

J. SEBASTIÃO e SILVA

SUR LE CALCUL SYMBOLIQUE D'OPÉRATEURS PERMUTABLES
À SPECTRE VIDE OU NON BORNÉ

Estratto dagli *Annali di matematica pura ed applicata*

Serie IV, Tomo LVIII (1962)

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI EDITORE

1962

Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables, à spectre vide ou non borné.

Memoria di J. SEBASTIÃO E SILVA (a Lisbona)

A M. Enrico Bompiani pour son Jubilé scientifique

Résumé. - *Il s'agit d'un calcul symbolique assez général, qui s'applique à des opérateurs différentiels à coefficients constants ou variables, en des problèmes de CAUCHY et problèmes mixtes relatifs à plusieurs types d'équations aux dérivées partielles.*

1. Introduction. - Dans ce travail nous présentons une synthèse de plusieurs types de calcul symbolique, que nous avons considérés dans quelques travaux précédents.

D'abord, nous avons étudié le calcul symbolique des opérateurs à spectre borné, en considérant l'algèbre $\mathcal{A}[K]$ des fonctions $\varphi(z)$ holomorphes sur un compact K du plan \mathbf{C} , contenant le spectre d'un tel opérateur, et nous avons généralisé ces résultats au cas de n opérateurs permutables, A_1, \dots, A_n , en considérant l'algèbre des fonctions $\varphi(z_1, \dots, z_n)$, holomorphes sur le produit cartésien de n compacts de \mathbf{C} , contenant les spectres de ces opérateurs (voir Bibliographie, [8] et [9]). On définit alors $\varphi(A_1, \dots, A_n)$ au moyen de la formule intégrale de CAUCHY. Plus précisément, ces résultats s'appliquent à n éléments permutables, A_1, \dots, A_n , d'une algèbre localement convexe, semi-complète et séparée, où le produit soit séparément continu ⁽¹⁾.

Plus tard, nous avons établi le *calcul symbolique d'opérateurs à spectre vide*, tels que l'opérateur D de dérivation et certains opérateurs différentiels linéaires du 1^{er} et du 2^d ordre à coefficients variables, agissant sur des distributions nulles à gauche (cf. [13], [14] et [17]). À cet effet, nous avons utilisé, soit l'espace A_ω des fonctions holomorphes à croissance lente dans des

⁽¹⁾ Il faut bien souligner que ce calcul symbolique n'est qu'une généralisation du calcul symbolique de FANTAPPIÉ, dont la formulation abstraite (au moins dans le cas d'une seule variable) avait été déjà obtenue, essentiellement, par GELFAND, N. DUNFORD, A. E. TAYLOR, E. LORCH, etc. Notre contribution dans [8] et [9] concerne surtout l'emploi d'algèbres non normables, dont les espaces $\mathcal{A}[K]$ sont un premier exemple (en langage moderne, les éléments de $\mathcal{A}[K]$ sont les *germes de fonction analytique sur K* , que nous appelons *fonctions analytiques liées à K*).

demi-plans droits $\operatorname{Re}(z) \geq k$, $k = 1, 2, \dots$, soit l'espace $\mathcal{A}_\omega^{(2)}$ que l'on déduit de \mathcal{A}_ω par la transformation $\varphi(z) \rightarrow \varphi(\sqrt{z})$, changeant les droites en des paraboles.

Ensuite, nous avons abordé l'étude d'opérateurs à spectre non borné, dont plusieurs types d'opérateurs différentiels, auto-adjoints ou non, offrent des exemples [19].

Tous ces calculs symboliques se ressemblent beaucoup entre eux et il ne fallait qu'un pas pour construire un schéma général dont ils soient des cas particuliers. La notion qui joue ici le rôle unificateur essentiel est celle de « filtre spectral », à la place de la notion élémentaire de spectre, dont l'insuffisance, dans le cas des algèbres localement convexes, a été mise en lumière par M. LUCIEN WAELBROECK, au Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, tenu à Louvain au mois de mai 1960 (cf. [25]). Cela nous a conduit à considérer l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ des « fonctions holomorphes à croissance lente sur un filtre \mathcal{F} régularisable » (n°s 3, 4 et 5).

Dans nos derniers articles sur le calcul symbolique, nous avons omis ou a peine esquissé les démonstrations. Nous profitons de cette opportunité pour donner des démonstrations détaillées de tous nos résultats, présentés maintenant sous sa forme la plus générale, ce qui rend pratiquement dispensable la lecture de nos articles précédents (cette lecture peut avoir seulement quelque intérêt, en ce qui concerne certains détails).

Un de nos résultats fondamentaux dans ce travail est le théorème 2 (n° 9), qui donne les homomorphismes continus \mathcal{H} de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans une algèbre localement convexe \mathbf{A} (semi-complète, séparée, munie d'élément unité et à produit séparément continu), tels que l'image de la fonction $\varphi(z) \equiv 1$ par \mathcal{H} est l'élément unité de \mathbf{A} . Ces homomorphismes \mathcal{H} correspondent biunivoquement aux éléments \mathbf{a} de \mathbf{A} dont le filtre spectral est plus fin que \mathcal{F} , \mathbf{a} étant l'image de la fonction $\varphi(z) \equiv z$ par \mathcal{H} . Dans ces conditions, si l'on pose $\varphi(\mathbf{a}) = \mathcal{H}(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, on obtient un calcul symbolique de l'élément \mathbf{a} .

Les théorèmes 1 et 1' (n° 8) donnent une détermination complète des applications linéaires continues de l'espace $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans un espace localement convexe E , semi-complet et séparé; mais ces résultats, bien que très éclaircissants sur la structure des espaces $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, ne sont pas du tout essentiels pour l'établissement du calcul symbolique, ce qui permet, si on le préfère, réléguer tout le n° 8 à une lecture postérieure.

Dans le n° 11, le calcul symbolique est généralisé au cas de fonctions $\varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ de n éléments *permutables*, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, de l'algèbre \mathbf{A} , en considérant des fonctions $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ holomorphes et à croissance lente sur un filtre \mathcal{F} , engendré par les *produits cartésiens* des ensembles de n filtres régularisables $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ (respectivement plus fins que les filtres spectraux de $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$). Ce calcul symbolique de « forme cartésienne » est évidemment

encore très restreint, mais il est déjà assez utile, au point de vue des applications pratiques.

Ces applications pratiques concernent surtout le cas de n opérateurs permutables (n°. 12) qui sont des applications de sous-espaces d'un espace localement convexe E sur E , prolongeables en des applications continues d'un sur-espace \tilde{E} de E dans \tilde{E} , d'après notre méthode générale d'extension algébrique et topologique exposée dans [10]. Un exemple typique en est celui du laplacien Δ , par rapport à des variables spatiales, associé à l'opérateur D de dérivation par rapport à la variable temps, tels qu'ils se présentent dans l'équation des ondes, l'équation de la chaleur, etc., avec des conditions initiales et conditions aux limites; dans ce cas, les entités que l'on adjoint à E pour obtenir \tilde{E} sont des distributions; mais il y a aussi des cas intéressants d'opérateurs à coefficients variables, conduisant à des entités nouvelles, qui ne sont pas des distributions (cf. [17] et [19]).

Toutefois, l'application du calcul symbolique est souvent encombrée par des problèmes topologiques, en général très difficiles, qui sont tout à fait étranges aux buts de ce calcul. Pour se débarrasser de ces difficultés superflues, il suffit de remplacer les structures de « espace localement convexe » et de « algèbre localement convexe », par les structures, beaucoup plus simples et maniables, de « espace à bornés » et de « algèbre à bornés », proposées par M. WAELBROECK au Colloque de Louvain. Le n°. 13 est consacré à l'exposition de ces notions simplificatrices, qui rendent dispensable toute connaissance sur la théorie des espaces localement convexes; les résultats antérieurs y sont formulés en termes de ces structures.

Dans le n°. 14 nous appliquons le calcul symbolique établi, de « forme cartésienne », aux équations fonctionnelles du type $(A - B)u = f$, où la donnée f et l'inconnue u sont des éléments d'un espace à bornés E et A, B des applications permutables de sous-espaces de E sur E (cf. théorème 4).

Le dessein d'améliorer ce résultat nous a conduit à généraliser le calcul symbolique au cas de fonctions $\varphi(z)$ à valeurs dans un espace vectoriel E localement convexe [resp. à bornés], ce que nous faisons aux n°. 15 et 16. Cette généralisation du calcul symbolique aux équations du type assez général $P(A)u = f$, étant $P(z)$ une fonction de z dont les valeurs sont des opérateurs permutables avec A . On obtient alors un résultat (théorème 5) qui généralise considérablement le « théorème de l'isomorphisme » de LIONS, ainsi que notre théorème 3.

Ce résultat est aussi une variante de la RÈGLE D'INVERSION (cf. n°. 10), qui joue un rôle essentiel dans l'application du calcul symbolique aux équations fonctionnelles. Dans plusieurs cas concrets, elle peut être remplacée par la RÈGLE DE DÉRIVATION, qui n'exige pas de grands développements théoriques pour préciser et justifier son emploi. Mais la première est plus puissante, non seulement parce qu'elle s'applique à des classes plus étendues

d'équations fonctionnelles, *mais aussi parce qu'elle fournit une garantie a priori d'unicité de la solution* ce qui n'est pas vrai en général pour règle de dérivation, comme le montrent, par exemple, les problèmes relatifs à l'équation de la chaleur (cf. [19]).

Dans le dernier numéro, nous montrons comment cette règle d'inversion s'applique au cas où A est l'opérateur D de dérivation, en faisant intervenir la transformation de LAPLACE de distributions vectorielles, dont la théorie est considérablement simplifiée, si l'on emploie les structures de « espace à bornés » et la définition de distribution, comme dérivée formelle de fonction vectorielle continue.

Le calcul symbolique que nous présentons dans ce travail, quoique très général, peut encore être utilement étendu, suivant plusieurs directions, d'après les ordres d'idées esquissés dans [19] et [20]. D'une façon générale, après avoir défini les fonctions $\varphi(\mathbf{a})$, où \mathbf{a} est un élément ou un système d'éléments d'une algèbre \mathbf{A} et φ un élément d'une algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, on cherche à prolonger l'homomorphisme continu $\varphi \rightarrow \varphi(\mathbf{a})$ à une sur-algèbre de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, qui ne soit pas formée uniquement de fonctions holomorphes ou de fonctions à croissance lente ou de fonctions définies sur des produits cartésiens de sous-ensembles de \mathbf{C} . Ces extensions, qui ont toujours pour but principal les applications aux équations fonctionnelles, feront l'objet de travaux prochains.

Il est encore à souligner que ce mémoire a été en partie précédé par un travail de J. CAMPOS FERREIRA, à paraître dans *Portugaliae Mathematica*, où l'auteur s'occupe du calcul symbolique relatif à des fonctions vectorielles holomorphes à croissance lente sur des demi-plans droits et donne, en particulier, une théorie directe de la transformation de LAPLACE pour des distributions vectorielles.

2. Spectre élémentaire et filtre spectral d'un élément d'une algèbre. —

Dans la suite, nous désignerons par \mathbf{A} une algèbre complexe, munie d'élément unité \mathbf{e} , et d'une topologie localement convexe séparée, par rapport à laquelle le produit soit séparément continu. Pour simplifier, nous écrirons 1 au lieu de \mathbf{e} et, en général, λ au lieu de $\lambda \mathbf{e}$, pour tout nombre complexe λ , sauf dans le cas où il y aura possibilité de confusion.

Nous appellerons *spectre élémentaire* d'un élément \mathbf{a} de \mathbf{A} le sous-ensemble du plan \mathbf{C} de la variable complexe, formé par les valeurs de λ pour lesquels $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ n'existe pas (dans \mathbf{A}). En particulier, le spectre élémentaire de \mathbf{a} peut être le plan \mathbf{C} ou l'ensemble vide dans \mathbf{C} .

D'autre part, on appelle *ensemble spectral* de \mathbf{a} tout ensemble S de nombres complexes, vérifiant les deux conditions suivantes :

I. L'élément $\mathbf{a} - \lambda$ de \mathbf{A} est inversible pour tout $\lambda \in \mathbf{C} - S$.

II. La fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ , à valeurs dans \mathbf{A} , est bornée sur $\mathbf{C} - S$.

On voit aussitôt que *tout ensemble spectral de \mathbf{a} contient le spectre élémentaire de \mathbf{a}* . En outre on voit que :

PROPOSITION 1. - Si S est un ensemble spectral de \mathbf{a} , la fonction $\lambda(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ est bornée sur $\mathbf{C} - S$.

Supposons vérifiée l'hypothèse. Alors on a

$$(2.1) \quad \frac{\lambda}{\mathbf{a} - \lambda} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} - \lambda} - 1, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{C} - S.$$

D'après II, l'ensemble des éléments $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de \mathbf{A} , lorsque λ parcourt $\mathbf{C} - S$, est borné. Donc, il en sera de même pour l'ensemble des éléments $\mathbf{a}(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$, avec $\lambda \in \mathbf{C} - S$, puisque l'application $x \rightarrow \mathbf{a}x$ de \mathbf{A} dans \mathbf{A} est continue, le produit dans \mathbf{A} étant séparément continu. Alors de (2.1) on déduit aussitôt la thèse.

PROPOSITION 2. - Si S est un ensemble spectral de \mathbf{a} la fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ est holomorphe dans l'intérieur de $\mathbf{C} - S$ (cf. [14], p. 10, et [24]).

Pour s'en convaincre, il suffit d'employer l'identité :

$$\frac{1}{\mathbf{a} - \lambda} - \frac{1}{\mathbf{a} - \lambda_0} = (\lambda - \lambda_0) \frac{1}{\mathbf{a} - \lambda_0} \cdot \frac{1}{\mathbf{a} - \lambda}, \quad \text{pour } \lambda, \lambda_0 \in \mathbf{C} - S.$$

Elle nous montre d'abord que $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ est une fonction continue de λ en tout point λ_0 de $\mathbf{C} - S$, attendu que, dans le 2^d membre, la fonction $(\mathbf{a} - \lambda_0)^{-1}(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ est bornée sur $\mathbf{C} - S$, le produit dans \mathbf{A} étant séparément continu. Ensuite, en divisant les deux membres par $\lambda - \lambda_0$, on voit que le quotient tend vers $(\mathbf{a} - \lambda_0)^{-2}$ lorsque $\lambda \rightarrow \lambda_0$ sur $\mathbf{C} - S$.

COROLLAIRE. - Le complémentaire de l'intersection de tous les ensembles spectraux fermés de \mathbf{a} est le plus grand sous-ensemble ouvert de \mathbf{C} où la fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ est holomorphe.

En effet, soit F l'intersection de tous les ensembles spectraux fermés de \mathbf{a} . De la prop. 2 il résulte que la fonction $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de λ est holomorphe dans $\mathbf{C} - F$. D'autre part, si cette fonction était encore holomorphe dans un autre ouvert contenant $\mathbf{C} - F$, il existerait un point λ_0 de F et un voisinage ouvert V de λ_0 contenu dans F , où cette fonction serait définie et

bornée; donc F ne serait pas l'intersection de tous les ensembles spectraux fermés de α .

COROLLAIRE 2. - *La famille de tous les ensembles spectraux de α est un filtre* (WAELEBROECK [24]).

En effet, de la définition d'ensemble spectral il résulte immédiatement que:

1) si S est un ensemble spectral de α , tout $S' \supset S$ est encore un ensemble spectral de α ;

2) si S_1, S_2 sont deux ensembles spectraux de α , il en est de même de $S_1 \cap S_2$. D'autre part, si l'ensemble vide était spectral, la fonction $(\alpha - \lambda)^{-1}$ de λ serait entière et, comme

$$\frac{1}{\alpha - \lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda}{\alpha - \lambda}, \quad \text{pour } \lambda \neq 0,$$

sa limite lorsque $\lambda \rightarrow \infty$ serait zéro, vu que la fonction $\lambda(\alpha - \lambda)^{-1}$ est bornée (prop. 1). On aurait alors $(\alpha - \lambda)^{-1} = 0$ partout.

DEFINITION. - Nous appellerons *filtre spectral* de α le filtre des ensembles spectraux de α .

3. Filtres normalisables et filtres distanciables. Support d'un filtre. - Nous dirons qu'un filtre \mathcal{F} de sous-ensembles de \mathbf{C} est *normalisable*, lorsque \mathcal{F} admet une base constituée par une suite d'ensembles fermés F_k ($k = 1, 2, \dots$), vérifiant les deux conditions suivantes:

1) $\mathbf{C} - F_1$ n'est pas vide;

2) quel que soit k , l'intérieur de F_k contient F_{k+1} .

Une base de filtre de sous-ensembles de \mathbf{C} sera dite *normale*, si elle est constituée par une suite d'ensembles fermés F_k de \mathbf{C} vérifiant les conditions 1), 2) et encore la conditions:

3) quels que soient $k = 1, 2, \dots$ et $\rho > 0$, la frontière de F_k dans le disque $|z| \leq \rho$ est formée par un nombre fini d'arcs simples rectifiables. Il est aisé de voir, en employant le théorème de BOREL-LEBESGUE, que tout filtre *normalisable* admet une base *normale*.

Nous dirons qu'une base de filtre de sous-ensembles de \mathbf{C} est *distanciée*, si elle est formée par une suite d'ensembles F_k vérifiant les deux conditions suivantes:

1') $\mathbf{C} - F_1$ n'est pas vide;

2') quel que soit k , la distance de $\mathbf{C} - F_k$ à F_{k+1} est > 0 .

Un filtre de sous-ensembles de \mathbf{C} sera dit *distanciable*, s'il admet une base distanciée. On voit aussitôt que *tout filtre distanciable est normalisable*; mais la réciproque n'est évidemment pas vraie.

Il est encore trivial que, si un filtre \mathcal{F} admet une base $\{F_k\}$ normale, l'adhérence de \mathcal{F} est l'intersection des F_k . Nous l'appellerons le *support* de \mathcal{F} et la désignerons par F_∞ :

$$F_\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcap \mathcal{F}$$

À la fin du n°. 4 on trouvera plusieurs exemples de filtres distanciables.

4. L'espace des fonctions holomorphes à croissance lente sur un filtre normalisable. — Soit \mathcal{F} un filtre normalisable de sous-ensembles de \mathbf{C} et soit $\{F_k\}$ une base normale de \mathcal{F} . Pour tout k nous désignerons par $\mathcal{A}(F_k)$ l'espace des fonctions complexes φ , définies et continues sur F_k , holomorphes à l'intérieur de F_k et telles que $|\varphi(z)| \leq M|z|^k$ sur F_k , M étant une constante finie dépendante de φ . Nous considérons cet espace fonctionnel muni des notions usuelles de somme et produit par scalaires, qui le rendent un espace vectoriel complexe. D'autre part, en prenant arbitrairement un point c de l'ensemble $\mathbf{C} - F_1$, nous considérons $\mathcal{A}(F_k)$ muni de la topologie, \mathcal{T}_k , définie par la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \left| \frac{\varphi(z)}{(z-c)^k} \right|.$$

On voit aisément qu'il s'agit en effet d'une norme et que :

PROPOSITION 3. — *L'espace $\mathcal{A}(F_k)$ muni de cette norme est complet, donc un espace de Banach.*

Il suffit d'observer que les fonctions $\varphi(z)/(z-c)^k$ de z , avec $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$, forment un sous-espace normé de l'espace de BANACH des fonctions continues et bornées sur F_k , et que ce sous-espace est fermé, en vertu du théorème de WEIERSTRASS relatif à la convergence uniforme des suites de fonctions holomorphes dans des domaines de \mathbf{C} .

PROPOSITION 4. — *La topologie \mathcal{T}_k ne change pas si l'on substitue à c un autre point de $\mathbf{C} - F_1$.*

En effet, si l'on prend un autre point c' de $\mathbf{C} - F_1$, on a

$$\frac{\varphi(z)}{(z-c')^k} = \left(\frac{z-c}{z-c'} \right)^k \cdot \frac{\varphi(z)}{(z-c)^k}, \quad \text{pour tout } z \in F_k,$$

et le premier facteur du 2^d membre est une fonction de z continue, bornée

et différente de zéro sur F_k . Donc, si l'on pose

$$\|\varphi\|'_k = \sup_{z \in F_k} \left| \frac{\varphi(z)}{(z - c')^k} \right|,$$

il existe deux constantes $M > 0$ et $N < +\infty$ telles que

$$M \|\varphi\|_k \leq \|\varphi\|'_k \leq N \|\varphi\|'_k,$$

et cela revient à dire que les normes $\|\varphi\|_k$ et $\|\varphi\|'_k$ sont topologiquement équivalentes.

