

ATTI
DELLA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLVIII

1961

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Volume XXX - 1° semestre 1961

Fascicolo 2 - Febbraio 1961



ROMA
ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
1961

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur le calcul symbolique à une ou plusieurs variables, pour une algèbre localement convexe.* Nota di JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Les résultats que nous présentons dans cette Note donnent une synthèse de plusieurs types de calcul symbolique que nous avons considérés dans des travaux précédents (cf. Bibliographie). Il s'agit d'un schéma assez général et assez simple, où rentrent, comme cas particuliers, toutes les formes usuelles de calcul symbolique, depuis le calcul des électrotechniciens à celui des opérateurs hermitiens, et qui, en outre, présente de nouvelles possibilités d'application. Cette généralisation nous a été suggérée récemment par une conférence de M. L. Waelbroeck [9]. Les résultats annoncés dans cette Note seront exposés en détail dans quelques travaux, dont le premier va paraître dans les « Annali di Matematica Pura ed Applicata » ⁽¹⁾.

1. Soit \mathbf{A} une algèbre localement convexe, munie d'élément unité, et d'une topologie localement convexe, par rapport à laquelle le produit soit séparément continu. Pour commodité, nous désignerons par 1 l'élément unité de \mathbf{A} et nous poserons $\lambda 1 = \lambda$, pour tout nombre complexe λ .

Suivant L. Waelbroeck [10], nous nommerons *ensemble spectral* d'un élément \mathbf{a} de \mathbf{A} tout ensemble S de nombres complexes vérifiant les deux conditions suivantes:

- a) l'élément $\mathbf{a} - \lambda$ est régulier pour tout λ n'appartenant pas à S ;
- b) la fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ , à valeurs dans \mathbf{A} , est bornée sur le complémentaire, $\mathbf{C} - S$, de l'ensemble S .

On voit aisément que la famille de tous les ensembles spectraux de \mathbf{a} est un filtre [10]. Nous l'appellerons le *filtre spectral* de \mathbf{a} .

2. Une base de filtre $\{F_k\}$, constituée par des sous-ensembles F_k du plan \mathbf{C} , avec $k = 1, 2, \dots$ sera dite *régulière*, si elle vérifie les conditions suivantes:

- R 1. Pour tout k , $\mathbf{C} - F_k$ est un ouvert non vide de \mathbf{C} .
- R 2. Quel que soit k , la distance de $\mathbf{C} - F_k$ à F_{k+1} est > 0 .
- R 3. Quels que soient k et $\rho > 0$, la frontière de F_k , dans le disque $|z| \leq \rho$, est formée par un nombre fini de lignes simples rectifiables.

(*) Nella seduta dell'11 febbraio 1961.

(1) Une partie de ces résultats ont été déjà annoncés au « Congresso Luso-Espanhol » tenu à Seville, de 23 à 26 novembre 1960.

R 4. Étant c un point quelconque de $\mathbf{C} - F_k$ et F_k^* l'image de F_k par la transformation $z \rightarrow 1/(z - c)$, la longueur de l'intersection de F_k^* avec le disque $|z| \leq \rho$ tend vers une limite finie lorsque $\rho \rightarrow 0$ (quel que soit k).

De R 2 il résulte évidemment que l'intérieur de F_k contient F_{k+1} pour tout k .

Un filtre \mathfrak{F} est dit *régularisable*, s'il admet une base $\{F_k\}$ régulière.

EXEMPLES. – I. Soit F_k , pour tout $k = 1, 2, \dots$, le demi-plan droit $\operatorname{Re}(z) \geq k$. On voit aussitôt que $\{F_k\}$ est une base de filtre régulière.

II. Soit F_k , pour tout k , l'ensemble des points de \mathbf{C} dont la distance au demi-axe réel positif est $\leq 1/k$. On voit encore, immédiatement, que cette base $\{F_k\}$ est régulière.

III. Soit \mathfrak{F} le filtre des voisinages d'un compact F de \mathbf{C} . On voit aisément que le filtre \mathfrak{F} est régularisable.

