

J. SEBASTIAO e SILVA

Atti della 2^a Riunione del Groupement

de Mathématiciens d'expression latine

Firenze, 26-30 settembre 1961 — Bologna, 1-3 ottobre 1961

pp. 111-115

SUR LE CALCUL SYMBOLIQUE DES OPÉRATEURS À SPECTRE NON BORNÉ OU VIDE

PAR J. SEBASTIÃO E SILVA

(au sujet de la conférence de M. Waelbroeck)

1. Les recherches de M. Waelbroeck sur le calcul symbolique ont pour moi un intérêt spécial, non seulement à cause de l'originalité et profondeur de ses résultats, mais aussi parce qu'elles ont plusieurs points de contact avec mes expériences sur le même sujet. Je m'en suis aperçu l'an dernier à l'occasion du Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle à Louvain.

Je me suis occupé de certaines formes de calcul symbolique, concernant des opérateurs à spectre non borné ou vide (au sens classique), qui peuvent être subordonnés au calcul symbolique très général de M. Waelbroeck.

D'ailleurs, la notion de « ensemble spectral », introduite par M. Waelbroeck, permet de formuler, d'une façon assez simple et suggestive, les calculs symboliques dont je me suis occupé.

Pour clarté d'exposition, je me limiterai ici à un cas qui n'est pas le plus général, mais qui contient déjà toutes les idées essentielles du calcul symbolique à une variable, d'après mon point de vue.

2. Soit A une algèbre complexe, munie d'élément unité et d'une topologie localement convexe (séparée), par rapport à laquelle le produit soit séparément continu. Pour commodité, nous désignerons par 1 l'élément unité de A et nous poserons $\lambda 1 = \lambda$ pour tout nombre complexe λ .

On appelle *ensemble spectral* d'un élément a de A tout ensemble S de nombres complexes, tel que : 1) $a - \lambda$ est régulier pour tout $\lambda \notin S$; 2) la fonction $(a - \lambda)^{-1}$ de λ est bornée sur $C - S$. M. Waelbroeck a démontré que la famille de tous les ensembles spectraux de a est un filtre. Nous l'appellerons le *filtre spectral* de a .

Soit d'autre part \mathcal{F} un filtre de sous-ensembles du plan \mathbb{C} , admettant une base dénombrable formée par des ensembles fermés F_k , tels que la distance de F_{k+1} à $\mathbb{C} - F_k$ est > 0 . Pour tout k , nous désignons par $\mathcal{A}(F_k)$ l'espace des fonctions complexes φ , définies et continues sur F_k , holomorphes dans l'intérieur de F_k , et telles que, pour $z_0 \in \mathbb{C} - F_1$, $\varphi(z)(z - z_0)^{-k}$ est bornée sur F_k ; nous considérons $\mathcal{A}(F_k)$ muni de la topologie définie par la norme

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z \in F_k} \left| \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k} \right|.$$

On démontre que cette topologie ne dépend pas du point z_0 choisi.

Si l'on identifie chaque fonction $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ à sa restriction à F_{k+1} on a évidemment $\mathcal{A}(F_k) \subset \mathcal{A}(F_{k+1})$ pour tout k . Nous désignons par $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ la réunion des espaces $\mathcal{A}(F_k)$.

L'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ a une structure naturelle d'algèbre complexe munie d'élément unité. D'autre part, nous considérons dans $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ la topologie de la limite inductive des $\mathcal{A}(F_k)$; alors $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ devient un espace (\mathfrak{S}_2) , c'est-à-dire le dual fort d'un espace de Schwartz métrisable. On voit en outre que le produit $\varphi\psi$ est continu dans cet espace et que l'élément \hat{z} [c'est-à-dire la fonction $\varphi(z) \equiv z$] a pour filtre spectral précisément \mathcal{F} .

Supposons maintenant que l'algèbre \mathbf{A} , dont il est question plus haut, est semi-complète, et que les ensembles F_k vérifient encore les deux conditions suivantes :

a) Pour tout k et tout $\varrho > 0$, la frontière de F_k dans le disque $|z| \leq \varrho$ est formée par un nombre fini de lignes rectifiables.

b) Si z_0 est un point quelconque de $\mathbb{C} - F_1$ et F_k^* l'image de F_k par la transformation $z \rightarrow 1/(z - z_0)$, la longueur de l'intersection de la frontière de F_k^* avec le disque $|z| \leq \varrho$ tend vers une limite finie lorsque $\varrho \rightarrow 0$ (quel que soit k).