Cela posé, si l'on identifie chaque fonction $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ à la fonction φ^* qui est la restriction de φ à F_{k+1} , on peut écrire $\mathcal{A}(F_k) \subset \mathcal{A}(F_{k+1})$ et on voit aussitôt que la topologie induite par \mathcal{T}_{k+1} dans $\mathcal{A}(F_k)$ est moins fine que \mathcal{T}_k (quel que soit k). Nous poserons alors, par définition:

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}(F_k).$$

Pour commodité, nous appellerons encore *fonctions* aux éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, en tenant compte que chaque élément de l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est représenté par une fonction φ appartenant à un espace $\mathcal{A}(F_k)$ et que φ est identifiée à sa restriction à $F_{k'}$, pour tout $k' > k$. Mais, en réalité, chaque élément de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est la classe des fonctions qui le représentent ⁽²⁾.

Dans cet ordre d'idées, les éléments φ de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ seront nommés *fonctions holomorphes à croissance lente sur \mathcal{F}* (ou sur des ensembles de \mathcal{F}).

Dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ on définit d'une façon évidente des notions de somme et de produit par scalaires, qui rendent cet ensemble un espace vectoriel complexe. D'autre part il est naturel d'introduire dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ la topologie, \mathcal{T}_{∞} , de la limite inductive des espaces normés $\mathcal{A}(F_k)$, c'est-à-dire la plus fine topologie qui, pour tout k , induise dans $\mathcal{A}(F_k)$ une topologie moins fine que \mathcal{T}_k .

D'ailleurs, il est aisé de voir que cette structure vectoriel topologique ne dépend pas de la base $\{F_k\}$ choisie, mais uniquement du filtre \mathcal{F} , vu que la base est, par définition, co-finale dans \mathcal{F} par rapport à la relation \supset (cf. par exemple [11], n°. 2, d).

Dans ces conditions, $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ sera nommé *l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente sur \mathcal{F}* .

PROPOSITION 5. — *Quel que soit k , toute partie de $\mathcal{A}(F_k)$, bornée par rapport à \mathcal{T}_k , sera relativement compacte par rapport à \mathcal{T}_{k+1} .*

⁽²⁾ Plus précisément, si l'on convient de dire que deux fonctions $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et $\psi \in \mathcal{A}(F_{k'})$ sont *équivalentes*, lorsqu'elles coïncident sur $F_k \cap F_{k'}$, les éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ seront les classes déterminées par cette relation d'équivalence.

Soit en effet \mathfrak{B} une partie de $\mathcal{A}(F_k)$ bornée pour \mathcal{T}_k . Cela veut dire qu'il existe une constante M finie telle que

$$|\varphi(z)/(z-c)^k| < M, \quad \text{sur } F_k, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(F_k).$$

Alors, si l'on pose $\psi(z) \equiv \varphi(z)/(z-c)^{k+1}$, on a

$$(4.1) \quad |\psi(z)| < \frac{M}{z-c}, \quad \text{pour tout } z \in F_k$$

et on voit que ces fonctions ψ forment une famille *normale*, donc *équicontinue* en tout point de F_k , en vertu du théorème de BOREL. Si l'ensemble F_k est borné (donc compact), on conclut aussitôt que toute suite (ψ_n) de fonctions de cette famille contient une suite uniformément convergente sur F_{k+1} , ce qui veut dire, précisément, que \mathfrak{B} est relativement *compacte* par rapport à \mathcal{T}_{k+1} . Si F_k n'est pas borné, on peut le rendre compact par la seule adjonction du point ∞ ; alors, si l'on prolonge les ψ en posant $\psi(\infty) = 0$, on déduit de (4.1) que la famille de ces fonctions ψ est équicontinue aussi au point ∞ , et il en résulte, par le théorème de ASCOLI, que toute suite (ψ_n) de ces fonctions contient une suite uniformément convergente sur F_{k+1} : cela veut dire encore que \mathfrak{B} est relativement compacte par rapport à \mathcal{T}_{k+1} .

REMARQUE. — Il est aisé de voir que, dans le cas où F_k est borné, la norme $\|\varphi\|_k$ est équivalente à celle que l'on obtient en prenant $\sup |\varphi(z)|$ sur F_k .

La prop. 5 peut s'énoncer en disant:

La limite inductive. $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ des espaces normés $\mathcal{A}(F_k)$ est un espace du type (S_2) , c'est-à-dire le dual d'un espace de Schwartz métrisable (ou un espace (LN^) , comme nous disons dans [11]; cf. aussi [15] et [27]).*

Ce fait entraîne plusieurs conséquences importantes, dont il suffit de signaler les faits suivants:

- a) $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est un espace séparé, complet et réflexif.
- b) Pour qu'une suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, converge, au sens de \mathcal{T}_∞ , vers un élément φ de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, il faut et il suffit qu'il existe un k tel que: 1°. φ et φ_n appartiennent à $\mathcal{A}(F_k)$ pour tout n ; 2°. le quotient de $\varphi_n(z) - \varphi(z)$ par $(z-c)^k$ converge vers zéro, uniformément sur F_k , lorsque $n \rightarrow \infty$.
- c) Pour qu'un ensemble $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}(\mathcal{F})$ soit borné au sens de \mathcal{T}_∞ , il faut et il suffit qu'il existe un k et un M tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{K}$, on ait $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et $|\varphi(z)| < M|z|^k$ sur F_k .

EXEMPLES. - I. Soit F un sous-ensemble fermé et borné, non vide, du plan \mathbf{C} , et soit \mathcal{F} la famille des sous-ensembles de \mathbf{C} dont l'intérieur contient F . Il est aisé de voir alors que \mathcal{F} est un filtre distanciable: en effet, si pour tout $k = 1, 2, \dots$, on désigne par F_k l'ensemble des points de \mathbf{C} dont la distance à F est $\leq 1/k$, les F_k forment une base distancée de \mathcal{F} . Dans ce cas, l'espace $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ n'est que l'espace des *fonctions analytiques liées* à l'ensemble F , que nous avons étudié en détail dans [8] et [9], et dont l'étude topologique a été complétée par KÜTHE, SILVA DIAS, GROTHENDIECK, etc. (cf. par exemple [1] et [3]). Dans ce cas, le support de \mathcal{F} est évidemment F , c'est-à-dire $F_\infty = F$.

II. Soit maintenant F un sous-ensemble fermé et non borné de \mathbf{C} . Si l'on définit les ensembles F_k comme dans l'exemple I, $\{F_k\}$ sera une base distancée d'un filtre \mathcal{F} , et l'espace $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ correspondant est du type que nous avons étudié dans [19]. Le support de \mathcal{F} est encore F .

III. Soit F_k , pour tout $k = 1, 2, \dots$, le demi-plan $\operatorname{Re}(z) \geq k$. Alors les F_k engendrent un filtre \mathcal{F} distanciable, dont une base normale et distancée est précisément $\{F_k\}$, et $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite, que nous avons étudié dans [13] et [14], en le désignant par \mathcal{A}_ω . Dans ce cas le support de \mathcal{F} est vide.

IV. Un autre exemple encore, très suggestif, est l'espace $\mathcal{A}_\omega^{(2)}$ que l'on déduit de \mathcal{A}_ω par la transformation $\varphi(z) \mapsto \varphi(\sqrt{z})$, changeant les droites en des paraboles (cf. [14], n°. 7, e) et [17], n°. 7).

5. **L'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.** - Dans l'espace fonctionnel $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, que nous venons de munir d'une structure vectoriel-topologique, on définit aussi, de façon évidente, une notion de produit $\varphi\psi$ de deux fonctions φ et ψ . On voit alors aisément que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une algèbre commutative complexe, munie d'élément unité [la fonction $\varphi(z) \equiv 1$, que dans la suite, nous désignerons simplement par 1] et d'une structure d'espace localement convexe, par rapport à laquelle le produit $\varphi\psi$ est continu. On peut donc appliquer à l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ les considérations du n°. 2.

En général, étant donnée une expression $f(z)$, contenant la variable z , nous désignerons par $f(\hat{z})$ la fonction f définie par cette expression, l'accent $\hat{}$ sur une variable indiquant qu'il s'agit là d'une variable muette: par exemple, $\hat{z}^2 + 1$ est la fonction de z définie par l'expression $z^2 + 1$. Observons d'ailleurs que tout polynôme en z représente une fonction identifiable à un élément de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, quel que soit le filtre \mathcal{F} normalisable. Cela étant, on peut énoncer la proposition suivante:

PROPOSITION 6. — Si le filtre \mathcal{F} est distanciabile, tout $F \in \mathcal{F}$ est un ensemble spectral de l'élément \widehat{z} de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ ⁽³⁾.

Soit, en effet, $\{F_k\}$ une base normale et distanciée de \mathcal{F} . Alors, pour tout k , il existe un $\delta_k > 0$, tel que la distance de $\mathbf{C} - F_k$ à F_{k+1} est $> \delta_k$. Donc, pour tout $\lambda \in \mathbf{C} - F_k$, $(\widehat{z} - \lambda)^{-1}$ est un élément de $\mathcal{A}(F_k) \subset \mathcal{A}(F)$ et, puisque

$$|(\widehat{z} - \lambda)^{-1}| < 1/\delta_k, \quad \text{pour } \lambda \in \mathbf{C} - F_k, z \in F_{k+1},$$

la fonction $(\widehat{z} - \lambda)^{-1}$ de λ est bornée sur $\mathbf{C} - F_k$, au sens de la topologie \mathcal{T}_{k+1} , donc au sens de \mathcal{T}_∞ . Comme k est arbitraire, cela conduit aussitôt à la thèse.

D'ailleurs, il est aisé de voir que, *reciproquement*, tout ensemble spectral de \widehat{z} appartient à \mathcal{F} . Par conséquent :

Si \mathcal{F} est distanciabile, \mathcal{F} est le filtre spectral de \widehat{z} , considéré comme élément de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

REMARQUE. — La condition que \mathcal{F} soit distanciabile n'est pas nécessaire pour que \mathcal{F} soit le filtre spectral de l'élément \widehat{z} de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Il suffit, par exemple, que \mathcal{F} admette une base $\{F_k\}$ vérifiant la condition : pour tout k , il existe un $\delta_k > 0$ et un nombre naturel p_k , tels que la distance de $\mathbf{C} - F_k$ à F_{k+1} est supérieure à $\delta_k |z|^{-p_k}$.

6. Intégrales curvilignes impropres. — Considérons un chemin d'intégration Γ , qui, dans tout disque $|z| \leq r$ du plan \mathbf{C} , soit formé par un nombre fini de lignes simples rectifiables orientées. Soient d'autre part E un espace localement convexe *séparé*, *semi-complet*, et $f(\lambda)$ une fonction de la variable complexe λ , à valeurs dans E , *continue sur* Γ . Si Γ est borné, on peut parler de l'intégrale de f sur Γ , et on sait que cette intégrale existe, *f étant continue sur Γ et E étant semi-complet et séparé*.

Supposons maintenant que Γ n'est pas borné. Désignons par Γ_r , pour tout $r > 0$, la partie de Γ contenue dans le disque $|\lambda| \leq r$. Nous poserons alors, *par définition* :

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_r} f(\lambda) d\lambda,$$

si cette limite existe dans E ; nous l'appellerons *l'intégrale de f sur Γ* ⁽⁴⁾.

⁽³⁾ Bien entendu, si l'on identifie \widehat{z} à un élément d'un autre espace $\mathcal{A}(\mathcal{F}^*)$, on ne peut plus affirmer que tout $F \in \mathcal{F}$ soit un ensemble spectral de \widehat{z} , à moins que \mathcal{F}^* ne soit contenu dans \mathcal{F} .

⁽⁴⁾ On pourrait donner une définition plus restrictive, en considérant, au lieu des disques de centre O , la famille de tous les domaines bornés. Mais la définition que nous adoptons ici est suffisante pour les applications que nous en ferons dans ce travail.

Il nous suffit évidemment de considérer le cas où 0 n'appartient pas à Γ (autrement nous pourrions décomposer Γ en deux parties, une bornée et l'autre non bornée). Soient alors Γ^* et Γ_r^* , respectivement, les images de Γ et de Γ_r par la transformation $\lambda \rightarrow 1/\lambda$. Il est évident que, dans le cas considéré, Γ^* est *borné* et que Γ_r^* , intersection de Γ^* avec l'ensemble $|\lambda| \geq 1/r$, est formé par un nombre fini de lignes simples rectifiables; on aura donc

$$\int_{\Gamma_r} f(\lambda) d\lambda = - \int_{\Gamma_r^*} f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Nous disons que Γ^* est rectifiable, si la longueur de Γ_r^* (que nous notons $|\Gamma_r^*|$) tend vers une limite finie, lorsque $r \rightarrow \infty$. Alors nous appellerons *longueur de Γ^** cette limite, et nous poserons $|\Gamma^*| = \lim_{r \rightarrow \infty} |\Gamma_r^*|$.

De (6.1) on déduit le résultat suivant:

PROPOSITION 7. - *Si la fonction $\lambda^2 f(\lambda)$ de λ est bornée sur Γ (f étant continue sur Γ) et si Γ^* est rectifiable, l'intégrale de f sur Γ existe et on a, pour toute semi-norme p continue sur E :*

$$p \left[\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda \right] \leq L_p |\Gamma^*|,$$

L_p étant une constante finie dépendante de p , telle que $p[\lambda^2 f(\lambda)] \leq L_p$ sur Γ .

Démonstration. Supposons vérifiées les hypothèses. Alors, pour toute semi-norme p continue sur E , il existe une constante finie L_p , telle que

$$p[\lambda^2 f(\lambda)] \leq L_p \quad \text{sur } \Gamma^*,$$

donc telle que

$$p \left[f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \leq L_p |\lambda|^2 \quad \text{sur } \Gamma^*.$$

Par suite, quels que soient $r, s > 0$, avec $r < s$, si l'on désigne par $\Gamma_{r,s}^*$ la partie de Γ^* contenue dans la couronne $1/s \leq |\lambda| \leq 1/r$, on aura

$$\begin{aligned} (6.1) \quad & p \left[\int_{\Gamma_r^*} f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2} - \int_{\Gamma_s^*} f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2} \right] \\ &= p \left[\int_{\Gamma_{r,s}^*} f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2} \right] \leq L_p |\Gamma_{r,s}^*|. \end{aligned}$$

Or, puisque $|\Gamma_r^*|$ tend vers une limite finie lorsque $r \rightarrow \infty$, $|\Gamma_{r,s}^*|$ tend vers zéro, lorsque $r, s \rightarrow \infty$; donc, il en sera de même pour le 1^{er} membre de (6.1), quelle que soit la semi-norme p continue sur E . Comme l'espace E est semi-complet et séparé, il s'ensuit que l'intégrale

$$-\int_{\Gamma_r^*} f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2} = \int_{\Gamma_r} f(\lambda) d\lambda$$

lorsque $r \rightarrow \infty$, tend vers un élément de E , qui est par définition l'intégrale de f sur Γ

D'autre part, on a

$$p\left[-\int_{\Gamma_r^*} f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2}\right] \leq L_p |\Gamma_r^*|,$$

d'où, en passant à la limite, lorsque $r \rightarrow \infty$:

$$p\left[\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda\right] \leq L_p |\Gamma^*| \quad \text{q. e. d.}$$

DÉFINITION. — Nous dirons que Γ est *rectifiable après inversion*, lorsque l'image de Γ par une transformation $\lambda \rightarrow (\lambda - c)^{-1}$, avec $c \notin \Gamma$, est rectifiable.

Considérons maintenant, plus généralement, n chemins d'intégration $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$, qui, dans tout disque $|\lambda| \leq r$ du plan \mathbf{C} , soient formés par un nombre fini de lignes simples rectifiables orientées. Soient d'autre part E un espace localement convexe semi-complet et séparé, $f(\lambda) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une fonction complexe de n variables complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, à valeurs dans E , continue sur le produit $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_n$. Si les Γ_n sont bornés, on peut parler de l'intégrale multiple de f sur Γ ,

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_1} \dots \int_{\Gamma_n} f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

Comme f est continue sur Γ et que l'espace E est semi complet et séparé, cette intégrale existe et on a

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_1} d\lambda_1 \int_{\Gamma_2} d\lambda_2 \dots \int_{\Gamma_n} d\lambda_n f(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

d'où l'on déduit que, dans ce cas, l'ordre des intégrations peut être changé arbitrairement.

Supposons maintenant que l'un au moins des Γ_j n'est pas borné. Désignons par Γ_{j,r_j} , pour tout $j = 1, \dots, n$ et tout $r_j > 0$, la partie de Γ_j contenue dans le disque $|\lambda| \leq r_j$, et posons $\Gamma_r = \Gamma_{1,r_1} \times \dots \times \Gamma_{n,r_n}$ avec $r = (r_1, \dots, r_n)$. Alors on peut poser, par définition :

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = \lim_{r \rightarrow (\infty, \infty, \dots, \infty)} \int_{\Gamma_r} f(\lambda) d\lambda,$$

Comme dans le cas d'une variable, on peut écarter le cas où 0 appartient au moins à un des Γ_j et on établit, sans difficulté, la généralisation suivante de la prop. 7 :

PROPOSITION 8. - Si la fonction $\lambda_1^2 \dots \lambda_n^2 f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ est bornée sur Γ (f étant continue sur Γ) et si pour tout j , Γ_j^* est rectifiable, l'intégrale de f sur Γ existe et on a, pour toute semi-norme p continue sur E ,

$$p \left[\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda \right] \leq L_p |\Gamma_1^*| \cdot |\Gamma_2^*| \dots |\Gamma_n^*|,$$

L_p étant une constante finie dépendante de p telle que $p[\lambda_1^2 \dots \lambda_n^2 f(\lambda)] \leq L_p$ sur Γ . En outre, on aura

$$\int_{\Gamma} f(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_1} d\lambda_1 \int_{\Gamma_2} d\lambda_2 \dots \int_{\Gamma_n} d\lambda_n f(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

ce qui implique, évidemment, que l'ordre des intégrations est arbitraire.

Pour la démonstration, on peut suivre une technique semblable à celle de la démonstration de la prop. 7, et on peut se borner au cas de deux variables, puisque, dans le cas général, la démonstration est parfaitement analogue.

7. Représentation canonique des éléments de l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. - Soit $\{F_k\}$ une base d'un filtre \mathcal{F} de sous-ensembles de \mathbf{C} ($k = 1, 2, \dots$). Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que les frontières de ces ensembles ne contiennent pas l'origine. Dans ces conditions :

DEFINITION. - On dit que la base $\{F_k\}$ est *régulière*, si elle est normale et distanciée, et si, quel que soit k , la frontière de F_k est rectifiable après inversion. Nous dirons alors que le filtre \mathcal{F} engendré par cette base est *régularisable*.

Dans les cas qui intéressent aux applications, les frontières des F_k sont composées de lignes droites, arcs de cercle, arcs de parabole, etc., et la condition indiquée se vérifie en général. Ainsi, dans les exemples I et III du n°. 4, les bases F_k considérées sont évidemment régulières; dans l'exemple II, la base sera régulière si l'ensemble F est une droite, une demi-droite, une suite de points isolés, une parabole, etc. etc.