3. Soit \mathfrak{F} un filtre régularisable de sous-ensembles de \mathbf{C} et soit $\{F_k\}$ une base régulière de \mathfrak{F} . Pour tout k , nous désignerons par $\mathfrak{A}(F_k)$ l'espace des fonctions complexes φ , définies et continues sur F_k , holomorphes dans l'intérieur de F_k et telles que

$$|\varphi(z)| \leq M |z|^k, \quad \text{sur } F_k,$$

où M est une constante dépendante de φ . L'espace $\mathfrak{A}(F_k)$ est une algèbre complexe, relativement aux notions naturelles de somme et de produit de deux fonctions. D'autre part, étant c un point arbitraire de $\mathbf{C} - F_1$, nous considérons l'espace $\mathfrak{A}(F_k)$ muni de la topologie \mathfrak{T}_k définie par la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \left| \frac{\varphi(z)}{(z - c)^k} \right|$$

On démontre que $\mathfrak{A}(F_k)$, muni de cette norme, est un espace de Banach et que la topologie \mathfrak{T}_k ne change pas, quand on remplace c par un autre point de $\mathbf{C} - F_1$.

Si l'on identifie chaque fonction $\varphi \in \mathfrak{A}(F_k)$ à sa restriction à l'ensemble F_{k+1} , on a évidemment $\mathfrak{A}(F_k) \subset \mathfrak{A}(F_{k+1})$, pour tout k . Nous posons alors

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{F}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{A}(F_k).$$

Dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ on définit, de façon naturelle, des notions de somme et de produit, qui rendent cet ensemble une algèbre complexe, munie d'élément unité. D'autre part, il est naturel d'introduire dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ la topologie, \mathfrak{T}_{∞} , de la limite inductive des espaces normés $\mathfrak{A}(F_k)$. Or on démontre que:

Quel que soit k , tout sous-ensemble de $\mathfrak{A}(F_k)$, borné par rapport à \mathfrak{T}_k , est relativement compact par rapport à \mathfrak{T}_{k+1} .

Il en résulte que:

L'espace vectoriel topologique $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ est un espace du type (S_2) (ou un espace $(L N^)$, comme nous disons dans [1]).*

En outre, il est immédiat que le produit $\varphi \cdot \psi$ dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ est continu. D'ailleurs on voit sans difficulté que:

L'élément \hat{z} de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ (c'est-à-dire la fonction $\varphi(z) \equiv z$) a pour filtre spectral précisément \mathfrak{F} .

EXEMPLES. — Les exemples de filtres régularisables que nous avons donnés au n° 2 nous fournissent des exemples correspondants d'espaces $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$. Le premier cas est celui des « espaces de fonctions holomorphes à croissance lente à droite » (cf. [2], [4] et [6]). Le second cas rentre dans le type d'espaces que nous avons considérés à propos des opérateurs à spectre non borné [7]. Le troisième cas est celui des espaces $\mathfrak{A}[F]$ des germes de fonctions analytiques sur F , concernant le calcul symbolique des opérateurs à spectre borné, que nous avons étudié dans notre Thèse (« Portugaliae Math. », 1950).

Tous les cas considérés dans nos antérieurs travaux sur le calcul symbolique sont donc compris dans ce nouveau schéma général.

4. Soit encore \mathbf{A} une algèbre topologique vérifiant les conditions indiquées au n° 1. Supposons en outre que \mathbf{A} est *séparée et semi-complète*. Soit d'autre part \mathfrak{F} un filtre de sous-ensembles de \mathbf{C} , admettant une base $\{F_k\}$ régulière. Dans ces conditions:

THÉORÈME. — *Il existe une correspondance biunivoque $\mathfrak{S} \longleftrightarrow \mathbf{a}$ entre les homomorphismes continus \mathfrak{S} de l'algèbre $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ dans \mathbf{A} , qui font correspondre à l'unité de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ l'unité de \mathbf{A} , et les éléments \mathbf{a} de \mathbf{A} , dont le filtre spectral est plus fin que \mathfrak{F} (i. e. tels que tout F_k soit un ensemble spectral de \mathbf{a}). Cette correspondance est donnée par les formules réciproques*

$$\mathbf{a} = \mathfrak{S}(\hat{z})$$

$$\mathfrak{S}(\varphi) = \frac{(\mathbf{a} - \lambda_0)^p}{2\pi i} \int_{\dot{F}_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^p} (\mathbf{a} - \lambda)^{-1} d\lambda, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}),$$

λ_0 étant un point arbitraire de $\mathbf{C} - F_k$ et k, p des entiers tels que $\varphi \in \mathfrak{A}(F_k)$ et que $\varphi(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)^p$ soit bornée sur F_k ; on considère la frontière de F_k orientée de façon à laisser à droite les points de F_k .

Ce théorème justifie que l'on pose

$$\varphi(\mathbf{a}) = \mathfrak{S}(\varphi), \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}),$$

pourvu que le filtre spectral de \mathbf{a} soit plus fin que \mathfrak{F} . On établit ainsi un calcul symbolique qui comprend, comme cas particuliers, tous les types de calcul symbolique considérés dans nos travaux précédents.