On exprime ces conditions en disant que la base de filtre $\{F_k\}$ est régulière. D'ailleurs, ces conditions sont assez faibles : elles seront toujours vérifiées dans les cas qui puissent se présenter dans les applications.

Cela étant, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. Si \mathbf{a} est un élément de \mathbf{A} , il ne peut pas exister plus d'un homomorphisme continu \mathcal{H} de $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ dans \mathbf{A} , faisant correspondre à la fonction unité l'élément unité de \mathbf{A} et à la fonction \hat{z} l'élément \mathbf{a} . Pour qu'il existe un tel homomorphisme, il faut et il suffit que le

filtre spectral de \mathbf{a} soit plus fin que \mathcal{F} (i.e. que tout F_k soit un ensemble spectral de \mathbf{a}). Alors on a

$$\mathcal{H}(\varphi) = \frac{(a - z_0)^p}{2\pi i} \int_{F_k} \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^p} (\mathbf{a} - z)^{-1} dz, \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}),$$

z_0 étant un point arbitraire de $\mathbb{C} - F_1$ et k, p des entiers tels que $\varphi \in \mathcal{A}(F_k)$ et que $\varphi(z)(z - z_0)^{-p}$ soit bornée sur F_k . On considère la frontière F_k orientée de façon à laisser à droite les points de F_k .

Dans ces conditions on pose

$$\varphi(\mathbf{a}) = \mathcal{H}(\varphi), \text{ pour toute } \varphi \in \mathcal{A}(\mathcal{F}),$$

ce qui établit un calcul symbolique de l'élément \mathbf{a} de \mathbf{A} .

3. On peut généraliser ce résultat de plusieurs façons. Une généralisation presque immédiate concerne le calcul symbolique de n éléments $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ de \mathbf{A} permutables, dans le cas simple où les domaines des fonctions $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ considérées sont produits cartésiens de sous-ensembles de \mathbb{C} . Un des buts de M. Waelbroeck est précisément de dépasser le plus que possible ce cas élémentaire : il y réussit en employant des outils puissants de l'analyse moderne. Mais je crois que, dans cette extension, il n'a pas de soucis d'ordre pratique, en ce qui concerne les applications aux équations fonctionnelles.

Pour ma part, je cherche à ne pas trop m'éloigner du point de vue pratique. Dans cet ordre d'idées, j'aboutis à une généralisation du calcul symbolique dans le cas de fonctions $\varphi(z_1, \dots, z_n)$ holomorphes et à croissance exponentielle sur des sous-ensembles convexes de \mathbb{C}^n , en employant certaines extensions de la transformation de Fourier-Laplace, à l'aide du concept de ultra-distribution.

Mais il y a encore d'autres généralisations du calcul symbolique, imposées par les besoins pratiques. Par exemple, on peut généraliser le théorème antérieur au cas de fonctions φ prenant leurs valeurs dans un espace localement convexe E (semi-complet et séparé), en supposant donnée une application bilinéaire $(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \rightarrow \mathbf{a} \circ \mathbf{u}$ de $\mathbf{A} \times E$ dans un autre espace $E_{\mathbf{A}}$, hypocontinue relativement aux parties compactes. On en déduit une généralisation du « théorème d'isomorphisme » de Lions, qui peut s'appliquer à la résolution de problèmes mixtes relatifs à des équations fonctionnelles de types très généraux.

4. Dans toutes ces recherches, j'ai été conduit, ainsi que M. Waelbroeck, à reconnaître l'avantage d'employer des espaces pseudo-topologiques (espaces à bornés, algèbres à bornés) au lieu d'espaces localement convexes. Ceux-ci posent constamment des problèmes difficiles, qui n'ont rien affaire avec les buts pratiques du calcul symbolique.

Il y a un cas typique, assez général, d'algèbres A , auxquelles s'appliquent d'une façon toute naturelle les calculs symboliques considérés. Ces algèbres se présentent fréquemment dans les applications de la façon suivante:

On a d'abord un espace localement convexe (ou un espace à bornés) E et un ou plusieurs opérateurs A_1, \dots, A_n , chaque A_j étant une application linéaire (en général non continue et non biunivoque) d'un sous-espace E_j de E sur l'espace E . Ces opérateurs sont en outre permutables.