Soit donc F_k une base régulière et choisissons un point $c \in \mathbf{C} - F_1$. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ il existe un k tel que $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$; donc, si l'on pose

$$(7.1) \quad \psi(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-c)^{k+1}} \quad \text{sur } F_k,$$

la fonction $(z-c)\psi(z)$ de z sera bornée sur F_k et, par suite, la fonction $z\psi(z)$ de z sera aussi bornée sur F_k . Désignons par C_r la frontière de l'intersection de F_k avec le disque $|z| \leq r$, pour tout $r < 0$; nous supposons C_r orientée de façon à laisser à droite les points de cette intersection. Alors on aura, par la formule de CAUCHY:

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\psi(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda, \quad \text{pour tout } z \text{ intérieur à } C_r.$$

D'autre part, si l'on désigne par D_r la partie de C_r n'appartenant pas à la frontière de F_k , on aura:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{D_r} \frac{\psi(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda = 0, \quad \text{pour tout } z \text{ intérieur à } F_k.$$

En effet, on a $|D_r| \leq 2\pi r$ et, puisque la fonction $\lambda\psi(\lambda)$ de λ est bornée sur F_k , on peut fixer, pour tout z intérieur à F_k , une constante M_z finie telle que:

$$\left| \frac{\psi(\lambda)}{z-\lambda} \right| \leq \frac{M_z}{r^2}, \quad \text{pour tout } \lambda \in D_r \text{ et tout } r > 0.$$

Alors, si l'on désigne par Γ_k la frontière de F_k , orientée de façon à laisser à droite F_k , on peut écrire

$$(7.2) \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\psi(\lambda)}{z-\lambda} d\lambda, \quad \text{pour tout } z \text{ intérieur à } F_k.$$

Or, d'après la prop. 6, la fonction $(\widehat{z} - \lambda)^{-1}$ de λ , à valeurs dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$,

est bornée sur $\mathbf{C} - F_k$ (quel que soit k). Il en découle que cette fonction est holomorphe dans $\mathbf{C} - F_k$ (prop. 2) et que la fonction $\lambda(\widehat{z} - \lambda)^{-1}$ de λ est aussi bornée sur $\mathbf{C} - F_k$ quel que soit k (prop. 1).

Nous désignerons par $\mathbf{j}(\lambda)$ la fonction $(\widehat{z} - \lambda)^{-1}$ de λ à valeurs dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, c'est-à-dire nous poserons

$$\mathbf{j}(\lambda) = \frac{1}{(\widehat{z} - \lambda)}, \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{C} - F_\infty$$

où $F_\infty = \bigcap_1^\infty F_k$ (support de \mathcal{F}). Puisque $\psi(\lambda)$ est une fonction complexe continue sur F_k et que $\mathbf{j}(\lambda)$ est une fonction à valeurs dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, holomorphe dans $\mathbf{C} - F_{k+1}$, le produit $\psi(\lambda)\mathbf{j}(\lambda)$ est une fonction de λ à valeurs dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, continue sur Γ_k . Comme, d'autre part, $\lambda\psi(\lambda)$ est bornée sur F_k et $\lambda\mathbf{j}(\lambda)$ est bornée sur $\mathbf{C} - F_{k+1}$, la fonction $\lambda^2\psi(\lambda)\mathbf{j}(\lambda)$ de λ est bornée sur Γ_k . Enfin, comme la base $\{F_k\}$ est régulière, par hypothèse, la frontière de F_k est rectifiable après inversion (on suppose, pour commodité, $0 \notin \Gamma_k$). Donc en vertu de la prop. 7, l'intégrale de $\psi(\lambda)\mathbf{j}(\lambda)$ sur Γ_k existe. Par conséquent, on peut écrire (7.2) sous la forme :

$$\psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \psi(\lambda)\mathbf{j}(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\psi(\lambda)}{\widehat{z} - \lambda} d\lambda,$$

où l'intégrale est prise au sens de la topologie \mathcal{T}_∞ de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ et où l'on suppose la frontière, Γ_k , de F_k orientée de façon à laisser F_k à droite.

Enfin, compte tenu de (7.1), on trouve

$$(7.3) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - c)^{k+1}} \frac{(\widehat{z} - c)^{k+1}}{(\widehat{z} - \lambda)} d\lambda \quad (\text{au sens de } \mathcal{T}_\infty).$$

En conclusion :

La formule (7.3), valable pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et tout $k = 1, 2 \dots$, dans l'hypothèse où la base $\{F_k\}$ est régulière, fournit une représentation canonique des éléments φ de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ en fonction de l'élément \widehat{z} , en termes de la structure d'algèbre topologique définie dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Les valeurs $\varphi(\lambda)$ de φ figurent au 2^d membre seulement comme des scalaires, que l'on multiplie par des vecteurs construits au moyen de \widehat{z} .

Cette formule va nous permettre de trouver, non seulement une expression générale des homomorphismes continus de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans une algèbre localement convexe \mathbf{A} , mais aussi une expression générale de toutes les applications linéaires continues de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans un espace localement convexe E quelconque (semi-complet et séparé).

Mais il convient encore d'observer que, dans certains cas, il sera plus commode d'employer la formule

$$(7.3') \quad \varphi = \frac{(\widehat{z} - c)^p}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - c)^p (\widehat{z} - \lambda)} d\lambda,$$

où l'on suppose les entiers k et p choisis de façon que $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et que $\varphi(\lambda)/(\lambda - c)^{p-1}$ soit bornée sur F_k .

8. Applications linéaires continues de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E ⁽⁵⁾. — Soit \mathcal{F} un filtre admettant une base normale $\{F_k\}$ et soit E un espace vectoriel complexe, localement convexe, semi-complet et séparé. Pour la recherche des applications linéaires continues de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E , il suffit de voir comment la formule (7.3) donne aussi une représentation des éléments φ de l'espace $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, en fonction des vecteurs de base $(\widehat{z} - \lambda)^{-1}$, $\lambda \in \mathbf{C} - F_\infty$, en seuls termes vectoriel-topologiques de cet espace [donc, sans employer la notion de produit de deux éléments quelconques de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$]. À cet effet, il est commode d'employer la définition suivante :

DÉFINITION. — Soit M un sous-ensemble quelconque de \mathbf{C} . On dit qu'une fonction $f(\lambda)$ de la variable complexe λ , à valeurs dans E , est à décroissance presque rapide sur M , si pour tout $n = 1, 2, \dots$, il est possible de représenter $f(\lambda)$ sur M , sous la forme :

$$f(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda - \lambda_0} + \dots + \frac{a_n}{(\lambda - \lambda_0)^n} + f_n(\lambda), \quad \text{pour } \lambda \neq \lambda_0,$$

où λ_0 est un point quelconque de \mathbf{C} , a_1, \dots, a_n des éléments de E et $f_n(\lambda)$ une fonction de λ à valeurs dans E telle que la fonction $(\lambda - \lambda_0)^{n+1} f_n(\lambda)$ soit bornée sur M . Les éléments a_j seront nommés les *coefficients asymptotiques de f par rapport à λ_0* et la fonction f_n , pour tout n , le *reste d'ordre n de f relatif à λ_0* (cf. [14] et [16]).

Il est bien aisé de voir que, s'il existe un point λ_0 vérifiant cette condition, n'importe quel autre point de \mathbf{C} vérifie une condition identique. D'ailleurs on a immédiatement :

PROPOSITION 9. — *Si M n'est pas borné, les coefficients asymptotiques et les restes de f par rapport à λ_0 sont univoquement déterminés, à partir de f*

⁽⁵⁾ Comme on l'a dit dans l'Introduction, ce n.º n'est pas indispensable pour la compréhension de ce qui suit, concernant le sujet principal de ce travail (le calcul symbolique).

et de λ_0 , au moyen des formules

$$(8.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_0(\lambda) = f(\lambda), \quad f_n(\lambda) = f(\lambda) - \sum_1^n \frac{a_\nu}{(\lambda - \lambda_0)^\nu}, \quad \text{sur } M \\ a_{n+1} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [(\lambda - \lambda_0)^{n+1} f_n(\lambda)]. \end{array} \right.$$

Si M est borné, il suffit que f soit bornée sur M , pour que f soit à décroissance presque rapide sur M , d'après la définition. Alors, les coefficients asymptotiques sont complètement arbitraires et la terminologie ci-dessus introduite manque de base intuitive; mais nous l'adoptons, même dans ce cas, pour une raison de commodité.

PROPOSITION 10. - Si S est un ensemble spectral d'un élément a de l'algèbre A , la fonction $(a - \lambda)^{-1}$ de λ est à décroissance presque rapide sur $C - S$.

En effet, de l'identité

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + \dots + r^{n-1} + \frac{r^n}{1-r}, \quad \text{avec } r \neq 1,$$

on déduit, dans l'algèbre A , quel que soit $\lambda_0 \in C$:

$$\frac{1}{a - \lambda} = -\frac{1}{\lambda - \lambda_0} - \frac{a - \lambda_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} - \dots - \frac{(a - \lambda_0)^{n-1}}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \frac{(a - \lambda_0)^n}{(\lambda - \lambda_0)^n} \cdot \frac{1}{a - \lambda},$$

pour $\lambda \in C - S$, $\lambda \neq \lambda_0$, en observant que, dans ces conditions, on a:

$$\frac{1}{a - \lambda} = -\frac{1}{(\lambda - \lambda_0) - (a - \lambda_0)} = -\frac{1}{\lambda - \lambda_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a - \lambda_0}{\lambda - \lambda_0}}.$$

Donc, si l'on pose

$$a_n = -(a - \lambda_0)^n, \quad f_n(\lambda) = \frac{(a - \lambda_0)^n}{(\lambda - \lambda_0)^n (a - \lambda)}, \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots,$$

il reste à prouver que la fonction $(\lambda - \lambda_0)^{n+1} f_n(\lambda)$ de λ est bornée sur $C - S$ pour tout n . Mais cela est une conséquence immédiate de la prop. 1, attendu que l'application $x \rightarrow (a - \lambda_0)^n x$ de A dans A est continue.

Il en résulte, compte tenu de la prop. 6:

COROLLAIRE. - Si la base de filtre $\{F_k\}$ est distanciée, la fonction $j(\lambda) \equiv (\widehat{z} - \lambda)^{-1}$ de λ , à valeurs dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, est à décroissance presque rapide sur $C - F_k$, quel que soit k .

La démonstration de la prop. 10 nous montre que le reste d'ordre n de \mathbf{j} par rapport à un point λ_0 quelconque, sera dans ce cas :

$$\mathbf{j}_n(\lambda) = \frac{(\bar{z} - \lambda_0)^n}{(\lambda - \lambda_0)^n (\bar{z} - \lambda)}.$$

Donc, si l'on suppose la base $\{F_k\}$ régulière, la formule (7.3) peut maintenant s'écrire :

$$(8.2) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{j}_{k+1}(\lambda) d\lambda.$$

Or, dans le cas où les $\mathbf{C} - F_k$ ne sont pas bornés, les fonctions \mathbf{j}_k sont déterminées à partir de \mathbf{j} au moyen des formules (8.1). Donc, nous avons ainsi obtenu, dans ce cas, une représentation canonique des éléments de l'espace $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, en fonction des vecteurs de base $\mathbf{j}(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbf{C} - F_\infty$), en seule termes vectoriel-topologiques de cet espace ⁽⁶⁾.

D'autre part, nous avons trouvé une description vectoriel-topologique de la base $\mathbf{j}(\lambda)$, au moyen des deux propriétés suivantes :

- 1) \mathbf{j} est une fonction holomorphe dans $\mathbf{C} - F_\infty$;
- 2) \mathbf{j} est à décroissance presque rapide sur $\mathbf{C} - F_k$, pour tout $k = 1, 2, \dots$.

Ces observations conduisent au résultat suivant :

THÉOREME 1. - Supposons que le filtre \mathcal{F} admet une base $\{F_k\}$ régulière et que $\mathbf{C} - F_k$ est non borné pour tout k . Alors, il existe une correspondance biunivoque $U \leftrightarrow \mathbf{u}$, entre les applications linéaires continues U de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E , et les applications \mathbf{u} de $\mathbf{C} - F_\infty$ dans E , qui sont holomorphes dans $\mathbf{C} - F_\infty$ et à décroissance presque rapide sur $\mathbf{C} - F_k$ pour tout k . Cette correspondance est est donnée par les deux formules réciproques

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\lambda) = U[(\bar{z} - \lambda)^{-1}], \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{C} - F_\infty \\ U(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{u}_{k+1}(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}), \end{array} \right.$$

où k est un entier tel que $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, \mathbf{u}_{k+1} le reste d'ordre $k+1$ de \mathbf{u} par rap-

⁽⁶⁾ D'après la convention du n.º 3, nous désignons ici par F_∞ l'intersection des F_k (support de \mathcal{F}).

port à un point λ_0 quelconque de $\mathbf{C} - F_1$, et Γ_k la frontière de F_k orientée de façon à laisser F_k à droite ⁽⁷⁾.

Démonstration:

a) Soit U une application linéaire continue quelconque de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E et posons

$$\mathbf{u}(\lambda) = U[(\widehat{z} - \lambda)^{-1}], \quad \text{sur } \mathbf{C} - F_\infty.$$

Nous avons vu que la fonction $\mathbf{j}(\lambda) \equiv (\widehat{z} - \lambda)^{-1}$ est holomorphe dans $\mathbf{C} - F_\infty$ et à décroissance presque rapide sur tout $\mathbf{C} - F_k$. Or il est bien aisé de voir que ces deux propriétés, *exprimables en termes vectoriel-topologiques de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$* , sont conservées par n'importe quelle application linéaire continue de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E ; c'est-à-dire, l'image $\mathbf{u}(\lambda)$, de $\mathbf{j}(\lambda)$ par U (à valeurs dans E) aura les mêmes propriétés, et on voit aussitôt que

$$U[\mathbf{j}_n(\lambda)] = \mathbf{u}_n(\lambda), \quad \text{sur } \mathbf{C} - F_\infty, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où \mathbf{j}_n et \mathbf{u}_n sont les restes d'ordre n de \mathbf{j} et \mathbf{u} , par rapport à un point λ_0 arbitraire de $\mathbf{C} - F_1$.

Soit maintenant φ un élément quelconque de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Il existe alors un entier k tel que $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et, par suite :

$$(8.2') \quad \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{j}_{k+1}(\lambda) d\lambda \quad (\text{au sens de } \mathcal{T}_\infty).$$

Donc, si l'on applique U aux deux membres de (8.2'), en tenant compte que l'application U est linéaire continue et que l'intégrale considérée s'exprime comme limite, dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, de sommes de produits de scalaires par les vecteurs $\mathbf{j}_{k+1}(\lambda)$, avec $\lambda \in \Gamma_k$, on trouve aussitôt :

$$\begin{aligned} U(\varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) U[\mathbf{j}_{k+1}(\lambda)] d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{u}_{k+1}(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

b) Soit, réciproquement, $\mathbf{u}(\lambda)$ une fonction à valeurs dans E , holo-

⁽⁷⁾ Ce théorème est une généralisation du th. 1 de [14], où l'intervention des fonctions à croissance presque rapide a été signalée par M. L. SCHWARTZ.

morphe dans $\mathbf{C} - F_\infty$ et à décroissance presque rapide sur $\mathbf{C} - F_k$, pour tout k . Posons

$$(8.3) \quad U(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{u}_{k+1}(\lambda) d\lambda$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et tout $k = 1, 2, \dots$, $\mathbf{u}_k(\lambda)$ étant le reste d'ordre k de $\mathbf{u}(\lambda)$ relatif à un point λ_0 de $\mathbf{C} - F_1$. Il s'agit de démontrer que la formule (8.3) définit, effectivement, une application linéaire continue U de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E , et que l'on a $U[(\bar{z} - \lambda)^{-1}] = \mathbf{u}(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C} - F_\infty$. Nous le ferons par 5 étapes, en supposant, pour commodité, $\lambda_0 = 0$ (sans perte de généralité):

1.^o *L'intégrale du 2^d membre de (8.3) existe dans E .* En effet, comme $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$, la fonction $\varphi(\lambda)/\lambda^k$ est continue et bornée sur F_k ; la borne supérieure de son module sur F_k peut être prise pour $\|\varphi\|_k$. D'autre part, comme \mathbf{u}_{k+1} est le reste d'ordre $k+1$ de \mathbf{u} par rapport à $\lambda_0 = 0$, la fonction $\lambda^{k+2} \mathbf{u}_{k+1}(\lambda)$ de λ est continue et bornée sur $\mathbf{C} - F_{k+1}$. Donc, pour toute seminorme p continue sur E , il existe une constante $L_{k,p}$ finie, telle que

$$(8.4) \quad p[\lambda^2 \varphi(\lambda) \mathbf{u}_{k+1}(\lambda)] \leq L_{k,p} \|\varphi\|_k, \quad \text{sur } F_k.$$

En outre, l'image, Γ_k^* , de Γ_k , par l'application $\lambda \mapsto 1/\lambda$, est rectifiable, puisque la base $\{F_k\}$ est régulière par hypothèse. Par conséquent, d'après la prop. 7, l'intégrale en question existe effectivement.

2.^o *La transformation U est univoque, c'est-à-dire, l'élément $U(\varphi)$ défini par (8.3) dépend seulement de φ et non pas de k .* Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, si $h > k$, on a, en vertu du théorème de CAUCHY,

$$\int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{u}_{k+1}(\lambda) d\lambda = \int_{\Gamma_h} \varphi(\lambda) \mathbf{u}_{h+1}(\lambda) d\lambda,$$

car la différence entre la première fonction intégrande et la seconde est une somme de fonctions de λ de la forme $\mathbf{a}_s \varphi(\lambda)/\lambda^s$ ($\mathbf{a}_s \in E$, $k+2 \leq s \leq h$) et que, ces fonctions étant continues sur F_k et holomorphes dans l'intérieur de F_k , leurs intégrales sur Γ_k sont nulles (cela est évidemment vrai pour les intégrales sur la frontière, C_r , de l'intersection de F_k avec le disque $|z| \leq r$; en outre, les intégrales sur la partie de C_r n'appartenant pas à Γ_k tendent vers zéro lorsque $r \rightarrow \infty$).

3.^o *L'application U est linéaire.* Il suffit d'observer que, pour tout couple de fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, il existe toujours un k tel que φ et ψ appartiennent simultanément à $\mathcal{A}(F_k)$, et d'employer les propriétés de linéarité

des intégrales, qui subsistent évidemment pour les intégrales impropres définies au n.º 6.

4.º *L'application U est continue.* Comme $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est la limite inductive des espaces normés $\mathcal{A}(F_k)$, il suffit de montrer que la restriction de U à $\mathcal{A}(F_k)$ est continue (au sens de \mathcal{T}_k) pour tout k . Or nous avons vu que, pour tout entier k et toute semi-norme p continue sur E , il existe une constante $L_{k,p}$ finie, tel que l'on a (8.4) pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$. Il en résulte, par la prop. 7, que

$$\begin{aligned} p[U(\varphi)] &= \frac{1}{2\pi} p \left[\int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{u}_{k+1}(\lambda) d\lambda \right] \\ &\leq \frac{1}{2\pi} L_{k,p} | \Gamma_k^* | \cdot \| \varphi \|_k \end{aligned}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$. Cela montre aussitôt que $p[U(\varphi)] \rightarrow 0$ lorsque $\| \varphi \|_k \rightarrow 0$. Donc, la restriction de U à $\mathcal{A}(F_k)$ est bien continue, au sens de \mathcal{T}_k , quel que soit k et par suite, U est continue sur $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ au sens de \mathcal{T}_∞ .

5.º On a $U[(\widehat{z} - \lambda)^{-1}] = u(\lambda)$, pour tout $\lambda \in \mathbf{C} - F_\infty$. Soit en effet λ' un point quelconque de $\mathbf{C} - F_\infty$. Alors il existe un k tel que $\lambda' \in \mathbf{C} - F_k$, i. e. tel que la fonction $(z - \lambda')^{-1}$ est un élément de $\mathcal{A}(F_k)$. On aura donc

$$\begin{aligned} U[(\widehat{z} - \lambda')^{-1}] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} (\lambda - \lambda')^{-1} \mathbf{u}_{k+1}(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} (\lambda - \lambda')^{-1} [\mathbf{u}(\lambda) - \sum_{s=1}^{k+1} \alpha_s \lambda^{-s}] d\lambda \end{aligned}$$

où les α_s sont les coefficients asymptotiques de \mathbf{u} par rapport au point 0. On en déduit, compte tenu que $\mathbf{u}(\lambda)$ est holomorphe et bornée sur $\mathbf{C} - F_{k+1}$, et que la frontière de F_k est orientée de façon à laisser $\mathbf{C} - F_k$ à gauche :

$$U[(\widehat{z} - \lambda')^{-1}] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\mathbf{u}(\lambda)}{\lambda - \lambda'} d\lambda = \mathbf{u}(\lambda'), \quad \text{c. q. f. d.}$$

DÉFINITION. - On appelle *fonction indicatrice* d'une application linéaire continue U de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E la fonction \mathbf{u} qui, d'après le théorème 1, la représente de façon biunivoque.