Le cas le plus intéressant est celui où les F_k ne sont pas bornés. Alors la formule antérieure présente une intégrale généralisée, que l'on peut définir correctement dans le cas le plus général des bases régulières.

REMARQUE. — Au lieu des homomorphismes continus de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ dans \mathbf{A} , on peut déterminer, plus généralement, l'expression de toutes les applications linéaires continues de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ dans un espace localement convexe E quelconque, séparé et semi-complet. Dans le cas où les ensembles $\mathbf{C} - F_k$ sont

non bornés, les « indicatrices » de ces applications sont des fonctions à valeurs dans E , holomorphes et « à décroissance presque rapide » dans chacun de ces ensembles.

5. Il se peut que l'homomorphisme continu $\mathbf{a} \rightarrow \varphi(\mathbf{a})$ de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ dans \mathbf{A} soit prolongeable à une sur-algèbre $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F})$ de $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$, munie d'une topologie localement convexe telle que l'injection $\mathfrak{A}(\mathfrak{F}) \rightarrow \tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F})$ soit continue. L'un des buts du calcul symbolique sera, précisément, l'étude de tels prolongements.

Considérons par exemple le cas où \mathfrak{F} est le filtre des voisinages d'un compact K de \mathbf{C} , sans points intérieurs. Certaines fonctions f , holomorphes dans $\mathbf{C} - K$ et nulles à l'infini, s'identifient à des distributions sur \mathbf{R}^2 (que l'on peut désigner par le même symbole). Alors, si l'on pose

$$f^* = d_z f \quad \text{avec} \quad d_z = \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x},$$

f^* sera une distribution sur \mathbf{R}^2 , à support contenu dans K (cf. [2], pp. 48-49). Réciproquement, la formule intégrale de Cauchy et le théorème de Stokes montrent que l'on peut passer de f^* à f moyennant la « transformation de Stieltjes généralisée »:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbf{C}} \frac{f^*(\lambda)}{\lambda - z} d\xi d\eta, \quad \text{avec} \quad \lambda = \xi + i\eta,$$

pour tout $z \in \mathbf{C} - K$. Ce résultat s'étend, évidemment, aux fonctions f à valeurs dans un espace localement convexe semi-complet. Or, il peut arriver que la fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ s'identifie à une distribution $R(\lambda; \mathbf{a})$ sur \mathbf{R}^2 . Alors, si l'on pose, suivant l'ordre d'idées de L. Waelbroeck [10]:

$$\varphi(\mathbf{a}) = \frac{1}{2\pi i} \iint_{\mathbf{C}} \varphi(\lambda) d_z R(\lambda; \mathbf{a}) d\xi d\eta,$$

on voit aisément que le calcul symbolique relatif à l'élément \mathbf{a} se prolonge aux fonctions (ou même distributions) φ définies dans K , pour lesquelles cette intégrale existe.

Dans le cas général d'un filtre régulier \mathfrak{F} quelconque, on peut établir des résultats analogues, en s'appuyant sur une théorie semblable à celle des ultra-distributions tempérées [7], ce qui, en particulier, permettra d'éclaircir les rapports entre notre calcul symbolique et celui de Waelbroeck. D'ailleurs, dans le cas où l'intersection des ensembles F_k est contenue dans l'axe réel ou, plus généralement, dans une ligne analytique L , on peut être conduit au cas des ultra-distributions sur L , comme nous l'avons déjà signalé dans [9], n° 6, pour montrer comment le calcul symbolique des opérateurs hermitiens rentre dans notre schéma général.

6. Considérons n bases de filtre régulières F_k^1, \dots, F_k^n , de sous-ensembles de \mathbf{C} , et désignons par \mathfrak{F} le filtre engendré par les produits cartésiens

$$F_k = F_k^1 \times F_k^2 \times \dots \times F_k^n, \quad k = 1, 2, \dots$$

On peut définir l'algèbre $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$ des fonctions complexes $\varphi(z_1, \dots, z_n)$, holomorphes et à croissance lente sur les ensembles F_k , à peu près exactement comme on l'a fait dans le cas d'une seule variable. La généralisation du théorème antérieur au cas de n variables est alors presque immédiate, en permettant de définir des « fonctions symboliques »

$$\varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \text{avec } \varphi \in \mathfrak{A}(\mathfrak{F}) \text{ et } a_1, \dots, a_n \in \mathbf{A},$$

dans le cas où les a_s sont permutable deux à deux et le filtre spectral de a_s est plus fin que le filtre de base $\{F_k^s\}$, pour $s = 1, \dots, n$.