En employant la méthode générale d'extension algébrique que j'ai indiquée dans mon travail « Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions », on peut alors construire un espace vectoriel \tilde{E} , dont E soit un sous-espace et tel que l'on puisse prolonger chacun des A_j en une application linéaire \tilde{A}_j de \tilde{E} dans \tilde{E} de façon que :

- 1) $\tilde{A}_j \tilde{A}_k = \tilde{A}_k \tilde{A}_j$, quels que soient $j, k = 1, \dots, n$
- 2) tout élément \tilde{u} de \tilde{E} soit de la forme $\tilde{u} = A_1^{p_1} \dots A_n^{p_n} u$, avec $u \in E$, p_1, \dots, p_n entiers.

Dans le cas plus simple, les A_j sont les opérateurs usuels de dérivation, E étant, par exemple, un espace de fonctions continues. Alors l'extension \tilde{E} sera un espace de distributions.

Mais il y a des cas concrets, conduisant à des espaces \tilde{E} dont les éléments ne sont pas en général des distributions: il suffit que, par exemple, les A_j soient des opérateurs différentiels à coefficients non indéfiniment dérivables.

Dans l'espace vectoriel \tilde{E} on peut introduire une topologie, d'après la méthode générale de prolongement topologique que j'ai indiquée dans le travail déjà cité: la plus fine topologie d'espace localement convexe qui induise dans E une topologie moins fine que celle de cet espace et rende continus les opérateurs A_j . Cela posé, on peut choisir, pour le calcul symbolique des opérateurs A_j , l'algèbre $L_b(\tilde{E})$ des applications linéaires continues de \tilde{E} dans \tilde{E} , munie de topologie de la convergence uniforme sur les bornés de \tilde{E} .

Toutefois, l'étude de ces topologies de \tilde{E} et $L_b(\tilde{E})$ présente de sérieuses difficultés, qui sont complètement étranges aux buts du

calcul symbolique. Pour s'en débarrasser, il n'y a qu'un chemin : prendre dans E , pour point de départ, une structure d'espace à bornés (qui peut être ou non subordonnée à une topologie localement convexe), introduire ensuite dans \tilde{E} une structure d'espace à bornés, suivant une méthode analogue à celle du prolongement topologique et considérer, pour le calcul symbolique des A_j , l'algèbre des applications linéaires bornées de \tilde{E} dans \tilde{E} , munie, à son tour, d'une structure d'algèbre à bornés. Ainsi les difficultés topologiques disparaissent complètement, sans donner place à aucun autre problème.

Je développe ces idées dans un travail à paraître dans les « Annali di Matematica ».

BIBLIOGRAPHIE

1. J. SEBASTIÃO e SILVA. *Le calcul opérationnel au point de vue des distributions*. Portugaliae Math. 14 (1955), 105-132.
2. J. SEBASTIÃO e SILVA. *Sobre o cálculo simbólico geral para n elementos duma álgebra*. Las Ciencias (Madrid), année 24, n. 1 (1959), 16-20.
3. J. SEBASTIÃO e SILVA. *Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel*. Math. Annalen, 136 (1958), 58-96.
4. J. SEBASTIÃO e SILVA. *Sur le calcul symbolique pour des opérateurs différentiels à coefficients variables*. Rend. Accad. Lincei (8), 27 (1959), 118-122.
5. J. SEBASTIÃO e SILVA. *Le calcul opérationnel pour des opérateurs à spectre non borné*. Mem. Accad. Lincei (8), 6 (1960), 1-13.
6. J. SEBASTIÃO e SILVA. *Sur le calcul symbolique à une ou plusieurs variables, pour une algèbre localement convexe*. Rend. Accad. Lincei (8), 30 (1961), 167-172.
7. L. WAELBROECK. *Étude spectrale des algèbres complètes*. Mém. de l'Acad. R. de Belgique (Sciences), 31 (1960), 1-140.
8. L. WAELBROECK. *Étude spectrale de certaines algèbres complètes CBRM*, Colloque sur l'Analyse Fonctionnelle à Louvain (1961), 29-38.
9. L. WAELBROECK. *Les espaces à bornés complets*. Ibidem, 31-56.