NOTES COMPLÉMENTAIRES AU THÉORÈME 1 :

I. *Cas où \mathcal{F} est constitué par les voisinages d'un compact.* — Soit \mathcal{F} le filtre des voisinages d'un compact F de \mathbf{C} ; nous avons vu (n.º 4) que l'on peut dans ce cas choisir une base de \mathcal{F} distanciée, et par suite une base normale $\{F_k\}$, constituée par des ensembles bornés; il en résulte que cette base sera régulière. On a alors $F_\infty = F$. Or il est aisé de voir que, dans ce cas, pour qu'une fonction $\mathbf{u}(\lambda)$ à valeurs dans E soit holomorphe et à décroissance presque rapide dans $\mathbf{C} - F_k$, pour tout k , il faut et il suffit que elle soit holomorphe dans $\mathbf{C} - F$ et tende vers zéro lorsque $\lambda \rightarrow \infty$. D'autre part, il est évident que, quel que soit k , toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ est maintenant bornée sur F_k . Donc on aura tout simplement dans ce cas :

$$U(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \mathbf{u}(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et tout k . Nous avons ainsi retrouvé, comme cas particulier du théorème 1, un des résultats fondamentaux établis dans [8] et généralisé dans [9].

II. *Cas où les ensembles $\mathbf{C} - F_k$ sont tous bornés.* — Dans le théorème 1 nous avons introduit l'hypothèse que tous les ensembles $\mathbf{C} - F_k$ sont non bornés. Observons maintenant que le cas où l'un au moins des ensembles $\mathbf{C} - F_k$ est non borné se ramène immédiatement au premier, car cette condition se vérifie alors pour toutes les valeurs de k supérieures (vu que $F_k \subset F_{k+1}$ pour tout k) et on obtient encore une base de \mathcal{F} , en éliminant les F_k correspondants aux valeurs de k inférieures. Il reste donc le cas où $\mathbf{C} - F_k$ est borné pour tout k ; alors la thèse du théorème n'est plus valable.

En effet, nous avons vu que, dans ce cas, il suffit qu'une fonction $\mathbf{u}(\lambda)$ soit bornée sur un ensemble M , pour qu'elle soit à décroissance presque rapide sur M , avec des coefficients asymptotiques tout à fait arbitraires. On voit alors que le théorème 1 doit être remplacé par le théorème suivant :

THÉORÈME 1'. — Supposons que le filtre \mathcal{F} admet une base $\{F_k\}$ normale et distanciée, et que $\mathbf{C} - F_k$ est borné pour tout k . Alors il existe une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continue U de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E et le systèmes $(\mathbf{u}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots)$, constitués par une fonction $\mathbf{u}(\lambda)$ à valeurs dans E , holomorphe dans $\mathbf{C} - F_\infty$, et par une suite (\mathbf{a}_n) quelconque de vecteurs de E . Cette correspondance est donnée par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\lambda) = U[(\widehat{z} - \lambda)^{-1}], \quad \text{sur } \mathbf{C} - F_\infty; \quad \mathbf{a}_n = U[-(\widehat{z} - \lambda_0)^{n-1}] \\ U(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{u}_{k+1}(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}), \end{array} \right.$$

λ_0 étant un point arbitraire de $\mathbf{C} - F_1$, k un entier tel que $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et $\mathbf{u}_n(\lambda) = \mathbf{u}(\lambda) - \sum_1^n \mathbf{a}_s(\lambda - \lambda_0)^{-s}$, pour $n = 1, 2, \dots$.

Observons encore que toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ peut s'écrire sous la forme $\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_0^k c_\nu z^\nu$, où les c_ν sont des constantes complexes et $\varphi_0(z) \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow \infty$. Il en découle que la dernière formule peut encore se présenter sous la forme

$$(8.5) \quad U(\varphi) = \sum_1^k c_{\nu-s} \mathbf{a}_\nu + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{u}(\lambda) d\lambda,$$

pourvu que $\mathbf{a}_n = U(-\widehat{z^{n-1}})$, $n = 1, 2, \dots$.

III. L'espace $\mathcal{A}^*(\mathcal{F})$; cas où il est dense dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. — Nous désignons par $\mathcal{A}^*(F_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(F_k)$ constitué par les éléments φ de cet espace tels que la fonction $z\varphi(z)$ soit bornée sur F_k , et nous poserons $\mathcal{A}^*(\mathcal{F}) = \bigcup_1^\infty \mathcal{A}^*(F_k)$.

PROPOSITION 11. — Pour que l'espace $\mathcal{A}^*(\mathcal{F})$ soit dense dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, il faut et il suffit qu'il existe au moins un k tel que $\mathbf{C} - F_k$ soit non borné.

En effet, supposons cette condition vérifiée. On peut alors supposer, sans perte de généralité, que tous les $\mathbf{C} - F_k$ sont non bornés. D'autre part, on a évidemment $\mathbf{j}(\lambda) \in \mathcal{A}^*(F_{k+1})$ pour tout k et tout $\lambda \in \mathbf{C} - F_k$, et la prop. 10 montre que la fonction $\mathbf{j}(\lambda)$, à valeurs dans $\mathcal{A}(F_{k+1})$, est à décroissance lente sur $\mathbf{C} - F_k$, par rapport à \mathcal{T}_{k+1} . Donc les restes \mathbf{j}_k se déduisent de \mathbf{j} au moyen des formules (8.1). Dans ces conditions, la formule (8.2) indique que toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ s'exprime comme limite d'une suite de vecteurs dans l'espace normé $\mathcal{A}^*(F)$ et que, par conséquent, $\mathcal{A}^*(\mathcal{F})$ est dense dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

Supposons maintenant que tout ensemble $\mathbf{C} - F_k$ est borné et soit U^* une fonctionnelle linéaire continue dans l'espace $\mathcal{A}^*(F)$, muni de la topologie induite par \mathcal{T}_∞ (dans ce cas $E = \mathbf{C}$). Alors on a

$$U^*(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi_0(\lambda) \mathbf{u}(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour } \varphi_0 \in \mathcal{A}^*(F_k),$$

en posant $\mathbf{u}(\lambda) = U^*[(\widehat{z} - \lambda)^{-1}]$ sur $\mathbf{C} - F_\infty$. Mais le théorème 1', ainsi que la formule (8.5), montrent qu'il existe une infinité de fonctionnelles linéaires U continues sur $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, qui prolongent U^* , et cela veut dire, évidemment, que $\mathcal{A}^*(\mathcal{F})$ n'est pas dense dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.

c. q. f. d.

Donc, dans le cas où l'un ^{au moins} des $\mathbf{C} - F_k$ est non borné, et seulement dans ce cas, on peut simplifier l'expression des applications linéaires continues U de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E , en écrivant

$$(8.6) \quad U(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{u}(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(F_k),$$

si l'on pose, *par définition*:

$$\int_{\Gamma_k} \mathbf{u}(\lambda) \varphi(\lambda) d\lambda = \lim_{\zeta \rightarrow \varphi} \int_{\Gamma_k} \mathbf{u}(\lambda) \zeta(\lambda) d\lambda, \quad \text{avec } \zeta \in \mathcal{A}^*(\mathcal{F}),$$

où la deuxième intégrale existe au sens la définition du n° 6.

La formule (8.6) met l'accent sur le fait que, dans ce cas, l'application U est complètement déterminée par son indicatrice \mathbf{u} , ce qui n'est plus vrai dans le cas où les $\mathbf{C} - F_k$ sont tous bornés.

IV. Observons enfin que l'expression des applications linéaires continues U de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans E peut encore s'écrire, dans le cas général:

$$(8.7) \quad U(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \varphi(\lambda) \mathbf{u}_p(\lambda) d\lambda, \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}),$$

en supposant les entiers p et k choisis de façon que $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et que $\varphi(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)^{p-1}$ soit bornée sur F_k . Pour s'en convaincre, il suffit de rappeler la formule (7.3').

9. Homomorphismes continus de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans \mathbf{A} . - Supposons maintenant que l'algèbre \mathbf{A} considérée au n° 2 est *semi-complète*. Alors, les considérations des n°s. 7 et 8 conduisent au résultat suivant⁽⁸⁾:

THÉOREME 2. - *Si \mathcal{F} est un filtre de sous-ensembles de \mathbf{C} admettant une base régulière $\{F_k\}$, il existe une correspondance biunivoque $\mathcal{K} \leftrightarrow \mathbf{a}$, entre les homomorphismes continus \mathcal{K} de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans \mathbf{A} , tels que $\mathcal{K}(1) = 1$, et les éléments \mathbf{a} de \mathbf{A} dont le filtre spectral est plus fin que \mathcal{F} , c'est-à-dire tel que F_k soit un ensemble spectral de \mathbf{a} pour tout k . Cette correspondance est*

⁽⁸⁾ On peut toutefois éviter l'analyse du n° 8, en démontrant directement le th. 2 sans s'appuyer sur le th. 1, comme on le verra.

définie par les deux formules réciproques

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} = \mathcal{H}(\widehat{z}) \\ \mathcal{H}(\varphi) = \frac{(\mathbf{a} - \lambda_0)^p}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^p (\mathbf{a} - \lambda)} d\lambda, \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}), \end{array} \right.$$

λ_0 étant un point quelconque de $\mathbf{C} - F_1$ et k, p les entiers tels que $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et que $\varphi(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)^{p-1}$ soit bornée sur F_k ; on suppose encore Γ_k , frontière de F_k , orientée de façon à laisser F_k à droite.

Démonstration:

a) Soit \mathcal{H} un homomorphisme continu de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans \mathbf{A} , faisant correspondre à la fonction $\varphi(z) \equiv 1$ l'élément unité de \mathbf{A} , et posons $\mathcal{H}(\widehat{z}) = \mathbf{a}$. Alors, puisque l'on a, pour tout $\lambda \in \mathbf{C} - F_\infty$,

$$(\widehat{z} - \lambda) (\widehat{z} - \lambda)^{-1} = (\widehat{z} - \lambda)^{-1} (\widehat{z} - \lambda) = 1,$$

on aura aussi, pour tout $\lambda \in \mathbf{C} - F_\infty$,

$$(\mathbf{a} - \lambda) \mathcal{H}[(\widehat{z} - \lambda)^{-1}] = \mathcal{H}[(\widehat{z} - \lambda)^{-1}] (\mathbf{a} - \lambda) = 1,$$

attendu que \mathcal{H} est un homomorphisme d'algèbres et que, pour cette raison, on a $\mathcal{H}(\widehat{z} - \lambda) = \mathcal{H}(\widehat{z}) - \mathcal{H}(\lambda.1) = \mathbf{a} - \lambda \mathcal{H}(1) = \mathbf{a} - \lambda$. En outre, quel que soit k , l'ensemble des éléments $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, lorsque λ parcourt $\mathbf{C} - F_k$, est borné dans cet espace (prop. 6); donc, son image par l'application linéaire continue \mathcal{H} est bornée dans \mathbf{A} ; cela veut dire que F_k est un ensemble spectral de \mathbf{a} , quel que soit k .

Soit maintenant φ un élément quelconque de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Alors il existe deux entiers k et p tels que $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et que $\varphi(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)^{p-1}$ soit bornée sur F_k ; donc [cf. (7.3')]:

$$\varphi = \frac{(\widehat{z} - \lambda_0)^p}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^p (\widehat{z} - \lambda)} d\lambda, \text{ au sens de } \mathcal{T}_\infty,$$

λ_0 étant un point quelconque de $\mathbf{C} - F_1$. On en déduit aussitôt, compte tenu que \mathcal{H} est un homomorphisme continu et que l'intégrale s'exprime comme limite de sommes de scalaires par les vecteurs $(z - \lambda)^{-1}$, lorsque $\lambda \in \Gamma_k$:

$$\mathcal{H}(\varphi) = \frac{(\mathbf{a} - \lambda_0)^p}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^p (\mathbf{a} - \lambda)} d\lambda$$

b) Soit réciproquement, α un élément de A dont le filtre spectral soit plus fin que \mathcal{F} , et posons :

$$(9.1) \quad \mathcal{H}(\varphi) = \frac{(\alpha - \lambda_0)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}(\lambda - \lambda_0)},$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$, $k = 1, 2, \dots$, λ_0 étant un point fixé arbitrairement dans $C - F_1$.

En raisonnant comme dans la démonstration du théorème 1, b), on voit que cette formule définit une application linéaire continue \mathcal{H} de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans A et que ⁽⁹⁾

$$\mathcal{H}[(z - \lambda)^{-1}] = (\alpha - \lambda)^{-1} \quad \text{pour tout } \lambda \in C - F_\infty.$$

D'autre part, de (8.1) on déduit

$$(9.2) \quad \mathcal{H}[(z - \lambda_0)^n \varphi] = (\alpha - \lambda_0)^n \mathcal{H}(\varphi),$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ et tout $n = 1, 2, \dots$. On aura donc

$$\begin{aligned} \mathcal{H}[(z - \lambda_0)^n (z - \lambda_0)^{-1}] &= (\alpha - \lambda_0)^n \mathcal{H}[(z - \lambda_0)^{-1}] \\ &= (\alpha - \lambda_0)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Pour $n = 1$, on trouve $\mathcal{H}(1) = 1$. Pour $n = 2$, on a $\mathcal{H}(z - \lambda_0) = \alpha - \lambda_0$, d'où $H(z) = \alpha$, vu que $\mathcal{H}(z - \lambda_0) = \mathcal{H}(z) - \lambda_0 \mathcal{H}(1) = \mathcal{H}(z) - \lambda_0$.

Il reste donc à prouver que $\mathcal{H}(\varphi_1 \varphi_2) = \mathcal{H}(\varphi_1) \mathcal{H}(\varphi_2)$.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Alors il existe au moins un entier k tel que $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}(F_k)$; donc si l'on pose

$$(9.3) \quad \psi_1(\lambda) = \frac{\varphi_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}}, \quad \psi_2(\lambda) = \frac{\varphi_2(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}},$$

les fonctions $(\lambda - \lambda_0)\psi_1(\lambda)$, $(\lambda - \lambda_0)\psi_2(\lambda)$ de λ seront bornées et continues sur F_k , et on aura, évidemment :

$$\mathcal{H}(\psi_1) \mathcal{H}(\psi_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\psi_1(\lambda_1) d\lambda_1}{\alpha - \lambda_1} \cdot \int_{\Gamma_k} \frac{\psi_2(\lambda_2) d\lambda_2}{\alpha - \lambda_2}$$

⁽⁹⁾ On peut démontrer directement ces parties du théorème, en évitant les considérations du n° 8, comme nous l'avons déjà observé.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{k+1}} \left[\frac{\psi_1(\lambda_1)}{\mathbf{a} - \lambda_1} \int_{\Gamma_k} \frac{\psi_2(\lambda_2) d\lambda_2}{\mathbf{a} - \lambda_2} \right] d\lambda_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{k+1}} d\lambda_1 \int_{\Gamma_k} \frac{\psi_1(\lambda_1) \psi_2(\lambda_2) d\lambda_2}{(\mathbf{a} - \lambda_1)(\mathbf{a} - \lambda_2)},
\end{aligned}$$

puisque ces intégrales sont des limites de sommes dans \mathbf{A} et que le produit dans \mathbf{A} est séparément continu. Or on a, quels que soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C} - F_\infty$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\frac{1}{(\mathbf{a} - \lambda_1)(\mathbf{a} - \lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{\mathbf{a} - \lambda_1} - \frac{1}{\mathbf{a} - \lambda_2} \right)$$

Il s'ensuit que l'on peut écrire $\mathcal{H}(\psi_1)\mathcal{H}(\psi_2)$ sous forme d'une différence $\mathbf{c} - \mathbf{d}$, en posant

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\psi_1(\lambda_1)}{\mathbf{a} - \lambda_1} d\lambda_1 \int_{\Gamma_k} \frac{\psi_2(\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_2 \\
\mathbf{d} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{k+1}} d\lambda_1 \int_{\Gamma_k} \frac{\psi_1(\lambda_1) \psi_2(\lambda_2) d\lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{a} - \lambda_2)}
\end{aligned}$$

Mais alors on a, en vertu de la formule de CAUCHY:

$$\mathbf{c} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\psi_1(\lambda_1) \psi_2(\lambda_1)}{\mathbf{a} - \lambda_1} d\lambda_1 = \mathcal{H}(\psi_1 \psi_2)$$

D'autre part, on appliquant la proposition 8 et le théorème de CAUCHY (pour des fonctions vectorielles), on trouve:

$$\mathbf{d} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_k} \frac{\psi_2(\lambda_2)}{\mathbf{a} - \lambda_2} d\lambda_2 \int_{\Gamma_{k+1}} \frac{\psi_1(\lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} d\lambda_1 = 0.$$

En effet, puisque $F_{k+1} \subset F_k$, tout point λ_2 de Γ_k est extérieur à F_{k+1} et, dans ces conditions, la fonction $(\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}$ de λ_1 est holomorphe sur F_{k+1} , ainsi que $\psi_1(\lambda_1)$. On a donc

$$\mathcal{H}(\psi_1)\mathcal{H}(\psi_2) = \mathcal{H}(\psi_1 \psi_2),$$

d'où l'on déduit, compte tenu de (9.3) et (9.2):

$$\mathcal{H}(\varphi_1\varphi_2) = \mathcal{H}(\varphi_1)\mathcal{H}(\varphi_2), \quad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème 2 ne donne pas en général tous les homomorphismes continus de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans \mathbf{A} , mais seulement ceux qui font correspondre à la fonction 1 l'élément unité de \mathbf{A} . Cependant, on peut en déduire l'expression de tous les homomorphismes continus de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans \mathbf{A} .

Soit en effet \mathcal{H} un tel homomorphisme. Alors, puisque $1.1 = 1$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, on aura aussi

$$\mathcal{H}(1) \cdot \mathcal{H}(1) = \mathcal{H}(1);$$

donc, si l'on pose $\mathbf{h} = \mathcal{H}(1)$, \mathbf{h} sera un projecteur de \mathbf{A} c'est-à-dire $\mathbf{h}^2 = \mathbf{h}$, et, par suite, l'élément unité de la sous-algèbre fermée \mathbf{hA} de \mathbf{A} . Il s'ensuit:

COROLLAIRE. - Dans l'hypothèse du théorème 2, il existe une correspondance biunivoque entre les homomorphismes continus \mathcal{H} de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans \mathbf{A} et les couples (\mathbf{h}, \mathbf{a}) tels que \mathbf{h} est un projecteur de \mathbf{A} et \mathbf{a} un élément de \mathbf{A} , dont le filtre spectral, par rapport à l'algèbre \mathbf{hA} , est plus fin que \mathcal{F} . Ces deux éléments sont déterminés à partir de \mathcal{H} par les formules $\mathcal{H}(1) = \mathbf{h}$, $\mathcal{H}(\mathbf{z}) = \mathbf{a}$. Réciproquement, \mathcal{H} est donné à partir de \mathbf{h} et de \mathbf{a} par la deuxième formule du théorème 2, en considérant, au lieu de $(\mathbf{a} - \lambda)^{-1}$ (qui peut ne pas exister dans \mathbf{A}), l'inverse de $\mathbf{a} - \lambda$ dans l'algèbre \mathbf{hA} , pour tout $\lambda \in \mathbf{C} - F_\infty$.

En particulier, si \mathbf{A} est un domaine d'intégrité, le seul projecteur non nul dans \mathbf{A} est son élément unité 1. Donc, dans ce cas, on peut supprimer la condition $\mathcal{H}(1) = 1$ dans l'énoncé du th. 2.

REMARQUE. - Il est à souligner que, dans le th. 2, il n'est pas nécessaire de supposer que l'un au moins des ensembles $\mathbf{C} - F_k$ est non borné. Cette hypothèse est seulement nécessaire dans le th. 1.

10. Le calcul symbolique relatif à l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. - Sous les hypothèses et les conventions du théorème 2, nous poserons *par définition*:

$$(10.1) \quad \varphi(\mathbf{a}) = \mathcal{H}(\varphi) = \frac{(\mathbf{a} - \lambda_0)^p}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^p (\mathbf{a} - \lambda)} d\lambda,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$.