Plus généralement encore, on peut établir ce théorème, *dans le cas où les fonctions φ prennent leurs valeurs dans un espace localement convexe E (semi-complet et séparé), en supposant donnée une application bilinéaire $(a, u) \rightarrow a \odot u$ de $\mathbf{A} \times E$ dans un autre espace $E_{\mathbf{A}}$, hypocontinue relativement aux parties compactes.*

On en déduit une généralisation du « théorème d'isomorphisme » de Lions (cf. [1], p. 99), qui peut s'appliquer à la résolution de problèmes mixtes relatifs à des équations fonctionnelles de types très généraux.

REMARQUES. – I. Dans cette étude, on peut se passer complètement de la notion de produit tensoriel topologique et même des structures d'espace localement convexe, en les remplaçant par celles, plus commodes, de « espace à bornés » et de « algèbre à bornés », proposées par L. Waelbroeck dans le Colloque de Louvain.

II. Un autre but essentiel du calcul symbolique sera celui d'étendre les résultats précédents au cas d'espaces $\mathfrak{A}(\mathfrak{F})$, où \mathfrak{F} est un filtre de sous-ensembles de \mathbf{C}^n n'admettant pas de base constituée par des produits cartésiens de parties de \mathbf{C} . Nous obtenons une telle extension du calcul symbolique, spécialement utile pour des problèmes de Cauchy, en employant certaines formules à « noyau exponentiel », comme celles considérées dans [5], [6] et [8], et en utilisant les ultra-distributions. C'est là, évidemment, un point de vue différent de celui de Waelbroeck dans [11].

NOTE AJOUTÉE PENDANT LA CORRECTION DES ÉPREUVES. Si K est un compact de \mathbf{C} , on peut employer, pour la représentation canonique des éléments φ de $\mathfrak{A}[K]$, la formule

$$\varphi(z) = \iint \delta(z - \lambda) \varphi(\lambda) d\xi d\eta, \quad \lambda = \xi + i\eta,$$

en interprétant $\delta(z - \lambda)$ comme ultra-distribution en λ à valeurs dans $\mathfrak{A}[K]$, pouvant être approchée par des fonctions entières à valeurs dans $\mathfrak{A}[K]$. Ce point de vue pourrait être utile dans le cas de n variables, en permettant de résoudre les problèmes ouverts.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] J. L. LIONS, *Les problèmes aux limites en théorie des distributions*, « Acta Mathematica », 94, pp. 1-153 (1935).
- [2] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, I. « Actual. Scient. Ind. », n. 1245, Paris Hermann (1957).

- [3] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, « Rendiconti Mat. Univ. Roma » (5), 14, pp. 338–410 (1955).
- [4] — *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*, « Portugaliae Math. », 14, pp. 105–132 (1955).
- [5] — *Sobre o cálculo simbólico geral para n elementos duma álgebra topológica*, Congresso Luso-Espanhol de 1958 (Madrid).
- [6] — *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*, « Portugaliae Math. », 17, pp. 105–132 (1958).
- [7] — *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*, « Math. Annalen », 136, pp. 58–96 (1958).
- [8] — *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables*, « Rend. Accad. Lincei » (8), 27, pp. 42–47, 118–122 (1959).
- [9] — *Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné*, « Memorie Accad. Lincei » (8), 6, pp. 1–13 (1960).
- [10] L. WAELBROECK, *Locally convex algebras: spectral theory. Seminar on complex algebras*, « IAS » (1957–58).
- [11] — *Étude spectrale de certaines algèbres complètes*, « CBRM », Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle à Louvain (1960).

ERRATA DE L'ARTICLE [7].

Nous profitons de cette opportunité pour indiquer quelques rectifications à faire dans l'article [7] de cette bibliographie.

| Page | Ligne | Au lieu de | On doit écrire |
|------|-------|----------------------|---|
| 4 | 17 | nombre k | nombre K |
| 4 | 17 | $k z ^k$ | $K z ^k$ |
| 4 | 34 | converge vers ψ | converge vers 0 |
| 11 | 15 | $\sinh z (t - \tau)$ | $\frac{\sinh \sqrt{z} (t - \tau)}{\sqrt{z}}$ |
| 11 | 18 | $\sinh t \Theta$ | $\frac{\sinh t \sqrt{\Theta}}{\sqrt{\Theta}}$ |

Page 8, ligne – 10, on doit ajouter « semi-complet et séparé » à « localement convexe ».

Page 7, ligne 14, on doit supposer l'origine extérieur à V (ce qui ne diminue pas la généralité du résultat).