

HERMANN & C.^{ie}, Editeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5^{eme})

ERRATA DE L'ARTICLE «SUR LA DEFINITION ET LA STRUCTURE DES DISTRIBUTIONS VECTORIELLES»

PAR J. SEBASTIÃO E SILVA

Page 9, ligne —4: au lieu de « $D_k D_i$ », on doit écrire « $\tilde{D}_k \tilde{D}_i$ ».

Page 57, ligne 27: au lieu de

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k D^{p-k} (\varphi_1^{(k)} \odot f),$$

on doit écrire

$$\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} D^{p-k} (\varphi_1^{(k)} \odot f)$$

Page 59, lignes 19 et 20: au lieu de «*telle qu'il existe un nombre naturel $k \dots$* », on doit écrire:

«*telle que, pour tout $j=0, 1, 2, \dots$, il existe un nombre naturel k (dépendant de j, λ et α), vérifiant la condition⁽¹⁾:*

$$(x-a)^k (x-b)^k \tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}^{(j)}(x) \rightarrow 0 \text{ lorsque } x \rightarrow a \text{ ou } x \rightarrow b \text{ »}.$$

Page 60, ligne 1: au lieu de

$$\sum_{k=0}^{m_z} (-1)^k D^{m_z-k} (\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}^{(k)} \circ f_z),$$

on doit mettre

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m_z}{k} D^{m_z-k} (\tilde{\varphi}_{\lambda\alpha}^{(k)} \circ f_z)$$

Page 73, ligne 19: au lieu de

$$\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k D^{p-k} (\varphi^{(k)} \odot f),$$

on doit écrire

$$\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p}{k} D^{p-k} (\varphi^{(k)} \odot f)$$

REMARQUE. Dans ce travail, lorsqu'on dit qu'un espace est *complet* ou *complet pour les suites*, on sous-entend toujours qu'il est *séparé*.