Cette formule est la base du calcul symbolique relatif à l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$, applicable à tout élément \mathbf{a} de l'algèbre \mathbf{A} , dont le filtre spectral soit plus fin que \mathcal{F} . La proposition « \mathcal{K} est un homomorphisme continu de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans \mathbf{A} tel que $\mathcal{K}(1) = 1$ et $\mathcal{K}(z) = \mathbf{a}$ » se traduit par les règles fondamentales du calcul symbolique :

- 1) Si $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi_1(\mathbf{a}) + \varphi_2(\mathbf{a})$
- 2) Si $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi_1(\mathbf{a}) \varphi_2(\mathbf{a})$
- 3) Si $\varphi = \lim \varphi_n$, $\varphi(\mathbf{a}) = \lim \varphi_n(\mathbf{a})$
- 4) Si $\varphi(z) \equiv z$, $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$
- 5) Si $\varphi(z) \equiv c$, avec $c \in \mathbf{C}$, alors $\varphi(\mathbf{a}) = c$.

Ce sont ces règles qui justifient la définition (10.1) et qui permettent d'appliquer le calcul symbolique à la résolution d'équations fonctionnelles.

Cette application du calcul symbolique se fait en général par l'une des règles suivantes, que l'on déduit des règles fondamentales 1) - 5):

RÈGLE D'INVERSION. Si l'on a $\varphi(z) \cdot \psi(z) \equiv 1$, c'est-à-dire $\psi(z) \equiv [\varphi(z)]^{-1}$, avec $\varphi, \psi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, on aura aussi $\varphi(\mathbf{a}) \cdot \psi(\mathbf{a}) = 1$, c'est-à-dire $\psi(\mathbf{a}) = [\varphi(\mathbf{a})]^{-1}$.

RÈGLE DE DÉRIVATION. - Soit $\varphi(z, t)$ une fonction de la variable complexe z et de la variable réelle ou complexe t , telle que, si l'on pose $\Phi(t) \equiv \widehat{\varphi(z, t)}$, on définit une fonction Φ à valeurs dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$. Alors, si Φ admet dérivée en tout point t_0 de son domaine

$$\Phi'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\widehat{z}, t_0) \quad (\text{au sens de } \mathcal{T}_\infty)$$

et que l'on pose $\psi(z, t) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t}(z, t)$, on aura aussi :

$$\frac{d}{dt} [\varphi(\mathbf{a}, t)] = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{a}, t) = \psi(\mathbf{a}, t)$$

La règle d'inversion est une conséquence immédiate de 2) et de 5): elle ne fait donc pas intervenir les topologies $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ et de \mathbf{A} . Par contre, la règle de dérivation est une règle essentiellement topologique, puisqu'elle exige la condition 3), en même temps que 1), 2) et 5).

Toutefois, en général, le calcul symbolique à plusieurs variables et le calcul symbolique relatif à des fonctions vectorielles permettent d'éviter la règle de dérivation, comme on le verra par la suite.

REMARQUE IMPORTANTE. - Dans certains cas, on ne peut pas, sans risque de confusion, identifier l'élément unité, \mathbf{e} , de \mathbf{A} , au nombre 1. Il faut alors remplacer $\mathbf{a} - \lambda_0$, et $\mathbf{a} - \lambda$, dans la formule (10.1), respectivement par $\mathbf{a} - \lambda_0 \mathbf{e}$ et $\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e}$, et remplacer $\varphi(\mathbf{a}) = c$, dans la condition 5), par $\varphi(\mathbf{a}) = c \mathbf{e}$. En outre, on doit utiliser plutôt la notation $(\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e})^{-1}$, pour l'inverse de $\mathbf{a} - \lambda \mathbf{e}$, bien que, dans certains cas, cette notation, elle aussi, puisse donner lieu à équivoque (cf. corollaire du th. 2).

11. **Le calcul symbolique à n variables (forme cartésienne).** - Soit encore \mathbf{A} une algèbre vérifiant les hypothèses indiquées au n°. 1, et considérons d'autre part n filtres $\mathcal{F}^1, \dots, \mathcal{F}^n$ de sous ensembles de \mathbf{C} , admettant n bases régulières, respectivement $\{F_k^1\}, \dots, \{F_k^n\}$. Pour tout $k = 1, 2, \dots$, nous poserons

$$F_k = F_k^1 \times F_k^2 \times \dots \times F_k^n$$

On voit alors que ces ensembles F_k forment, eux aussi, une base de filtre; nous désignerons par \mathcal{F} le filtre de base $\{F_k\}$.

Pour tout k , nous désignerons maintenant par $\mathcal{A}(F_k)$ l'espace des fonctions complexes

$$\varphi(z) = \varphi(z_1, \dots, z_n)$$

définies et continues sur F_k , holomorphes dans l'intérieur de F_k et telles qu'il existe pour chaque fonction φ une constante M finie vérifiant

$$|\varphi(z)| \leq M |z_1|^k \dots |z_n|^k \quad \text{sur } F_k$$

Nous considérons cet espace fonctionnel muni des notions usuelles de somme et de produit par scalaires, qui le rendent un espace vectoriel complexe. D'autre part, en choisissant un point $c = (c_1, \dots, c_n)$ de \mathbf{C}^n tel que $c_\nu \in \mathbf{C} - F_1^\nu$, $\nu = 1, \dots, n$, nous considérons $\mathcal{A}(F_k)$ muni de la topologie \mathcal{T}_k définie par la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \left| \frac{\varphi(z)}{(z_1 - c_1)^k \dots (z_n - c_n)^k} \right|$$

Cela posé, on généralise aisément à cet espace $\mathcal{A}(F_k)$ les propositions 3 et 4. Si l'on identifie chaque fonction $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ à la fonction φ^* qui est la restriction de φ à F_{k+1} , on a encore $\mathcal{A}(F_k) \subset \mathcal{A}(F_{k+1})$ et on voit que la topologie induite par \mathcal{T}_{k+1} dans $\mathcal{A}(F_k)$ est moins fine que \mathcal{T}_k . On pose alors, par définition:

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}(F_k)$$

et, comme dans le cas où $n = 1$, on munit $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ de la structure de limite inductive localement convexe des espaces $\mathcal{A}(F_k)$. La prop. 5 se généralise aussi, d'une façon immédiate, au cas de n variables; donc $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est, dans ce cas encore, un espace du type (S_2) , ce qui implique les conséquences a), b) et c) indiquées au n°. 4, si l'on interprète $(z - c)^k$ comme le produit $(z_1 - c)^k \dots (z_n - c)^k$ et $|z^k|$ comme le produit $|z_1|^k \dots |z_n|^k$.

Dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ on définit encore dans ce cas, de façon évidente, une notion de produit $\varphi\psi$ de deux fonctions φ et ψ . On voit alors aisément que $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ est une algèbre commutative complexe, munie d'élément unité [la fonction $\varphi(z_1, \dots, z_n) \equiv 1$, que l'on désignera simplement par 1] et d'une structure d'espace localement convexe, par rapport à laquelle le produit $\varphi\psi$ est continu.

La prop. 6 (n°. 5) donne maintenant lieu à la proposition suivante :

PROPOSITION 12. - *Quel que soit $s = 1, 2, \dots, n$, si le filtre \mathcal{F}^s est distanciable, tout ensemble de \mathcal{F}^s est spectral pour l'élément $\widehat{z_s}$ de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$.*

En employant ce que l'on a établi au n°. 6, toute l'analyse développée au n°. 7 se reproduit, sans modifications essentielles, pour le cas de n variables. On est ainsi conduit à la généralisation suivante du théorème 2 :

THÉORÈME 3. - *Supposons que les bases $\{F_k^s\}$, pour $s = 1, \dots, n$ sont régulières, et que l'algèbre \mathbf{A} , vérifiant les hypothèses formulées au n°. 2, est en outre semi-complète. Alors, il existe une correspondance biunivoque entre les applications linéaires continues \mathcal{H} de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans \mathbf{A} , telles que $\mathcal{H}(1) = 1$, et les systèmes de n éléments $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ de \mathbf{A} , qui sont permutables et tels que le filtre spectral de \mathbf{a}_s est plus fin que \mathcal{F}^s , pour $s = 1, \dots, n$. Dans le cas où $0 \in \mathbf{C} - F_k^s$, pour $s = 1, \dots, n$, cette correspondance peut être définie par les formules réciproques*

$$\mathbf{a}_1 = \mathcal{H}(\widehat{z_1}), \mathbf{a}_2 = \mathcal{H}(\widehat{z_2}), \dots, \mathbf{a}_n = \mathcal{H}(\widehat{z_n})$$

$$\mathcal{H}(\varphi) = \frac{\mathbf{a}_1^{p_1} \dots \mathbf{a}_n^{p_n}}{(2\pi i)^n} \int \dots \int_{\Gamma_k^1 \dots \Gamma_k^n} \frac{\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n}{\lambda_1^{p_1} \dots \lambda_n^{p_n} (\mathbf{a}_1 - \lambda_1) \dots (\mathbf{a}_n - \lambda_n)},$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, où les entiers k, p_1, \dots, p_n sont choisis de façon que la fonction $\varphi(z)/(z_1^{p_1-1} \dots z_n^{p_n-1})$ de z_1, \dots, z_n soit bornée sur F_k et la frontière, Γ_k^s , de F_k^s est supposée orientée du façon à laisser F_k^s à droite ($s = 1, \dots, n$). Dans le cas où l'on a n'a pas $0 \in \mathbf{C} - F_1^s$ pour tout s il suffit de remplacer $\mathbf{a}_s^{p_s}$ et $\lambda_s^{p_s}$, dans la dernière formule, respectivement par $(\mathbf{a}_s - \lambda_{s,0})^{p_s}$ et $(\lambda_s - \lambda_{s,0})^{p_s}$, où $\lambda_{s,0}$ est un point quelconque de $\mathbf{C} - F_1^s$ ($s = 1, 2, \dots, n$).

Observons qu'il est loisible (et quelques fois commode pour les applications) de remplacer dans cet énoncé F_k^1, \dots, F_k^n , par $F_{k_1}^1, \dots, F_{k_n}^n$, où les

entiers k_s seront choisis de façon que $\varphi(z)/(z_1^{p_1-1} \dots z_n^{p_n-1})$ soit bornée sur $F_{k_1}^1 \times \dots \times F_{k_n}^n$ (sans que ces entiers soient nécessairement égaux).

La démonstration de ce théorème ne présente pas de difficultés essentiellement nouvelles par rapport à celle du théorème 2 (cf. [8], p. 78-79).

Dans les conditions du théorème 3, il est naturel de poser, *par définition* :

$$\varphi(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \mathcal{H}(\varphi), \quad \text{pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}).$$

Alors, en posant $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, on aura les règles fondamentales du calcul symbolique, qui justifient cette définition :

- 1) Si $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi_1(\mathbf{a}) + \varphi_2(\mathbf{a})$
- 2) Si $\varphi = \varphi_1 \varphi_2$, $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi_1(\mathbf{a}) \varphi_2(\mathbf{a})$
- 3) Si $\varphi = \lim \varphi_n$, $\varphi(\mathbf{a}) = \lim \varphi_n(\mathbf{a})$
- 4) Si $\varphi(z) \equiv z_s$, $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}_s$, pour $s = 1, \dots, n$
- 5) Si $\varphi(z) \equiv c$, $\varphi(\mathbf{a}) = 1$, quel que soit $c \in \mathbf{C}$.

Cela étant, la *règle d'inversion* et la *règle de dérivation* (n°. 10) se généralisent aussitôt au cas de n variables.

Du théorème 3 on déduit un corollaire qui est la généralisation de celui du théorème 2.

Enfin, le théorème 1, ainsi que son complément, le théorème 1', peut aussi se généraliser, sous une forme semblable, au cas de n variables. À cet effet, il suffit d'employer la définition suivante de «fonction à décroissance presque rapide» :

Étant donnés n sous-ensembles M_1, \dots, M_n de \mathbf{C} , on dit qu'une fonction $\mathbf{f}(\lambda) = \mathbf{f}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, à valeurs dans E , est à décroissance presque rapide sur le produit $M = \prod_1^n M_s$, si, pour tout système d'entiers $k = (k_1, \dots, k_n)$ on peut représenter $\mathbf{f}(\lambda)$ sur M sous la forme

$$\mathbf{f}(\lambda) = \sum_{s=1}^n \sum_{p=1}^{k_s} (\lambda - \lambda_{0,s})^{-p} \mathbf{a}_{p,s}(\lambda) + \mathbf{f}_k(\lambda),$$

où $\lambda_{0,s}$ est un point quelconque de \mathbf{C} , $\mathbf{a}_{p,s}(\lambda)$ une fonction à valeurs dans E indépendante de λ_s ($s = 1, \dots, n$; $p = 1, \dots, k_s$) et $\mathbf{f}_k(\lambda)$ une fonction à valeurs dans E , telle que la fonction de λ

$$(\lambda_1 - \lambda_{0,1})^{1+k_1} \dots (\lambda_n - \lambda_{0,n})^{1+k_n} \mathbf{f}_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

soit bornée sur M .

Observons de passage que ce résultat intervient essentiellement dans l'étude des *ultra-distributions tempérées à plusieurs variables* (cf. [2]).

12. Types d'algèbres auxquelles s'applique le calcul symbolique établi. — Il y a un cas typique, assez général, d'algèbres A pour lesquelles le calcul symbolique établi se trouve naturellement indiqué. Ces algèbres peuvent se présenter fréquemment dans les applications (surtout dans plusieurs problèmes relatifs à des équations aux dérivées partielles), de la façon suivante:

On a d'abord un ou plusieurs opérateurs, A_1, \dots, A_n , chaque opérateur A_s étant une application linéaire (en général non continue et non biunivoque) d'un sous-espace E_s d'un espace localement convexe E sur cet espace E . Ces opérateurs sont en outre permutables entre eux, c'est-à-dire, on a:

$$A_r^{(-1)}(E_s) = A_s^{(-1)}(E_r)$$

et $A_r A_s u = A_s A_r u$, pour tout $u \in A_r^{(-1)}(E_s)$, quels que soient $r, s = 1, 2, \dots, n$.

Dans certains cas (ceux auxquels s'applique le calcul symbolique en question), il existe, pour chacun de ces opérateurs A_s , un nombre complexe $\lambda_{s,0}$, tel que $A_s - \lambda_{s,0}$ est inversible, c'est-à-dire, une application biunivoque de E_s sur E . Posons $K_s = A_s - \lambda_{s,0}$, pour tout s . Alors il est aisé de voir, en employant la *méthode générale d'extension algébrique* exposée dans [10], dans le cas simple considéré au n° 1:

Il est possible de construire un espace vectoriel \tilde{E} , tel que E soit un sous-espace vectoriel de \tilde{E} et que l'on puisse prolonger chacun des opérateurs K_r en une application linéaire biunivoque \tilde{K}_r de \tilde{E} dans \tilde{E} , de façon que:

$$1) \quad \tilde{K}_r \tilde{K}_s = \tilde{K}_s \tilde{K}_r, \text{ quels que soient } r, s = 1, 2, \dots, n;$$

$$2) \quad \text{tout élément } \tilde{u} \text{ de } \tilde{E} \text{ soit de la forme}$$

$$\tilde{u} = K_1^{p_1} \dots K_n^{p_n} u, \text{ avec } u \in E, \text{ et } p_1, \dots, p_n \text{ entiers.}$$

Les règles de calcul dans \tilde{E} sont tout à fait simples. En général, on peut identifier, sans danger de confusion, \tilde{K}_s avec K_s , pour tout s . Deux éléments de \tilde{E} ,

$$\tilde{u} = K_1^{p_1} \dots K_n^{p_n} u, \quad \tilde{v} = K_1^{q_1} \dots K_n^{q_n} v \quad (u, v \in E),$$

peuvent toujours s'exprimer sous la forme d'exposants communs. Par exemple, si l'on pose

$$u^* = (K_1^{q_1} \dots K_n^{q_n})^{-1} u, \quad v^* = (K_1^{p_1} \dots K_n^{p_n})^{-1} v,$$

on aura $u^*, v^* \in E$ et

$$u = K_1^{p_1+q_1} \dots K_n^{p_n+q_n} u^*, \quad v = K_1^{p_1+q_1} \dots K_n^{p_n+q_n} v^*$$

Posons, pour simplifier, $p = (p_1, \dots, p_n)$ et $K^p = K_1^{p_1} \dots K_n^{p_n}$, pour tout système d'entiers p_1, \dots, p_n . Alors, en vertu de la linéarité des opérateurs K_s prolongés à \tilde{E} , la somme et le produit par scalaires se calculent dans \tilde{E} suivant les formules

$$(12.1) \quad K^p u + K^p v = K^p(u + v), \quad \alpha(K^p u) = K^p(\alpha u)$$

D'autre part, les opérateurs K^m , avec $m = (m_1, \dots, m_n)$, seront définis dans \tilde{E} tout simplement d'après la formule

$$(12.2) \quad K^m(K^p u) = K^{m+p} u, \quad \text{où } m + p = (m_1 + p_1, \dots, m_n + p_n)$$

Enfin, le critère de l'égalité entre les éléments de \tilde{E} sera:

$$(12.3) \quad K^p u = K^q v, \text{ si et seulement si } K^{-q} u = K^{-p} v.$$

Puisque $A_s = K_s + \lambda_s \cdot 0$ pour tout s les opérateurs A_s peuvent alors eux-mêmes se prolonger en des applications linéaires A_s (non nécessairement biunivoques) de \tilde{E} sur \tilde{E} , et il est aisé de voir que

PROPOSITION 13. - *Le spectre élémentaire de \tilde{A}_s coïncide avec la spectre élémentaire de A_s , pour tout s .*

Posons encore $\mathbf{K} = K_1 \dots K_n$. D'après ce qui précède, \tilde{E} sera la réunion des espaces vectoriels $\mathbf{K}^m(E)$, constitués par les éléments \tilde{u} tels que $\tilde{u} = \mathbf{K}^m u$ avec $u \in E$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Donc

$$\tilde{E} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbf{K}^m(E)$$

Suivant notre méthode générale de prolongement topologique exposée dans [10], § 2, nous considérons E muni de la plus fine topologie localement convexe, τ_∞ , qui rende continues les applications \tilde{K}_s de \tilde{E} dans \tilde{E} et induise dans E une topologie moins fine que la topologie τ donnée sur E .

Dans les cas courants, E est un espace normé et K_s^{-1} , pour chaque s , une application de E sur E_s , continue au sens de τ . Alors \tilde{E} sera la limite inductive localement convexe des espaces normés $\mathbf{K}^m(E)$, images de E par les puissances entières de \mathbf{K} . Dans nombre de cas concrets, l'application identique de $\mathbf{K}^m(E)$ dans $\mathbf{K}^{m+1}(E)$ sera complètement continue pour tout m , i.e. les ensembles bornés dans $\mathbf{K}^m(E)$ sont relativement compacts dans $\mathbf{K}^{m+1}(E)$;

alors \tilde{E} sera un espace du type (S_2) , ce qui simplifie beaucoup les questions, puisque l'on a dans ce cas les propriétés:

I) \tilde{E} est séparé, complet et réflexif.

II) Un sous-ensemble U de \tilde{E} est borné (au sens de τ_∞), si et seulement s'il existe un entier p et un sous-ensemble B de E borné au sens de τ , tel que tout élément \tilde{u} de U est de la forme $\tilde{u} = K^p u$, avec $u \in B$.

III) Une suite (\tilde{u}_j) d'éléments de \tilde{E} converge vers élément \tilde{v} de \tilde{E} , au sens de τ_∞ , si et seulement s'il existe un entier p tel que \tilde{u}_j et \tilde{v} soient de la forme $\tilde{u}_j = K^p u_j$, $\tilde{v} = K^p v$, avec $v = \lim u_j$ dans E au sens de τ .

Cela posé, considérons l'algèbre $A = \mathcal{L}_b(\tilde{E})$ des applications linéaires continues de \tilde{E} dans \tilde{E} , munies de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de \tilde{E} . On voit aussitôt que le produit dans cette algèbre est séparément continu; en outre, si \tilde{E} est séparé et complet (resp. semi-complet), il en sera de même de $\mathcal{L}_b(\tilde{E})$: l'algèbre $A = \mathcal{L}_b(\tilde{E})$ vérifie alors toutes les conditions exigées aux nos 2, 9 et 11.

Soit maintenant \mathcal{F}^s , pour tout s , un filtre de sous-ensembles de C admettant une base régulière $\{F_k^s\}$ et tel que le filtre spectral de A_s soit plus fin que \mathcal{F}^s . Désignons par \mathcal{F} le filtre engendré par les ensembles $F_k = F_k^1 \times \dots \times F_k^n$, et supposons d'abord que $0 \in C - F_1^s$ pour $s = 1, \dots, n$.

Dans ce cas on peut prendre, évidemment, $K_s = A_s$ pour tout s , et appliquer les résultats du n°. 11 avec $A = \mathcal{L}_b(E)$, $\alpha_s = A_s$ pour $s = 1, \dots, n$. On aura alors, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$:

$$\varphi(A_1, \dots, A_n) = \frac{A_1^{p_1} \dots A_n^{p_n}}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_k^1} \dots \int_{\Gamma_k^n} \frac{\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n}{\lambda_1^{p_1} \dots \lambda_n^{p_n} (A_1 - \lambda_1) \dots (A_n - \lambda_n)}$$

les entiers k, p_1, \dots, p_n étant choisis comme l'indique le théorème 3.

Si l'on a $0 \in C - \mathcal{F}_1^s$ pour tout s , il suffit de prendre arbitrairement $\lambda_{s,0} \in C - F_1^s$ pour chaque s , et de remplacer, dans la formule antérieure, A_s par $A_s - \lambda_{s,0}$ et $\lambda_s^{p_s}$ par $(\lambda_s - \lambda_{s,0})^{p_s}$, $s = 1, 2, \dots, n$.

REMARQUE. - Posons $\varphi(A) = \varphi(A_1, \dots, A_n)$, pour abréger. Il est aisé de reconnaître que:

Si l'espace E est normé (ou plus généralement, tonnellé), l'application $(\varphi, \tilde{u}) \rightarrow \varphi(A)\tilde{u}$ de $\mathcal{A}(F) \times \tilde{E}$ dans \tilde{E} est hypocontinue relativement aux parties bornées de $\mathcal{A}(F)$ et de \tilde{E} . En particulier, si \tilde{E} est un espace du type (S_2) , il existe, pour tout k et tout p , un entier m tel que la restriction de cette application à $\mathcal{A}(F_k) \times K^p(E)$ soit une application de ce produit (normé) dans l'espace normé $K^m(E)$.

EXEMPLES - I. Soit E l'espace des fonctions numériques complexes $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ définies et continues dans \mathbf{R}^n et nulles en dehors de l'ensemble des points $x > 0$ (c'est-à-dire, des points à coordonnées toutes positives). Alors, si l'on pose, pour tout s :

$$D_s = \frac{d}{dx_s} \text{ (dérivation par rapport à } x_s),$$

on voit aussitôt que D_s définit une application linéaire biunivoque d'un sous-espace E_s de E sur E , et que ces applications sont *permutables*. On peut donc construire l'extension \tilde{E} de E , avec $A_s = K_s = D_s$, pour $s = 1, 2, \dots, n$. Dans ce cas, \tilde{E} est l'espace des distributions sur \mathbf{R}^n d'ordre fini et nulles en dehors de l'ensemble $x > 0$. Si l'on prend dans E pour topologie τ celle de la convergence uniforme sur les bornés de \mathbf{R}^n , l'espace \tilde{E} , muni de la topologie τ_∞ de la limite inductive des espaces $D^m(E)$ n'est même pas semi-complet. Il est alors plus commode de munir \tilde{E} d'une topologie τ_π , moins fine, de limite projective d'espaces (S_2) , suivant une technique que nous avons utilisée dans [10], [13] et [17], dans des cas analogues; dans ces conditions, \tilde{E} peut être complété, en y introduisant les distributions d'ordre infini, nulles en dehors de $x > 0$.

Cela posé, on trouve, pour toute distribution $\tilde{f} \in \tilde{E}$, en supposant $\tilde{f} = D^m f$, avec $f \in E$:

$$(D_s - \lambda_s)^{-1} \tilde{f} = D_x^m \int_0^{x_s} f(x_1, \dots, x_s - \xi_s, \dots, x_n) e^{\lambda_s \xi_s} d\xi_s,$$

quels que soient $\lambda_s \in \mathbf{C}$, $s = 1, \dots, n$. D'ailleurs, on démontre aisément (cf. [13], p. 123) que la fonction $(D_s - \lambda_s)^{-1}$ de λ_s à valeurs dans $\mathcal{L}_b(\tilde{E})$ est bornée sur tout demi-plan droit F_k^s défini par $\operatorname{Re}(\lambda_s) \geq k$, pour $k = 1, 2, \dots, n$; donc les F_k^s sont des ensembles spectraux de D_s , et on peut même démontrer que le filtre spectral de D_s est le filtre de base $\{F_k^s\}$. D'ailleurs ce résultat subsiste, si l'on remplace E par son complété.

Donc, si l'on désigne par \mathcal{F} , dans ces conditions, le filtre engendré par les produits $F_k = F_k^1 \times \dots \times F_k^n$, on peut définir les fonctions $\varphi(D_1, \dots, D_n)$, pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. D'ailleurs, en raisonnant comme dans [13], on trouve

$$\varphi(D_1, \dots, D_n) f = \Phi * \tilde{f},$$

où $\tilde{\Phi}$ est l'image inverse de LAPLACE multiple de φ (cf. [15]):

$$\tilde{\Phi} = \mathcal{L}^{-1} \varphi = \frac{D_x^{k+2}}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_k^1} \dots \int_{\Gamma_k^n} \frac{e^{\lambda \cdot x \varphi(\lambda)}}{(\lambda_1 \dots \lambda_n)^{k+2}} d\lambda,$$

en supposant $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_k)$. Alors Φ aura la forme $\tilde{\Phi} = D^{k+2}\Phi$, avec $\Phi \in E$, et si $\tilde{f} = D^n f$, avec $f \in E$, on aura

$$\tilde{\Phi} * f = D^{m+k+2}(\Phi * F) = D_x^{m+k+2} \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} \Phi(x-y) f(y) dy.$$

On voit ainsi que l'image de toute distribution d'ordre fini \tilde{f} , par l'opérateur $\varphi(D_1, \dots, D_n)$, est encore une distribution d'ordre fini: donc l'intervention des distributions d'ordre infini dans cette étude est tout à fait virtuelle.

Observons encore que l'on arrive à des résultats analogues, en considérant, au lieu de D_s , pour tout s , plus généralement, un opérateur différentiel du s -ième ordre, D_s , à coefficients variables, dépendant seulement de x_s et vérifiant les conditions indiquées dans [17], pour le cas d'une seule variable.

II. Soit maintenant E l'espace L^2 des fonctions complexes $f(x)$ à carré sommable sur \mathbf{R} . Alors l'opérateur D de dérivation définit une application linéaire d'un sous-espace de E sur E . Pour résoudre l'équation en u

$$(D - \lambda) u = f, \text{ avec } f, u \in E,$$

on peut employer la transformation bilatérale de LAPLACE. On trouve alors que $D - \lambda$ est inversible, si et seulement si $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$, et que l'on a, pour toute $f \in E$ (ce que l'on peut vérifier directement):

$$(D - \lambda)^{-1} f = \begin{cases} \int_{-\infty}^x e^{\lambda(x-y)} f(y) dy, & \text{si } \operatorname{Re}(\lambda) < 0 \\ \int_x^{+\infty} e^{\lambda(x-y)} f(y) dy, & \text{si } \operatorname{Re}(\lambda) > 0 \end{cases}$$

Donc, si l'on pose par exemple, $K = D + 1$, K sera une application biunivoque d'un sous-espace de E sur E (dont l'inverse est continue pour la topologie de l'espace de HILBERT $E = L^2$). On peut alors reconnaître que l'extension $E = \bigcup_1^\infty K^m(E)$ de l'espace E n'est que l'espace des distributions qui s'expriment comme sommes finies de dérivées de fonctions $f \in E$, espace que SCHWARTZ désigne par \mathcal{D}_{L^2} . Comme limite inductive des espaces normés $K^m(E)$, \tilde{E} n'est pas dans ce cas, un espace (S_2) , ce qui rend plus difficile son étude topologique; mais on réussit à démontrer qu'il est séparé, complet et même réflexif (cf. [7], p. 55-58).

D'autre part, on voit aussitôt que la fonction $(D - \lambda)^{-1}$ de λ , à valeurs dans $\mathcal{L}_b(E)$, est bornée sur les complémentaires de toute bande verticale $|Re(\lambda)| \leq 1/k$ ($k = 1, 2, \dots$), bande que nous désignerons par F_k . Donc, si \mathcal{F} est le filtre de base $\{F_k\}$, on peut définir les fonctions symboliques $\varphi(D)$, pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$; d'ailleurs on trouve encore

$$\varphi(D) \tilde{f} = \tilde{\Phi} * \tilde{f}, \text{ pour toute } \tilde{f} \in \tilde{E},$$

où $\tilde{\Phi}$ est l'image inverse de LAPLACE (bilatérale) de φ . Si $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$, on aura $\Phi = K^{k+2}\tilde{\Phi}$, Φ étant une fonction à décroissance rapide sur \mathbf{R} , et si, en outre, $f = K^p \tilde{f}$, avec $f \in E$, on aura

$$\tilde{\Phi} * \tilde{f} = K^{p+k+2}(\Phi * f) = K_x^{p+k+2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x-y)f(y)dy$$

Au lieu de D on pourrait aussi considérer l'opérateur iD , ce qui se traduirait par une simple rotation, chaque ensemble F_k devant être remplacé par l'ensemble $-iF_k$, et la transformation bilatérale de LAPLACE par la transformation de FOURIER. *Mais, contrairement à D , iD est un opérateur auto-adjoint.* On peut donc appliquer à iD le calcul symbolique des opérateurs auto-adjoints (cf. par exemple [6], p. 337-355), ce qui d'ailleurs conduit à un résultat équivalent à l'antérieur. Mais on s'aperçoit maintenant du fait suivant:

Le calcul des fonctions $\varphi(iD)$, avec $\varphi \in \mathcal{A}(-iF)$ i. e. avec $\varphi(i\tilde{z}) \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ peut s'étendre aux fonctions φ localement sommables et à croissance lente sur \mathbf{R} .

Ces résultats se généralisent immédiatement au cas où E est l'espace de fonctions à carré sommable sur \mathbf{R}^n , et A_1, \dots, A_n les dérivations partielles. On pourra aussi considérer des opérateurs différentiels à coefficients variables, comme dans l'exemple I.

III. Soit E l'espace des fonctions $f(\lambda) = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ à carré sommable dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^n et Δ le laplacien:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

associé à un problème aux limites relatif à Ω ; plus précisément, on considère l'équation en u

$$(\Delta - \lambda)u = f, \quad \text{avec } u, f \in E,$$

en imposant à u certaines "conditions aux limites", par exemple l'annulement sur la frontière de Ω . Soit E_0 le sous-espace de E constitué par les

fonctions u vérifiant ces conditions et pour lesquels Δu existe au sens usuel (presque partout). On démontre alors, sous des hypothèses assez générales, que Δ , *considéré uniquement comme application de E_0 sur E* , est un opérateur auto-adjoint, dont le spectre élémentaire (discret ou continu, selon Ω et les conditions aux limites) est contenu dans le demi-axe réel négatif, \mathbf{R}^- . On peut prendre alors, par exemple, $K = \Delta - 1$. L'espace E correspondant, constitué par des distributions d'ordre fini à support contenu dans $\bar{\Omega}$, est quelquefois un espace (S_2) (dans le cas où Ω est borné) et quelquefois non.

Soit maintenant F_k , pour tout $k = 1, 2, \dots$, l'ensemble des points de \mathbf{C} dont la distance à \mathbf{R}^- est $\leq 1/k$. Dans les cas usuels, on démontre que tous ces F_k sont des ensembles spectraux de Δ . On peut alors définir les fonctions $\varphi(\Delta)$, avec $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. L'expression que l'on obtient de cette façon pour $\varphi(\Delta)$ est équivalente à celle que l'on déduit en appliquant le calcul symbolique des opérateurs auto-adjoints. *Mais, dans ce cas, le calcul des fonctions $\varphi(\Delta)$ peut s'étendre, au cas des fonctions φ continues sur \mathbf{R}^- à croissance lente vers l'infini.*

Au lieu de Δ on pourrait considérer d'autres opérateurs différentiels du 2^d ordre, à coefficients constants ou variables. *Dans le cas où ces opérateurs ne sont pas auto-adjoints, on sera ainsi conduit, bien probablement, à des résultats utiles, essentiellement nouveaux.*

IV. Soit E l'espace des fonctions $f(x_1, \dots, x_n, t) = f(x, t)$, qui, pour tout $t \in \mathbf{R}$, sont des fonctions de x à carré sommable dans un ouvert Ω de \mathbf{R}^n et qui, pour presque tout $x \in \Omega$, sont des fonctions continues sur \mathbf{R} et nulles pour $t > 0$ [resp. à carré sommable dans \mathbf{R}]. Soient d'autre part Δ le laplacien par rapport à x , dans les conditions de l'exemple III, et D l'opérateur de dérivation par rapport à t . On peut prendre alors, par exemple, $K_1 = \Delta - 1$ et $K_2 = D$ [resp. $K_2 = D + 1$] et construire l'espace \tilde{E} correspondant (espace de distributions). Cela étant, si l'on désigne par F_k^1 l'ensemble des points dont la distance à \mathbf{R}^- est $\leq 1/k$, et par F_k^2 le demi-plan $\operatorname{Re}(z) \geq k$ [resp. la bande $\operatorname{Re}(z) \geq 1/k$], on peut définir sous certaines hypothèses, la fonction $\varphi(\Delta, D)$, pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, où \mathcal{F} est le filtre engendré par les ensembles $F_k^1 \times F_k^2$.

On peut encore considérer, au lieu de Δ et D , des opérateurs de type semblable, à coefficients variables.

13. **Espaces à bornés et algèbres à bornés** ⁽¹⁰⁾. Avant d'aborder l'étude de l'application du calcul symbolique à certains types d'équations fonctionnelles, il convient d'introduire quelques notions simplificatrices.

⁽¹⁰⁾ On peut, si on le préfère, renvoyer ce n° à une lecture postérieure.

Les exemples antérieurs ont permis d'entrevoir que l'étude topologique des espaces E et, par suite, des algèbres $\mathcal{L}_b(\tilde{E})$, conduit souvent à des difficultés, plus ou moins sérieuses, qui sont tout à fait à côté des problèmes auxquels on prétend appliquer le calcul symbolique. Or on peut éviter complètement ces difficultés, en remplaçant les structures de "espace localement convexe" et de "algèbre localement convexe", par les structures, beaucoup plus simples et maniables, de "espace à bornés" et de "algèbre à bornés", proposées par L. WAELBROECK [26] et qui sont parfaitement suffisantes pour les buts du calcul symbolique.

On appelle *espace à bornés* tout espace vectoriel complexe E , dans lequel on ait choisit une famille \mathfrak{B} de parties de E , dites « bornées », vérifiant les axiomes suivants :

- $\alpha)$ *Tout ensemble formé d'un seul élément de E appartient à \mathfrak{B} .*
- $\beta)$ *Toute réunion finie d'ensembles de \mathfrak{B} appartient aussi à \mathfrak{B} .*
- $\gamma)$ *Si $B \in \mathfrak{B}$ l'enveloppe convexe cerclée de B appartient aussi à \mathfrak{B} , ainsi que toute partie de B et tout homothétique de B .*
- $\delta)$ *Aucun sous-espace vectoriel non nul de E appartient à \mathfrak{B} .*

Soit E un espace à bornés \mathfrak{B} . Pour tout $B \in \mathfrak{B}$, désignons par \widehat{B} l'enveloppe convexe cerclée de B et par E_B le sous-espace vectoriel de E engendré par B , muni de la norme correspondante à \widehat{B} , prise comme boule unité: $\|u\|_B = \inf \{\alpha; u \in \alpha \widehat{B}\}$. Si l'on considère dans E la topologie, $\mathcal{T}\mathfrak{B}$, de la limite inductive localement convexe des espaces E_B , avec $B \in \mathfrak{B}$, tout ensemble de \mathfrak{B} sera borné au sens de $\mathcal{T}\mathfrak{B}$, mais la réciproque n'est nécessairement pas vraie, comme l'a montré WAELBROECK [26]. Donc la classe des structures de « espace à bornés » est bien distincte de celle des structures de « espace localement convexe », même si l'on se limite aux espaces bornologiques.

On dit que l'espace à bornés E est *complet* (cf. WAELBROECK, ibidem), si, pour tout $B \in \mathfrak{B}$, il existe un $C \in \mathfrak{B}$ tel que l'on a $B \subset C$ et l'espace normé E_C est complet.

D'autre part, on dit qu'une suite (u_n) d'éléments de E converge vers $v \in E$, s'il existe un $B \in \mathfrak{B}$, tel que $u_n \rightarrow v$ dans l'espace E_B , c'est à dire si $\|u_n - v\|_B \rightarrow 0$. Une suite (u_n) est dite une *suite de Cauchy dans E* , s'il existe en $B \in \mathfrak{B}$, tel que (u_n) est une suite de CAUCHY dans E_B . Il est évident que, si l'espace à bornés E est complet, toute suite de Cauchy dans E est convergente; mais on ne sait pas si la réciproque est vraie. Evidemment, cette notion de convergence peut s'étendre, d'une façon tout à fait analogue, à des fonctions $u(t)$ d'une variable t , réelle ou complexe, et à valeurs dans E ; en outre, on voit que, si une telle fonction vérifie la

condition de convergence de Cauchy lorsque t tend vers un point t_0 , et si l'espace E est complet, alors $u(t)$ converge dans E lorsque $t \rightarrow t_0$.

En particulier, la famille \mathcal{B} peut être formée par tous les parties de E qui sont bornées au sens d'une topologie localement convexe τ , définie dans E . Alors, dire que l'espace à bornés E est complet équivaut à dire que l'espace localement convexe E est quasi-complet; et la notion de convergence des suites dans l'espace à bornés E coïncide avec la notion de convergence «au sens de Mackey» dans l'espace localement convexe E . Il faut donc faire attention à cette différence de terminologie dans les deux cas!

EXEMPLE. - Soit E un espace normé, ou, plus généralement, un espace localement convexe métrisable, et soit A_s , pour chaque $s = 1, \dots, n$, une application linéaire biunivoque d'un sous-espace E_s de E sur E . Si ces applications sont permutables, on peut construire une extension \tilde{E} de E , comme l'on a indiqué au n° 12, et \tilde{E} sera la réunion des espaces localement convexes $K^m(E)$, images de E par K^m , où $K = K_1 K_2 \dots K_n$ et m est un entier quelconque. Alors, un sous-ensemble d'un tel espace $K^m(E)$ est borné, si et seulement s'il est l'image, par K^m , d'un borné de E . Cela étant, convenons de dire qu'un sous-ensemble U de \tilde{E} est borné, s'il existe au moins un entier p tel que U soit borné dans l'espace normé $K^p(E)$. Alors on voit aussitôt que \tilde{E} , muni de cette famille d'ensembles dits bornés, est un espace à bornés, et que celui-ci sera complet, si E est lui-même complet (la réciproque n'est cependant pas vraie). En outre, la convergence des suites dans E se traduit également par la convergence des suites dans un des espaces $K^m(E)$. Ces notions de borné et de convergence des suites coïncident avec les notions correspondantes, au sens de la topologie τ_∞ , si l'espace \tilde{E} , comme limite inductive des $K^m(E)$, est un espace (S_2) ; alors il n'y aura pas de vraie distinction entre les structures de «espace à bornés» et de «espace localement convexe» dans \tilde{E} . Mais il n'en sera pas de même dans le cas général, comme le peuvent montrer les exemples du n° 12. En effet, l'espace à bornés \tilde{E} peut être complet, dans des cas où l'espace localement convexe \tilde{E} n'est même pas semi-complet; les critères pour reconnaître les ensembles bornés ou la convergence des suites sont en général beaucoup plus compliqués au sens de la topologie τ_∞ , etc. etc.

Nous avons supposé que l'espace E initial est un espace localement convexe métrisable (qui s'identifie à un espace à bornés, puisqu'il est alors bornologique). Mais si l'on suppose, plus généralement, que l'espace E donné est un espace à bornés quelconque, les conclusions seront les mêmes.

Cela posé, considérons deux espaces à bornés E, F . On dit qu'une application linéaire continue Φ de E dans F est bornée (ou continue), si l'image de tout borné de E par Φ est un borné de F . On dit qu'une application bilinéaire Φ de $E \times F$ dans un autre espace à bornés G

est bornée, si, pour tout couple (B_1, B_2) , où B_1 est un borné de E et B_2 un borné de F , $\Phi(B_1, B_2)$ est un borné de G .

Dans les mêmes hypothèses, désignons par $\Lambda(E; F)$ l'ensemble des applications linéaires bornées de E dans F ; on voit aisément que $\Lambda(E; F)$ est un espace vectoriel complexe, par rapport aux notions usuelles de somme et de produit par scalaires. Il est en outre naturel de dire qu'un ensemble $H \subset \Lambda(E; F)$ est borné, si, pour tout borné B de E , il existe un borné C de F , tel que $\Phi(B) \subset C$, pour toute $\Phi \in H$. On voit aussitôt que, dans ces conditions, $\Lambda(E; F)$ est aussi un espace à bornés (complet si F est complet) et que

PROPOSITION 14. - Si l'on pose $L = \Lambda(E; F)$, l'application bilinéaire $(\Phi, u) \rightarrow \Phi(u)$ de $L \times E$ dans F est bornée. Si l'on pose, en outre, $M = \Lambda(F; G)$ et $N = \Lambda(E; G)$, où G , est un troisième espace à bornés, l'application bilinéaire $(\Phi, \Psi) \rightarrow \Phi\Psi$ de $L \times M$ dans N est aussi bornée.

DÉFINITION. - On appelle algèbre à bornés toute algèbre complexe \mathbf{A} , munie d'une structure d'espace à bornés, par rapport à laquelle le produit - c'est-à-dire l'application bilinéaire $(x, y) \rightarrow xy$ de \mathbf{A} dans \mathbf{A} - est borné.

De la prop. 14 on déduit :

COROLLAIRE. - Si E est un espace à bornés l'espace $\Lambda(E) = \Lambda(E; E)$ des applications linéaires bornées de E dans E est une algèbre à bornés, par rapport au produit usuel.

On dit qu'une fonction f , à valeurs dans un espace E à bornés, est holomorphe dans un ouvert Ω du plan, si, pour tout ouvert D borné tel que $\overline{D} \subset \Omega$, il existe un borné B de E tel que f est holomorphe dans D par rapport à E_B . Les notions de "ensemble spectral" et de "filtre spectral", ainsi que leurs propriétés, se généralisent aussitôt au cas d'algèbres à bornés.

D'autre part, on voit aisément que les propositions 7 et 8 (n° 6) restent vraies, si, au lieu d'un espace localement convexe E , semi-complet et séparé, on considère un espace à bornés E complet, et si l'on remplace dans l'énoncé de ces propositions les semi-norme p par la norme $\|\cdot\|_B$ relative à un borné B quelconque où la fonction $\lambda^2 f(\lambda)$ [resp. $\lambda_1^2 \dots \lambda_n^2 f(\lambda)$] prenne ses valeurs, lorsque $\lambda \in \Gamma$.

Dans ces conditions, en observant que l'algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ considérée aux n°s 8, 9 et 11 est elle-même une algèbre à bornés, on arrive sans difficulté à la conclusion suivante :

SCOLIE. - Le théorème 1 reste vrai, si, au lieu de supposer E un espace localement convexe semi-complet et séparé, on suppose E un espace à bornés

complet. De même, le théorème 2 (ainsi que sa généralisation, le théorème 3), reste vrai, si au lieu de supposer A une algèbre localement convexe semi-complète et séparée, où le produit est séparément continu, on suppose A tout simplement une algèbre à bornés complète. Il convient de rappeler d'ailleurs que, lorsqu'il s'agit de espaces à bornés et de algèbres à bornés, «application linéaire continue» est synonyme de «application linéaire bornée» et, par suite, «homomorphisme continu» est synonyme de «homomorphisme borné».

EXEMPLE. — Considérons encore une fois l'espace E à opérateurs A_s , et son extension \tilde{E} . Il est aisé de voir que les A_s , prolongés à \tilde{E} , sont des applications linéaires bornées, au sens de la structure d'espace à bornés définie dans E : cette structure a été choisie précisément dans le but de rendre ces applications bornées (cf. [10], théorème 6). D'autre part, la proposition 14 montre aussitôt que l'algèbre $\Lambda(\tilde{E})$ des applications linéaires bornées de \tilde{E} dans \tilde{E} (à laquelle appartiennent les A_s) est une algèbre à bornés qui sera complète si l'espace E initial est complet. On peut donc appliquer, dans ce cas, le calcul symbolique aux opérateurs A_s , sans plus de soucis relativement aux questions topologiques. Par exemple, dans le cas où \tilde{E} est l'espace des distributions d'ordre fini nulles en dehors de $x > 0$ (cf. n° 12, exemple I), E est un espace à bornés complet, et on n'a donc aucun besoin d'y introduire les distributions d'ordre infini, pour s'assurer a priori de pouvoir y appliquer le calcul symbolique.

14. **Équations fonctionnelles du type** $(A - B)u = f$. Comme application importante du calcul symbolique établi, considérons le cas d'une équation du type

$$(14.1) \quad (A - B)u = f$$

où f est un élément connu d'un espace à bornés E complet, u un élément inconnu de E et A, B deux applications permutables de deux sous-espaces de E sur E .

C'est là un type assez général d'équations fonctionnelles linéaires, auquel appartiennent l'équation des ondes, l'équation de la chaleur et d'autres équations semblables, à coefficients constants ou variables, avec des conditions initiales et conditions de frontière (qu'il convient de supposer introduites dans le 2^e membre, en modifiant u et f par des techniques bien connues).

Supposons qu'il existe deux nombres complexes λ_0 et μ_0 tels que $A - \lambda_0$ et $B - \mu_0$ soient deux applications biunivoques de sous-espaces de E sur E . Alors on peut construire une extension \tilde{E} de E , telle que $A - \lambda_0$ et $B - \mu_0$ se prolongent en deux applications linéaires biunivoques

de \tilde{E} sur \tilde{E} et que tout élément \tilde{u} de \tilde{E} soit de la forme $\tilde{u} = (A - \lambda_0)^m (B - \mu_0)^n u$, avec $u \in E$ et m, n entiers. En outre, \tilde{E} sera muni d'une structure d'espace à bornés complet, comme on l'a indiqué au n° 13. Dans ces conditions:

THÉOREME 4. - Si les opérateurs A et B , comme éléments de l'algèbre à bornés $\Lambda(\tilde{E})$, admettent deux ensembles spectraux S_A et S_B , à frontières rectifiables après inversion (cf. n° 6) et à distance non nulle l'un de l'autre, l'équation (14.1) admet, pour tout $f \in E$, une et une seule solution \tilde{u} dans \tilde{E} , donnée par la formule (au sens de τ_∞):

$$(14.2) \quad u = (A - B)^{-1}f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (A - \lambda)^{-1}(\lambda - B)^{-1}f \, d\lambda,$$

où Γ est une ligne rectifiable après inversion, séparatrice de S_A et S_B , orientée de façon à laisser à droite les points de S_A .

Démonstration. Soient S_A et S_B deux ensembles spectraux, respectivement de A et de B , vérifiant l'hypothèse. Alors, si l'on désigne par F_k^1 [resp. F_k^2], l'ensemble des points de \mathbf{C} dont la distance à S_A [resp. S_B] est $\leq 1/k$, pour $k = 1, 2, \dots$, on obtient deux bases de filtre régulières, $\{F_k^1\}$ et $\{F_k^2\}$ et on voit aussitôt que la fonction $(z - w)^{-1}$ de z et de w appartient à l'espace $\mathcal{A}(\mathfrak{F})$, où \mathfrak{F} est le filtre de la base $F_k^1 \times F_k^2$. Plus précisément, il existe un k tel que cette fonction est bornée sur $F_k^1 \times F_k^2$, attendu que la distance entre S_A et S_B est > 0 . Donc, en appliquant le calcul symbolique basé sur le théorème 3, compte tenu de la REGLE D'INVERSION (cf. n°s 10 et 11) et du scolie du n° 13, on trouve:

$$(A - B)^{-1} = \frac{(A - \alpha)(B - \beta)}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_k^1} \int_{\Gamma_k^2} \frac{(\lambda - \mu)^{-1} d\lambda d\mu}{(\lambda - \alpha)(\mu - \beta)(A - \alpha)(B - \beta)},$$

en prenant, par exemple $\alpha \in S_B$ et $\beta \in S_A$ ⁽¹¹⁾. Or le 2^d membre peut s'écrire:

$$\begin{aligned} & \frac{A - \alpha}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^1} \frac{(A - \lambda)^{-1}}{\lambda - \alpha} \left(\frac{B - \beta}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^2} \frac{(B - \mu)^{-1} d\mu}{(\mu - \beta)(\lambda - \mu)} \right) d\lambda = \\ & = \frac{A - \alpha}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(A - \lambda)^{-1}(\lambda - B)^{-1}}{\lambda - \alpha} d\lambda, \quad \text{avec } \Gamma = \Gamma_k^1 \end{aligned}$$

⁽¹¹⁾ Bien entendu, Γ_k^1 et Γ_k^2 désignent les frontières de F_k^1 et F_k^2 , orientées de façon à laisser à droite, respectivement, F_k^1 et F_k^2 .

Alors, puisqu'on a

$$\frac{A - \alpha}{\lambda - \alpha} \cdot \frac{1}{A - \lambda} = \frac{1}{\lambda - \alpha} + \frac{1}{A - \lambda},$$

et que la fonction $(\lambda - \alpha)^{-1}(\lambda - B)^{-1}$ de λ est holomorphe dans l'intérieur de F_k^1 , on trouve, en notant que les fonctions $\lambda(A - \lambda)^{-1}$ et $\lambda(\lambda - B)^{-1}$ de λ sont bornés sur Γ (en vertu de la prop. 1, n°. 2):

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\lambda}{(A - \lambda)(\lambda - B)} \quad \text{c. q. f. d.}$$

REMARQUE IMPORTANTE. — Il faut bien souligner que, si la fonction $\lambda^2(A - \lambda)^{-1}(\lambda - B)^{-1}f$ de λ est bornée sur Γ , comme fonction à valeurs dans l'espace image de E par l'application $(A - \alpha)^m(B - \beta)^n$, alors la convergence de l'intégrale de (14.2) a lieu dans cet espace, auquel appartiendra, par conséquent, la solution \hat{u} .

15. Le calcul symbolique relatif à des fonctions vectorielles. — Le résultat que nous venons d'obtenir peut être amélioré, en employant une nouvelle généralisation du calcul symbolique, relatif à des fonctions $\varphi(z)$ à valeurs vectorielles.

Soit encore \mathcal{F} un filtre de sous-ensembles de \mathbf{C} admettant une base $\{F_k\}$ régulière, et soit d'abord M un espace de BANACH. Pour tout $k = 1, 2, \dots$ nous désignons par $\mathcal{A}(F_k; M)$ l'espace des fonctions $\varphi(z)$ à valeurs dans M , continues sur F_k , holomorphes à l'intérieur de F_k et telles que $\|\varphi(z)\| < \mu \|z\|^k$, où μ est une constante dépendante de φ , et $\|\cdot\|$ la norme définie dans M ; cet espace est muni des notions usuelles de somme et de produit par scalaires, et de la topologie \mathcal{T}_k définie par la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \left\| \frac{\varphi(z)}{(z - c)^k} \right\|,$$

où c est un point choisi arbitrairement dans $\mathbf{C} - F_1$. On voit encore que cet espace normé est complet.

Si l'on identifie chaque fonction $\varphi \in \mathcal{A}(F_k; M)$ à sa restriction à F_{k+1} , on a $\mathcal{A}(F_k; M) \subset \mathcal{A}(F_{k+1}; M)$ et on voit que la topologie \mathcal{T}_{k+1} induit dans $\mathcal{A}(F_k; M)$ une topologie moins fine que \mathcal{T}_k . Alors on pose

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}; M) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}(F_k; M)$$

et on définit dans $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$ la structure d'espace localement convexe, limite inductive des espaces normés $\mathcal{A}(F_k; M)$. Les éléments φ de $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$ seront dits les *fonctions à valeurs dans M , holomorphes et à croissance lente sur les F_k* .

Cela posé, on démontre, en raisonnant à peu près comme dans [18], § 2, que:

L'espace vectoriel topologique $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$ est séparé et complet; il est isomorphe au produit tensoriel projectif complété $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \widehat{\otimes} M$. Pour qu'un ensemble soit borné dans cet espace il faut et il suffit qu'il soit borné dans un des espaces normés $\mathcal{A}(F_k; M)$.

[Ce théorème est une synthèse de plusieurs propositions, dont la démonstration est plutôt longue et pas très facile. Mais, pour les applications au calcul symbolique, on peut éviter complètement cette analyse, en considérant tout simplement $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$ comme un espace à bornés, comme nous le ferons plus loin].

Considérons maintenant un algèbre \mathbf{A} vérifiant les conditions indiquées aux nos 2 et 9, et d'autre part, un espace vectoriel complexe $M_{\mathbf{A}}$ et une application bilinéaire $(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{a} \odot \mathbf{u}$ de $\mathbf{A} \times M_{\mathbf{A}}$ dans $M_{\mathbf{A}}$ tels que:

I) $\mathbf{a} \odot (\mathbf{b} \odot \mathbf{u}) = (\mathbf{ab}) \odot \mathbf{u}$, quels que soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{u} \in M_{\mathbf{A}}$;

II) $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$, pour tout $\mathbf{u} \in M_{\mathbf{A}}$

III) M est isomorphe à un sous-espace vectoriel de $M_{\mathbf{A}}$.

Nous pouvons donc identifier M à ce sous-espace de $M_{\mathbf{A}}$. Supposons en outre $M_{\mathbf{A}}$ muni d'une topologie d'espace localement convexe séparé, semi-complet, qui conduise dans M une topologie moins fine que celle de M et telle que l'application \odot soit hypocontinue relativement aux parties compactes de \mathbf{A} et de M .

[Par exemple, on peut prendre, précisément

$$\mathbf{A} = \mathcal{A}(\mathcal{F}), \quad M_{\mathbf{A}} = \mathcal{A}(\mathcal{F}; M) = \mathcal{A}(\mathcal{F}) \widehat{\otimes} M$$

et interpréter $\varphi \odot \psi$, avec $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ et $\psi \in M_{\mathbf{A}}$, comme le produit $\varphi\psi$ de la fonction *scalaire* φ par la fonction *vectorielle* ψ . [D'ailleurs, quelle que soit l'algèbre \mathbf{A} vérifiant les conditions indiquées, on peut prendre pour $M_{\mathbf{A}}$, par exemple, le complété du produit tensoriel $\mathbf{A} \otimes M$ muni de la plus fine topologie qui rende l'application canonique $(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \mapsto \mathbf{a} \otimes \mathbf{u}$ de $\mathbf{A} \times M$ dans $\mathbf{A} \otimes M$ hypocontinue par rapport aux parties compactes de \mathbf{A} et de M . Mais, comme nous l'avons déjà observé à plusieurs reprises, on peut com-

plètement éviter, dans le calcul symbolique, les considérations relatives aux produits tensoriels].

Cela posé, on arrive aisément au résultat suivant

THÉOREME 6. — Si α est un élément de A dont le filtre spectral soit plus fin que \mathcal{F} et si \mathcal{K} est l'homomorphisme continu $\varphi \rightarrow \varphi(\alpha)$ de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans A , il existe une et seulement une application linéaire continue \mathcal{K}_M de $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$ dans M_A qui prolonge \mathcal{K} , c'est-à-dire telle que

$$\mathcal{K}_M(\varphi u) = \mathcal{K}(\varphi) \odot u, \text{ quels que soient } \varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}), u \in M,$$

Cette application est donnée par la formule

$$(15.1) \quad \mathcal{K}_M(\varphi) = \frac{(\alpha - \lambda_0)^p}{2\pi i} \odot \int_{\Gamma_k} \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^p (\alpha - \lambda)} \odot \varphi(\lambda) d\lambda,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(F_k; M)$

où $\lambda_0 \in \mathbf{C} - F_1$, p étant choisi de façon que $\varphi(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)^p$ soit bornée sur F_k et Γ_k étant frontière de F_k de façon à laisser F_k à droite.

Pour reconnaître que \mathcal{K}_M est nécessairement donnée par cette formule, il suffit d'observer que l'on a encore

$$\varphi = \frac{(\bar{z} - \lambda)^{k+1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{\varphi(\lambda) d\lambda}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1} (\bar{z} - \lambda)}, \text{ au sens de } \mathcal{T}_\infty,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{A}(F_k; M)$, $k = 1, 2, \dots$

Pour voir que, réciproquement, la formule (15.1) définit une application linéaire continue de $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$ dans M_A , on peut raisonner à peu près exactement comme dans la démonstration du théorème 1, en tenant compte que l'application $(\alpha, u) \rightarrow \alpha \odot u$ de $A \times M$ dans M_A est hypocontinue par rapport aux parties compactes. Enfin, on voit aussitôt que cette application est en effet un prolongement de \mathcal{K} .

Cela étant, on pose par définition :

$$\varphi(\alpha) = \mathcal{K}_M(\varphi) \in M_A, \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}; M).$$

Pour une justification complète de cette définition, considérons deux espaces de BANACH N, L , et deux autres espaces N_A, L_A , vérifiant des conditions identiques à celles imposées à M_A . Supposons en outre que l'on se donne une application bilinéaire continue $(u, v) \rightarrow u \odot v$ de $M \times N$ dans

L , et une application bilinéaire $(u, v) \rightarrow u \bar{\Theta} v$, de $M_A \times N_A$ dans L_A , hypocontinue par rapport aux parties compactes de M_A et N_A , qui prolonge la première, c'est-à-dire telle que

$$(a \odot u) \bar{\Theta} (b \odot v) = (ab) \odot (u \Theta v)$$

quels que soient $a, b \in A$, $u \in M$, $v \in N$.

On établit alors sans difficulté les règles fondamentales du calcul symbolique avec des fonctions vectorielles:

1) Si $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$, on a

$$\varphi(a) = \varphi_1(a) + \varphi_2(a) \in M_A.$$

2) Si $\varphi = \varphi_1 \Theta \varphi_2$, avec $\varphi_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$, $\varphi_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{F}; N)$, on a

$$\varphi(a) = \varphi_1(a) \bar{\Theta} \varphi_2(a) \in L_A.$$

3) Si $\varphi = \lim \varphi_n$ dans $\mathcal{A}(F; M)$, on a $\varphi(a) = \lim \varphi_n(a)$ dans M_A .

4) Si $\varphi(z) \equiv z^n u$, $\varphi(a) = a^n \odot u$, pour tout $u \in M$, $n = 0, 1 \dots$

Quant à la RÈGLE D'INVERSION on en trouvera une forme dans le théorème 5, n° 17.

16. Variante des résultats antérieurs en termes de « espaces à bornés » – Dans les considérations du n° 15, on a pris pour point de départ des espaces de BANACH M, N, L, \dots , ainsi que l'algèbre A localement convexe, et on a considéré ensuite des espaces localement convexes tels que M_A, N_A, \dots . On peut généraliser ces résultats au cas d'espaces M, N, L, \dots localement convexes semi-complets, mais alors on se heurte à des difficultés topologiques semblables à celles que l'on trouve dans l'étude des distributions vectorielles; dans le cas général, on sera obligé à introduire des entités nouvelles – les fonctions holomorphes à valeurs dans M au sens large, d'après GROTHENDIECK (cf. [1], p. 49 et [18], Introduction). Mais, une fois encore, ces difficultés sont entièrement étranges aux buts du calcul symbolique, et on peut les éviter par le recours aux notions de « espace à bornés » et de « algèbre à bornés ».

Soit M un espace à bornés complet (cf. n° 13) et désignons par \mathcal{C} la famille des bornés C de M pour lesquels M_C est complet. Soit d'autre part \mathcal{F} un filtre admettant une base $\{F_k\}$ régulière. Nous désignerons par $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$ l'espace vectoriel réunion de tous les espaces $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M_C)$, avec $C \in \mathcal{C}$, ces derniers espaces vectoriels étant définis comme nous l'avons fait au n°

précédent. Nous dirons qu'un ensemble \mathcal{H} de fonctions appartenant à $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$ est borné, s'il existe un entier k et un borné C de M tels que

$$\varphi \in \mathcal{A}(F_k; M_c) \quad \text{et} \quad \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k} \in C,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{H}$ et tout $z \in F_k$, avec $z_0 \in \mathbf{C} - F_1$.

Alors il est bien aisé de voir que $\mathcal{A}(\mathcal{F}; M)$ devient ainsi un espace à bornés complet.

Considérons maintenant une algèbre à bornés complète \mathbf{A} , munie d'élément unité, un espace à bornés complet $M_{\mathbf{A}}$ et une application bilinéaire bornée $(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{a} \odot \mathbf{u}$ de $\mathbf{A} \times M_{\mathbf{A}}$ dans $M_{\mathbf{A}}$ tels que:

I) $\mathbf{a} \odot (\mathbf{b} \odot \mathbf{u}) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) \odot \mathbf{u}$, quels que soient $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{u} \in M_{\mathbf{A}}$.

II) $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$, pour tout $\mathbf{u} \in M_{\mathbf{A}}$.

III) Il existe une application linéaire biunivoque et bornée de M sur un sous-espace de $M_{\mathbf{A}}$.

Dans ces conditions on peut identifier M à ce sous-espace de $M_{\mathbf{A}}$ et on arrive aisément à la conclusion suivante:

SCOLIE. - *Le théorème 6 reste vrai, si au lieu d'un espace de Banach M , d'une algèbre localement convexe \mathbf{A} et d'un espace localement convexe $M_{\mathbf{A}}$, on considère, respectivement, un espace à bornés M complet, une algèbre à bornés \mathbf{A} complète et un espace à bornés $M_{\mathbf{A}}$ complet, tel qu'il existe une application bilinéaire bornée \odot de $\mathbf{A} \times M_{\mathbf{A}}$ dans $M_{\mathbf{A}}$ vérifiant les conditions I), II) et III).*

On en déduit des variantes des règles fondamentale du calcul symbolique, tout à fait analogues à celles indiquées au n°. antérieur.

17. **Équations fonctionnelles du type $P(A)u = f$.** - Considérons maintenant, plus généralement, les équations du type

$$(17.1) \quad P(A)u = f,$$

f étant un élément connu d'un espace à bornés F complet, u un élément d'un sous-espace vectoriel E de F , A une application linéaire d'un sous-espace F^* de F dans F et $P(\lambda)$ une fonction de λ (variable complexe) dont les valeurs soient des applications linéaires de E dans F , permutables avec A , c'est-à-dire telles que

$$(17.2) \quad P(\lambda)(Au) = A[P(\lambda)u],$$

pour tout nombre complexe λ appartenant au domaine de $P(\lambda)$ et toutes les fois que l'un quelconque de ces deux produits soit défini. [Si $P(\lambda)$ est un polynôme, la condition (17.2) équivaut à dire que les coefficients de $P(\lambda)$ sont des applications linéaires de E dans F permutables avec A].

Supposons en outre qu'il existe un nombre complexe α tel que $A - \alpha$ soit une application biunivoque de F^* sur F . Alors on peut construire, comme on l'a indiqué aux n° 12 et 13, un espace à bornés \tilde{F} complet, réunion des images de F par les applications $(A - \alpha)^n$, $n = 0, 1, \dots$, et, puisque l'on a (17.2), on pourra de même prolonger les valeurs de $P(\lambda)$ en des applications linéaires de \tilde{E} dans \tilde{F} , permutables avec A : si $\tilde{u} = (A - \alpha)^n u$, avec $u \in E$ et n entier, on aura, par définition,

$$P(\lambda)\tilde{u} = (A - \alpha)^n[P(\lambda)u],$$

pour tout λ du domaine de $P(\lambda)$. ⁽¹²⁾

Cela posé, considérons l'équation en u

$$(17.1') \quad P(\lambda)u = f,$$

que l'on déduit de (17.1), en remplaçant A par la variable complexe λ , et supposons qu'il existe des valeurs de λ telles que, pour tout $f \in F$, cette équation admet une solution unique $u \in E$. Alors, à chacun de ces valeurs de λ , correspond une application linéaire $Q(\lambda)$ de F sur E telle que

$$Q(\lambda)P(\lambda) = I_E \quad \text{et} \quad P(\lambda)Q(\lambda) = I_F$$

où I_E et I_F désignent respectivement les applications identiques de E sur E et de F sur F . Donc, si l'on désigne par Z l'ensemble de ces valeurs de λ , on aura

$$Q(\lambda) = [P(\lambda)]^{-1}, \quad \text{pour tout } \lambda \in Z$$

Cela étant, nous considérons l'espace E muni de la *moins fine* structure d'espace à bornés ⁽¹³⁾ qui rende bornées les applications linéaires $P(\lambda)$ de E dans F , lorsque λ appartient à un ensemble non vide $Z^* \subset Z$, et nous sup-

⁽¹²⁾ Cf. [10], p. 114-115 (Dans la condition H_3' il y a une erreur typographique: au lieu de « $u \in E$ » on doit lire « $u \in E_\Phi$ »).

⁽¹³⁾ Etant données deux familles \mathfrak{B}_1 et \mathfrak{B}_2 de sous-ensembles de E , vérifiant les conditions $\alpha) - \delta)$, n° 13, on dit que la structure à bornés définie par \mathfrak{B}_1 est *moins fine* que celle définie par \mathfrak{B}_2 , si $\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2$. Cette relation a des propriétés semblables à celles de la relation correspondante définie entre topologies.

posons que, pour tout $\lambda \in Z^*$, $Q(\lambda)$ est une application bornée de F sur E . On aura donc, selon ces hypothèses :

$$P(\lambda) \in \Lambda(E; F) \text{ et } Q(\lambda) \in \Lambda(F; E), \quad \text{pour tout } \lambda \in Z^*$$

Voici maintenant la variante de la règle d'inversion, qui est en même temps une généralisation du théorème 4 et du théorème d'isomorphisme de LIONS ([4], p. 99) :

THÉOREME 5. - Supposons qu'il existe une base régulière $\{F_k\}$ d'un filtre \mathcal{F} , formée par des ensembles spectraux de l'opérateur A en tant qu'élément de $\Lambda(\tilde{F})$. Supposons d'autre part que les fonctions $P(\lambda)$ et $[P(\lambda)]^{-1}$, à valeurs respectivement dans $\Lambda(E; F)$ et $\Lambda(F; E)$, sont toutes deux holomorphes et à croissance lente sur un ensemble $F_k \subset Z^*$. Alors l'équation $P(A)u = f$ admet, pour tout $f \in F$, une solution unique \tilde{u} dans \tilde{E} , donnée par

$$\tilde{u} = \frac{1}{P(A)} f = \frac{(A - \alpha)^m}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{(A - \lambda)^{-1} [P(\lambda)]^{-1}}{(\lambda - \alpha)^m} f \, d\lambda$$

où α est un point quelconque de $\mathbf{C} - F$, et k, m des entiers tels que $[P(\lambda)]^{-1}$ soit continue sur F_k et holomorphe dans l'intérieur de F_k , et que son quotient par $(\lambda - \alpha)^m$ soit borné sur F_k ; ou suppose encore que Γ_k est la frontière de F_k orientée de façon à laisser F_k à droite.

Démonstration. Supposons vérifiée l'hypothèse. Alors on peut définir $\varphi(A) \in \Lambda(F)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Nous prendrons pour algèbre à bornés \mathbf{A} l'image de l'algèbre à bornés $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ par l'application $\varphi \rightarrow \varphi(A)$. Nous pouvons maintenant appliquer le scolie du théorème 5 (n° 16) et les correspondantes règles du calcul symbolique, avec

$$M = \Lambda(E; F), \quad N = \Lambda(F; E), \quad L = \Lambda(E), \quad H = \Lambda(F)$$

et

$$M_A = \Lambda(\tilde{E}; \tilde{F}), \quad N_A = \Lambda(\tilde{F}; \tilde{E}), \quad L_A = \Lambda(\tilde{E}), \quad H_A = \Lambda(\tilde{F}),$$

les applications bilinéaires \odot , Θ et $\bar{\Theta}$ étant simplement les opérations usuelles de produit d'opérateurs [observons que tout opérateur $\varphi(A) \in \mathbf{A} \subset \Lambda(\tilde{F})$ définit, par restriction, un élément de $\Lambda(F)$ et un élément de $\Lambda(E)$]. En employant la prop. 14 (n° 13) et un tenant compte de la manière dont on a défini les espaces à bornés \tilde{E} , \tilde{F} , on voit que les conditions exigées à ces applications bilinéaires (n° 16) sont vérifiées.

Alors, si l'on pose, comme plus haut, $Q(\chi) = [P(\lambda)]^{-1}$, c'est-à-dire

$$(17.3) \quad P(\lambda)Q(\lambda) = I_F \quad \text{et} \quad Q(\lambda)P(\lambda) = I_E,$$

pour tout $\lambda \in Z$, on aura, d'une part, en vertu de l'hypothèse :

$$Q(A) = \frac{(A - \alpha)^m}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{(A - \lambda)^{-1} Q(\lambda)}{(\lambda - \alpha)^m} d\lambda \in N_A,$$

avec $\alpha \in \mathbf{C} - F_1$ et m, k suffisamment élevées; et on aura d'autre part, en vertu de (17.3) et des règles 2) et 4) du calcul symbolique

$$(17.4) \quad P(A)Q(A) = I_{\tilde{F}} \quad \text{et} \quad Q(A)P(A) = I_{\tilde{E}},$$

puisque $P(A) \in M_A$, $I_E \in L$, $I_F \in H$ et que

$$A^0 I_E = I_{\tilde{E}}, \quad A^0 I_F = I_{\tilde{F}}.$$

Mais (17.4) veut dire, précisément, que $Q(A) = [P(A)]^{-1}$, comme application de \tilde{F} dans \tilde{E} , ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. - Nous avons supposé que E est un sous-espace vectoriel de F . MAIS il est aisé de voir que les résultats obtenus s'étendent au cas où E et F sont quelconques.

18. Cas où A est l'opérateur de dérivation. - Soient maintenant E et F deux espaces vectoriels constitués par les fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans deux espaces à bornés complets, respectivement E_0 et F_0 , nulles à gauche de 0 et continues sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (cf. REMARQUE antérieure). On considère comme bornés dans E (resp. F) les ensembles de fonctions qui sont bornés, au sens usuel, sur tout intervalle borné; alors on voit aisément que E et F deviennent, eux aussi, deux espaces à bornés complets.

Soit d'autre part $P(\lambda)$ une fonction de la variable complexe λ , à valeurs dans $\Lambda(E_0; F_0)$, telle que

$$D_t[P(\lambda)u(t)] = P(\lambda)[D_t u(t)],$$

toutes les fois que l'un quelconque des deux membre soit pourvu de sens. Il est alors évident que les opérateurs $P(\lambda)$ se prolongent univoquement en des applications linéaires bornées de E dans F , permutables avec D .

Cela posé, considérons l'équation en u

$$P(D)u = f, \text{ avec } f \in F \text{ et } u \in E.$$

où D est l'opérateur de dérivation par rapport à t .

Puisque D est inversible, on peut construire les extensions \tilde{E} et \tilde{F} , resp. de E de F , par rapport à D , et prolonger les opérateurs $P(\lambda)$ en des éléments de $\Lambda(\tilde{E}; \tilde{F})$, permutables avec D . Supposons maintenant qu'il existe des valeurs de λ pour lesquelles l'équation en u_0

$$P(\lambda)u_0 = f_0,$$

admet, pour tout $f_0 \in F_0$, une solution unique $u_0 \in E_0$. Alors on définit, pour chacun de ces valeurs, un opérateur $Q(\lambda) = [P(\lambda)]^{-1}$, comme application linéaire de F_0 sur E_0 . Supposons en outre que cette application est bornée, i. e. un élément de $\Lambda(F_0; E_0)$. Alors $Q(\lambda)$ définit aussi un élément de $\Lambda(F; E)$ — donc un isomorphisme entre les espaces à bornés F et E , qui détermine à son tour un élément de $\Lambda(\tilde{F}; \tilde{E})$ permutable avec D .

Or on sait que

$$(D - \lambda)^{-1}f = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau = e^{\lambda t} H(t) * f(t)$$

pour toute fonction $f \in F$, ainsi que pour toute fonction scalaire de même type (on désigne par H la fonction de HEAVISIDE, égale à 1 pour $t > 0$ et nulle pour $t < 0$). Il en résulte que, si l'on désigne par F_k , pour tout $k = 1, 2, \dots$, le demi-plan $\operatorname{Re}(\lambda) \geq k$, les F_k sont des ensembles spectraux de D (on peut même démontrer que le filtre spectral de D est le filtre de base F_k , régulière).

Supposons enfin que les fonctions $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$, à valeurs respectivement dans $\Lambda(E_0; F_0)$ et dans $\Lambda(F_0; E_0)$, sont holomorphes et à croissance lente dans un des ensembles F_k . Alors il en sera de même pour ces fonctions, si l'on prolonge leurs valeurs en des éléments de $\Lambda(E; F)$ et de $\Lambda(F; E)$, et le théorème 5 permet de conclure que, pour toute fonction $f \in F$, l'équation $P(D)u = f$ admet une solution unique \tilde{u} dans \tilde{E} , donnée par

$$\tilde{u} = \frac{D_t^m}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{Q(\lambda)}{\lambda^m} [e^{\lambda t} H(t) * f(t)] d\lambda$$

où m et k sont des entiers suffisamment élevés, pour que l'intégrale existe, comme fonction continue de t , au sens du n° 6. Il en résulte aussitôt que,

si l'on pose

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} e^{\lambda t} \frac{Q(\lambda)}{\lambda^m} d\lambda, \quad R = D^m \rho,$$

ou aura

$$\tilde{u} = R(\widehat{t}) * f(\widehat{t}) = D_t^m \int_0^t \rho(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (^{14})$$

D'ailleurs, si, au lieu d'une fonction $f \in F$, on considère une distribution $\tilde{f} \in \tilde{F}$, $\tilde{f} = D^p f$, on trouve un résultat analogue

$$\tilde{u} = R(\widehat{t}) * \tilde{f}(\widehat{t}) = D_t^{m+p} \rho(\widehat{t}) * f(\widehat{t})$$

Observons que R est une distribution à valeurs dans $\Lambda(F_0; E_0)$, nulle à gauche de zéro, qu'il est naturel d'appeler *l'image inverse de Laplace de $Q(\lambda)$* , en posant

$$R = \mathcal{L}^{-1} Q$$

En effet, la théorie de la transformation de LAPLACE, telle que nous l'avons présentée pour les distributions scalaires [13], se généralise trivialement pour les distributions à valeurs dans des espaces à bornés complets.

En conclusion :

THÉOREME 6. — Si les fonctions $F(\lambda)$ et $[P(\lambda)]^{-1}$, à valeurs respectivement dans $\Lambda(E_0; F_0)$ et $\Lambda(F_0; E_0)$, sont holomorphes et à croissance lente dans un demi-plan droit, l'équation $P(D)u = f$, admet, pour toute distribution $\tilde{f} \in \tilde{F}$, une solution unique \tilde{u} dans \tilde{E} , donnée par

$$\tilde{u} = \frac{1}{P(D)} \tilde{f} = R(\widehat{t}) * f(\widehat{t}),$$

avec

$$R(\widehat{t}) = \mathcal{L}_\lambda^{-1} \frac{1}{P(\lambda)} \left[\text{image inverse de Laplace de } \frac{1}{P(\lambda)} \right].$$

Ce résultat, conséquence du théorème 5, est évidemment une généralisation plus directe du théorème d'isomorphisme de LIONS.

(¹⁴) Il va sans dire que, pour tout couple de nombres $t, \tau \geq 0$, le « produit » $\rho(t - \tau)f(\tau)$, dans ce cas, est le vecteur de E_0 résultant de l'opérateur $\rho(t - \tau)$ appliqué au vecteur $f(\tau)$ de F_0 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. GROTHENDIECK, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*, « J. Reine Angew. Math. », 192 (1953), p. 35-64.
- [2] M. HASUMI, *Notes on ultra-distributions*, I. à paraître.
- [3] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*, « J. Reine u. Angew. Math. », 191 (1953), p. 29-49.
- [4] J. L. LIONS, *Problèmes aux limites en théorie de distributions*, « Acta Mathematica », 94 (1955), p. 1-153.
- [5] — —, *Opérateurs de Delsarte et problèmes mixtes*, « Bull. Soc. Math. France », 84 (1956), p. 9-95.
- [6] F. RIESZ et B. SZ.-NAGY, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 3^e édition (1955).
- [7] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, II. Paris, Hermann.
- [8] J. SEBASTIÃO e SILVA, *As funções analíticas e a análise funcional*, « Thèse (1948), Portugaliae Math. », 9 (1960), p. 1-129. Ce travail est le développement d'une note, publiée dans « Rend. Accad. Lincei », serie VIII, 1 (1946), p. 79-115, et d'un mémoire, publié dans « Mem. Accad. Lincei », serie VIII, 1 (1947), p. 205-240.
- [9] — —, *Sui fondamenti della teoria dei funzionali analitici*, « Portugaliae Math. », 12 (1953), p. 1-46.
- [10] — —, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*, « Rev. Faculdade Ciências », Lisboa, 2^a série A, 4 (1954-55), p. 79-186.
- [11] — —, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, « Rend. Mat. », Roma, serie V, 14 (1955), p. 388-410.
- [12] — —, *Propriedades de permanência dos espaços (LN*) e dos seus duais*, « Congresso Luso-Espanhol », de 1956, à Coimbra.
- [13] — —, *Le calcul opérationnel au point de vue de distributions*, « Portugaliae Math. », 14 (1956), p. 105-132.
- [14] — —, *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*, « Portugaliae Math. » 17 (1958), p. 1-17. *Corrections et compléments*, ibidem, 18 (1959), p. 155-156.
- [15] — —, *Sobre o cálculo simbólico geral para una álgebra topológica*, « Congresso Luso-Espanhol » de 1958, à Madrid.
- [16] — —, *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*, « Math. Annalen », 136 (1959), p. 58-59.
- [17] — —, *Sur le calcul symbolique des opérateurs différentiels à coefficients variables*, « Rend. Accad. Lincei », serie VIII, 27 (1959), p. 42-47, p. 118-122.
- [18] — —, *Sur la définition et la structure de distributions vectorielles*, « Portugaliae Math. », 19 (1960), p. 1-80. Errata : ibidem, p. 243-244.
- [19] — —, *Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné*, « Mémoire Accad. Lincei », serie VIII, 6 (1960), p. 1-13. Errata : dans l'article suivant.
- [20] — —, *Sur le calcul symbolique à une ou plusieurs variables pour une algèbre localement convexe*, « Rend. Accad. Lincei », (8) 30 (1961), p. 167-172.
- [21] — —, *Les espaces à bornés et la notion de fonction différentiable*, Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle du C. B. R. M. à Louvain (1960).

- [22] — —, *La définition de spectre d'un opérateur et les opérateurs à spectre élémentaire non borné*, Ibidem.
- [23] M. DA SILVEIRA, *General operational calculus in n variables*, « Portugaliae Math. », 15 (1956), p. 49-69.
- [24] L. WAELBROECK, *Étude spectral des algèbres complètes*. « Mém. de l'Acad. R. de Belgique », 31 (1960), p. 1-142.
- [25] — —, *Étude spectral de certaines algèbres complètes*, Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle, Louvain (1960).
- [26] — —, *Les espaces à bornés complets*, Ibidem.
- [27] K. YOSHINAGA, *On a locally convex space introduced by J. S. e Silva*, « J. Sc. Hiroshima Univ. », A, 21 (1957), p. 89-98.

As ces travaux on doit ajouter encore l'article suivant, cité dans l'introduction :

J. CAMPOS FERREIRA, *Sur le calcul symbolique pour des fonctions vectorielles holomorphes à croissance lente à droite*, à paraître dans Portugaliae Mathematica.
